

解三角形刷题练

一、解答题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c , 且 $b\cos C + c\cos B = 2a\cos A$.

(1)若 $a=2, b+c=\sqrt{13}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\sin B + \sin C$ 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(2) $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$

【知识点】三角恒等变换的化简问题、正弦定理边角互化的应用、求含 $\sin x$ (型)函数的值域和最值、三角形面积公式及其应用

【分析】(1) 根据正弦定理边化角可得 $\sin A = 2\sin A \cos A$, 求出 $A = \frac{\pi}{3}$, 再由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 结合 $a=2, b+c=\sqrt{13}$, 求出 $bc=3$, 再根据三角形面积公式求解即可;

(2) 由三角形内角和为 π , 结合 $A = \frac{\pi}{3}$, 化简可得 $\sin B + \sin C = \sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$, 再由锐角三角形求出 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, 然后求解即可.

【详解】(1) 由正弦定理可得 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2\sin A \cos A$, 即 $\sin A = 2\sin A \cos A$, 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理知 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2 - 2bc}{2bc}$, 代入数据得 $\frac{1}{2} = \frac{13 - 4 - 2bc}{2bc}$, 解得

$bc=3$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(2) $\sin B + \sin C = \sin B + \sin(A+B) = \sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A$,

因为 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\sin B + \sin C = \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B = \frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, 所以 $\frac{3}{2} < \sin B + \sin C \leq \sqrt{3}$,

所以 $\sin B + \sin C$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 满足 $(2a - c)\cos B = b\cos C$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 设 $a = 4, b = 2\sqrt{7}$.

(i) 求 c 的值;

(ii) 求 $\sin(2C + B)$ 的值.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) (i) $c = 6$; (ii) $-\frac{5\sqrt{3}}{14}$

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、二倍角的余弦公式、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 利用正弦定理和诱导公式求解即可.

(2) (i) 利用余弦定理求解即可; (ii) 利用二倍角公式, 两角和的正弦定理结合即可求解.

【详解】(1) 由 $(2a - c)\cos B = b\cos C$,

根据正弦定理得, $(2\sin A - \sin C)\cos B = \sin B\cos C$,

可得 $2\sin A\cos B = \sin(B + C) = \sin A$,

因为 $0 < A < \pi$, 故 $\sin A \neq 0$, 则 $\cos B = \frac{1}{2}$,

又 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知, $B = \frac{\pi}{3}$, 且 $a = 4, b = 2\sqrt{7}$,

(i) 则 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

即 $\frac{1}{2} = \frac{16 + c^2 - 28}{2 \times 4 \times c}$, 解得 $c = -2$ (舍), $c = 6$.

故 $c = 6$.

(ii) 由 $(2a - c)\cos B = b\cos C$,

$$\text{得} (2 \times 4 - 6) \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{7} \cos C,$$

$$\text{解得} \cos C = \frac{\sqrt{7}}{14}, \text{ 则 } \sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{则 } \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -\frac{13}{14},$$

$$\text{则 } \sin(2C + B) = \sin 2C \cos B + \cos 2C \sin B$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{13}{14}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = 2a \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $b = 2\sqrt{3}c$, 且 $\triangle ABC$ 面积 $2\sqrt{3}$,

(i) 求 a 的值;

(ii) 求 $\cos(2B - A)$.

【答案】(1) $\frac{\pi}{6}$

(2) (i) $2\sqrt{7}$ (ii) $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$

【知识点】正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形、用和、差角的正弦公式化简、求值、三角形面积公式及其应用

【分析】(1) 由正弦定理, 三角函数恒等变换的应用化简已知等式可得 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 结合范围 $A \in (0, \pi)$, 可求 A 的值.

(2) (i) 由已知利用三角形的面积公式可求 c 的值, 进而可求 b 的值, 根据余弦定理可得 a 的值; (ii) 由余弦定理求得 $\cos B$, 进而可得 $\sin B$, 再根据两角差余弦及二倍角公式求解即可.

