

解三角形刷题练

一、解答题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c , 且 $b\cos C + c\cos B = 2a\cos A$.

(1)若 $a = 2, b + c = \sqrt{13}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\sin B + \sin C$ 的取值范围.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 满足 $(2a - c)\cos B = b\cos C$.

(1)求角 B 的大小;

(2)设 $a = 4, b = 2\sqrt{7}$.

(i) 求 c 的值;

(ii) 求 $\sin(2C + B)$ 的值.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = 2a\cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)$.

(1)求 A ;

(2)若 $b = 2\sqrt{3}c$, 且 $\triangle ABC$ 面积 $2\sqrt{3}$,

(i) 求 a 的值;

(ii) 求 $\cos(2B - A)$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a = 2, b = 5, c = \sqrt{39}$.

(1)求 C 的值;

(2)求 $\sin A$ 的值;

(3)求 $\cos(2A + B)$ 的值.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a\sin C = c\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 设 $b = 6, c = 4$. 求 a 和 $\cos(A - 2C)$ 的值.

6. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, \tan B = 1, a = \sqrt{2}, b = 3$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 求 $\cos(2A - B)$;

(3) 求 c 的长.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\angle A$ 为钝角

$$, \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B, a = 7.$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\cos B = \frac{13}{14}$, 则:

① 求 b 的值;

② 求 $\sin(2B - A)$ 的值.

8. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}a(c \sin C + b \sin B - a \sin A).$$

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 且 $\triangle ABC$ 的周长为 5, 设 D 为边 BC 中点, 求 AD .

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = 2\sqrt{3}, b = 3$, 且满足 $\frac{b-a}{c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A + \sin B}$,

(1) 求角 A 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3c$, $\cos A = -\frac{1}{3}$.

(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\sin C$ 的值;

(3) 求 $\sin(2A + C)$ 的值.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 满足 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a < c, b = 2\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$.

① 求 a, c 的值;

② 求 $\sin(2C + B)$ 的值.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A$.

(1)若 $b = \sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的周长；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c = 2$ ，

①求角 C 的取值范围；

②求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, $a \cos C + c \cos A = 2b \cos B$, $\sin B = 2\sqrt{3} \cos A$.

(1)求 $\sin A$ 的值;

(2)若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 c 的值.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$, $c - 2b = 1$,

$a = \sqrt{7}$.

(1)求 A 的值;

(2)求 c 的值;

(3)求 $\sin(A + 2B)$ 的值.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(b \cos C + c \cos B) \tan A = -\sqrt{3} a$.

(1)求 A 的大小;

(2)若 $a = \sqrt{7}, b = 1$,

(i) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(ii) 求 $\cos(2C - A)$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $c^2 = a^2 + b^2 - 4bc \cos C$,

$\sin A = \cos C$.

(1)求证: $a = 2c$;

(2)求 $\cos C$ 的值;

(3)求 $\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

17. 已知向量 $\vec{m} = (\sqrt{3} \sin 2x + 2, \cos x)$, $\vec{n} = (1, 2 \cos x)$, 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $f(A) = 4, b = 1$, $\triangle ABC$ 的面积为

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 a 的值.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 - b^2 - c^2} = \tan A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $15\sqrt{3}$, $b = 14$, $a > c$.

(i) 求 a 和 c 的值;

(ii) 求 $\sin 2A$ 的值.

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = 2$, $c = 3$, $B = 60^\circ$.

(1) 求边 b 的长;

(2) 求 C 的正切值;

(3) 求 $\sin(2C - B)$ 的值.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$,

$\sin B : \sin C = 3 : 5$, $a = \sqrt{19}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 求 b 的值与 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 求 $\sin(C - 2A)$ 的值.

21. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = 3, 5a \sin C = 3c \sin B, \cos C = \frac{1}{5}$.

(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\sin B$ 的值;

(3) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c(a \cos B + b \cos A) = 4$,

$2a \sin B = 3b \sin C$, $b = 4$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\sin B$ 的值;

(3) 求 $\cos(2B + C)$ 的值.

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, b = 2\sqrt{7}$, $c = 2, B = \frac{\pi}{3}$.

(1)求 a 的值;

(2)求 $\sin A$;

(3)求 $\cos(B-2A)$ 的值.

24. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2}{bc}, a = 3b$.

(1)求 C 的值;

(2)求 $\sin B$ 的值;

(3)求 $\sin(A+3B)$ 的值.

25. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $b=3, c=4, C=2B$, 且 $a \neq b$.

(1)求 $\cos B$;

(2)求 a 的值;

(3)求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

26. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{b}{a+c} = 1 - \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$

(1)求角 A 的值

(2)若 $a=3, b=2\sqrt{2}$, 求 $\sin(2B+A)$ 的值

27. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 - a^2 = 6bc \sin A$.

(1)求 $\sin A$ 及 $\tan 2A$ 的值;

(2)若 $C = \frac{\pi}{4}, a=3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

28. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c \cos A = (3b-a) \cos C$.

(1)求 $\cos C$ 的值;

(2)若 $a=1, c=2$, 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(3)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{2}$, 且 $a+b=\sqrt{3}c$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 L .

29. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

$c = 4 \sin A \sin C$.

(1)求 A 的大小;

(2)求 a 的值;

(3)若 $b=2$, 求 $\cos(2B+A)$ 的值.

30. 在三角形中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a\cos C + c\cos A = -3b\cos B$

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $b = \sqrt{2}a$

(i) 求 $\sin A$;

(ii) 求 $\sin(3A + 2B + C)$.

31. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c = 2a\cos C - 2b$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $\sin B = 2\sin C$.

(i) 求 b 的值;

(ii) 求 $\cos\left(\frac{A}{4} - 2B\right)$ 的值.

32. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$3(\sin A - \sin C)^2 = 3\sin^2 B - 2\sin A \sin C.$$

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 若 $5a = 3b$,

(i) 求 $\tan\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值;

(ii) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

33. 在三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a\sin B = 2\sin A$, $a = 2c$,

$$\cos B = \frac{3}{4}.$$

(1) 求边 c 的大小;

(2) 求 $\tan A$ 的值;

(3) 求边 $\cos\left(2B - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

34. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c = 2b$, $a = 2c\cos C$.

(1) 求 $\frac{a}{b}$ 的值;

(2) 若 $b = 2$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

35. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $a = 3$, $b - c = 2$, $B = \frac{2\pi}{3}$.

(1)求 b, c 的值;

(2)求 $\sin C$ 的值;

(3)求 $\sin(B-C)$ 的值.

36. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c = 2b$, $\sqrt{2} \sin A = 3 \sin B$.

(1)求 $\sin C$ 的值;

(2)求 $\cos\left(2C + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(3)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$, 求 c 的值.

37. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, $c - b = 2$,

$$\cos A = -\frac{1}{3}.$$

(1)求 a 的值;

(2)求 $\sin C$ 的值;

(3)求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

38. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 已知 $c \cos \frac{A}{2} = a \sin C$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $b = 1$, $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 求 a 的值;

(3)若 $a = 2$, 当 $\triangle ABC$ 的周长取最大值时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

39. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, $\triangle ABC$ 的面积为 3.

(1)求 c 的值;

(2)求 $\sin B$ 的值;

(3)求 $\sin(2B - C)$ 的值.

40. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{6}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, $\sin B = 2 \sin C$.

(1)求边 b 的长;

(2)求 $\sin B$ 的值;

(3)求 $\cos\left(2C - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的值.