【详解】(1) 因为 $b = 2a \cos\left(C - \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $b = 2a \left(\cos C \cos \frac{\pi}{3} + \sin C \sin \frac{\pi}{3} \right)$, 可得: $b = a \cos C + \sqrt{3}a \sin C$,

由正弦定理可得: $\sin B = \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C$,

可得: $\sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C$,

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C \neq 0$,

所以 $\cos A = \sqrt{3} \sin A$, 即 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$

(2) (i) 因为 $b = 2\sqrt{3}c$, 且 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 2\sqrt{3}$,

解得: $c = 2$, $b = 4\sqrt{3}$,

由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 48 + 4 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 28$, 解得: $a = 2\sqrt{7}$;

(ii) 由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{28 + 4 - 48}{2 \times 2\sqrt{7} \times 2} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$,

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = \frac{1}{7}$, $\sin 2B = 2\sin B \cos B = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$,

所以 $\cos(2B - A) = \cos 2B \cos A + \sin 2B \sin A = \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a = 2$, $b = 5$, $c = \sqrt{39}$.

(1) 求 C 的值;

(2) 求 $\sin A$ 的值;

(3) 求 $\cos(2A + B)$ 的值.

【答案】(1) $C = \frac{2\pi}{3}$

(2) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

(3) $\frac{\sqrt{39}}{26}$

【知识点】正弦定理解三角形、余弦定理解三角形、用和、差角的余弦公式化简、求值

【分析】(1) 由余弦定理可得答案;

(2) 由正弦定理可得答案;

(3) 由平方关系求出 $\cos A$, 再利用两角和的余弦展开式化简可得答案.

【详解】(1) 由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 15 - 39}{2 \times 2 \times 5} = -\frac{1}{2}$,

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$;

(2) 因为 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin A = \frac{a \times \sin C}{c} = \frac{\sqrt{13}}{13}$;

(3) 因为 $C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$,

所以 $\cos(2A + B) = \cos(A + \pi - C) = \cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \cos A \cos \frac{\pi}{3} - \sin A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{39}}{13} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{39}}{26}.$$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin C = c \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$.

(I) 求角 A 的大小;

(II) 设 $b = 6$, $c = 4$. 求 a 和 $\cos(A - 2C)$ 的值.

【答案】(I) $A = \frac{\pi}{3}$; (II) $a = 2\sqrt{7}$. $\cos(A - 2C) = \frac{13}{14}$.

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理边角互化的应用

【解析】(1) 利用正弦定理进行边角互化, 利用三角恒等变换公式求解即可;

(2) 先利用余弦定理得出 a , 再利用正弦定理得出 $\sin C$, 得出 $\cos C$, 然后将 $\cos(A - 2C)$ 展开求值.

【详解】解: (I) 由已知及正弦定理可得 $\sin A \sin C = \sin C \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$.

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C > 0$. 故 $\sin A = \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$.

$$\text{即 } \sin A = \sin A \cos \frac{\pi}{3} + \cos A \sin \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{整理得 } \sin A = \sqrt{3} \cos A.$$

$$\text{所以 } \tan A = \sqrt{3}.$$

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(II) 根据余弦定理, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 将 $b = 6$, $c = 4$, $\cos A = \frac{1}{2}$ 代入解得:

$$a^2 = 28. \text{ 因为 } a > 0, \text{ 所以 } a = 2\sqrt{7}.$$

根据正弦定理有: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 解得 $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

又因为 $c < a$ ，所以 $C < \frac{\pi}{3}$ ，则 $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，

可求得： $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ， $\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C = \frac{1}{7}$ 。

则 $\cos(A - 2C) = \cos A \cos 2C + \sin A \sin 2C = \frac{13}{14}$ 。

【点睛】本题考查正弦定理、余弦定理的综合运用，考查三角函数和差角公式、二倍角公式的运用，难度一般。

6. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， $\tan B = 1, a = \sqrt{2}, b = 3$ 。

(1) 求 $\sin A$ ；

(2) 求 $\cos(2A - B)$ ；

(3) 求 c 的长。

【答案】(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{8+7\sqrt{2}}{18}$ (3) $2\sqrt{2}+1$

【知识点】正弦定理解三角形、二倍角的余弦公式、用和、差角的余弦公式化简、求值

【分析】(1) 由正弦定理及同角三角函数的基本关系；

(2) 由两角差的余弦及二倍角公式求解；

(3) 由正弦定理求解即可。

【详解】(1) $\because \tan B = 1, 0 < B < \pi$ ，

$$\therefore B = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 可得, } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \because \sin A = \frac{1}{3} \text{ 且 } a < b, B = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{7}{9}, \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\therefore \cos(2A - B) = \cos 2A \cos B + \sin 2A \sin B = \frac{7}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8+7\sqrt{2}}{18}$$

$$(3) \because \sin C = \sin(\pi - B - A) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A) \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1+2\sqrt{2}}{3} = \frac{4+\sqrt{2}}{6},$$

$$\text{由正弦定理, } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \text{ 可得 } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{3 \times \frac{4+\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2} + 1.$$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\angle A$ 为钝角

$$, \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B, a = 7.$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\cos B = \frac{13}{14}$, 则:

① 求 b 的值;

② 求 $\sin(2B - A)$ 的值.

$$\text{【答案】 (1) } \frac{2\pi}{3}$$

$$(2) \text{① } 3; \text{② } -\frac{55\sqrt{3}}{98}$$

【知识点】 已知正（余）弦求余（正）弦、二倍角的正弦公式、三角恒等变换的化简问题、正弦定理边角互化的应用

【分析】 (1) 由二倍角公式结合正弦定理即可求得;

(2) ① 由同角三角函数的基本关系和正弦定理即可求得;

② 由二倍角公式与两角差的正弦公式计算即可求得.

$$\text{【详解】 (1) 因为 } \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B, \text{ 所以 } 2 \sin B \cos B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B,$$

因为 $\angle A$ 为钝角, 所以 $\angle B$ 为锐角, 所以 $\cos B \neq 0$,

$$\text{所以 } 2 \sin B = \frac{\sqrt{3}}{7} b, \text{ 所以 } \frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{7}} = \frac{14\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{因为 } a = 7, \text{ 所以由正弦定理有: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{14\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{7 \times 3}{14\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为 } \angle A \text{ 为钝角, 所以 } A = \frac{2\pi}{3};$$

$$(2) \text{① 因为 } \cos B = \frac{13}{14}, \text{ 且 } B \text{ 为锐角, 所以 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\text{由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{7 \times \frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3;$$

$$\textcircled{2} \text{ 因为 } \sin 2B = 2\sin B \cos B = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{13}{14} = \frac{39\sqrt{3}}{98}, \quad \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = \frac{169}{98} - 1 = \frac{71}{98},$$

$$\text{所以 } \sin(2B - A) = \sin 2B \cos A - \cos 2B \sin A = \frac{39\sqrt{3}}{98} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{71}{98} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{55\sqrt{3}}{98}.$$

8. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为

$$\frac{1}{2}a(c \sin C + b \sin B - a \sin A).$$

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 且 $\triangle ABC$ 的周长为 5, 设 D 为边 BC 中点, 求 AD .

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

$$(2) \frac{\sqrt{66}}{6}$$

【知识点】几何图形中的计算、余弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用、正弦定理边角互化的应用

【分析】(1) 根据三角形的面积公式结合正弦定理化角为边, 再利用余弦定理即可得解;

(2) 根据三角形的周长, 结合余弦定理求出 bc , 再向量化即可得解.

$$\text{【详解】(1) 依题意, } \frac{1}{2}a(c \sin C + b \sin B - a \sin A) = \frac{1}{2}ab \sin C,$$

$$\text{所以 } c \sin C + b \sin B - a \sin A = b \sin C,$$

$$\text{由正弦定理可得, } c^2 + b^2 - a^2 = bc,$$

$$\text{由余弦定理, } c^2 + b^2 - a^2 = 2bc \cos A, \text{ 解得 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3};$$

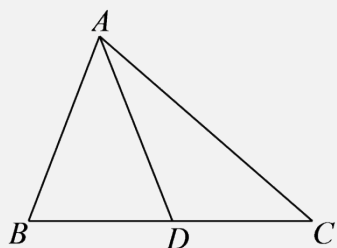
$$(2) \text{ 依题意, } b + c = 5 - a = 3,$$

$$\text{因为 } c^2 + b^2 - bc = (b + c)^2 - 3bc = a^2, \text{ 解得 } bc = \frac{5}{3},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{b^2 + c^2 + bc}{4} = \frac{(b + c)^2 - bc}{4} = \frac{3^2 - \frac{5}{3}}{4} = \frac{11}{6},$$

$$\text{所以 } AD = \frac{\sqrt{66}}{6}.$$



9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = 2\sqrt{3}, b = 3$, 且满足 $\frac{b-a}{c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A + \sin B}$,

(1) 求角 A 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{3\sqrt{21}-1}{16}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、二倍角的余弦公式、已知两角的正、余弦，求和、差角的正弦

【分析】(1) 先由正弦定理边角转化结合余弦定理计算求解;

(2) 先应用二倍角公式结合两角和差正弦公式计算求解.

【详解】(1) 因为 $\frac{b-a}{c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A + \sin B}$,

由正弦定理可得 $\frac{b-a}{c} = \frac{b-c}{a+b}$,

整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$,

且 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由正弦定理知 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, $\therefore \frac{3}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $\therefore \sin B = \frac{3}{4}$,

又 $b < a$, $\therefore B < A$, $\therefore \cos B = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\sin 2B = 2\sin B \cos B = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$,

$\therefore \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{8}$,

$$\therefore \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{21}-1}{16}.$$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3c$, $\cos A = -\frac{1}{3}$.

(1) 求 c 的值;

(2) 求 $\sin C$ 的值;

(3) 求 $\sin(2A + C)$ 的值.

【答案】(1) $c = 1$

$$(2) \sin C = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$(3) -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、二倍角的余弦公式、二倍角的正弦公式

【分析】(1) 根据条件, 利用余弦定理即可求出结果;

(2) 根据条件, 利用同角三角函数间的关系, 得到 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 再利用正弦定理即可求出结果;

(3) 法一, 利用二倍角公式, 求出 $\sin 2A, \cos 2A$, 利用同角三角函数间的关系求出 $\cos C$, 即可求出结果; 法二, 利用 $A + B + C = \pi$, 得到 $\sin(2A + C) = \sin(B - A)$, 再计算出 $\sin B, \cos B$ 即可求出结果.

【详解】(1) 因为 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3c$, $\cos A = -\frac{1}{3}$,

$$\text{由余弦定理可得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9c^2 + c^2 - 12}{6c^2} = -\frac{1}{3}, \text{ 整理得 } c^2 - 1 = 0,$$

解得 $c = 1$.

(2) 因为 $\cos A = -\frac{1}{3}$, $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 可得 } \frac{2\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{\sin C},$$

$$\text{解得 } \sin C = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

(3) (法一) 由 (2) 得, $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9},$$

$$\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{9},$$

$$\text{所以 } \sin(2A + C) = \sin 2A \cos C + \cos 2A \sin C = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{5\sqrt{3}}{9} - \frac{7}{9} \times \frac{\sqrt{6}}{9} = -\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin(2A + C) = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$(\text{法二}) \text{ 由余弦定理可得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 1^2 - 3^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \sin(2A + C) = \sin[(A + C) + A] = \sin(\pi - B + A) = \sin[\pi - (B - A)] = \sin(B - A)$$

$$= \sin B \cos A - \cos B \sin A = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 满足 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a < c, b = 2\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$.

① 求 a, c 的值;

② 求 $\sin(2C + B)$ 的值.

【答案】 (1) $B = \frac{\pi}{3}$

(2) ① $a = 2, c = 6$; ② $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$

【知识点】 正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形、用和、差角的正弦公式化简、求值

【分析】 (1) 利用正弦定理边化角求解.

(2) ① 利用余弦定理及三角形面积公式列出方程组求解; ② 利用余弦定理、二倍角及和角的正弦公式求解.

【详解】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$ 及正弦定理, 得 $\sqrt{3} \sin A \cos B = \sin B \sin A$,

而 $\sin A \neq 0$, 则 $\tan B = \sqrt{3}$, 又 $0 < B < \pi$,

所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) ①在 $\triangle ABC$ 中, $b = 2\sqrt{7}$,

由 (1) 及余弦定理得 $a^2 + c^2 - 2ac\cos B = b^2$, 即 $a^2 + c^2 - ac = 28$,

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = 3\sqrt{3}$, 即 $ac = 12$, 而 $a < c$,

所以 $a = 2, c = 6$.

②由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 28 - 36}{2 \times 2 \times 2\sqrt{7}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$,

而 $C \in (0, \pi)$, 则 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$,

$\sin 2C = 2\sin C \cos C = -\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C = -\frac{13}{14}$,

$\sin(2C + B) = \sin 2C \cos B + \cos 2C \sin B = -\frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{2} - \frac{13}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a\sin \frac{A+C}{2} = b\sin A$.

(1) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的周长;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $c = 2$,

①求角 C 的取值范围;

②求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

【答案】(1) 2π ;

(2) ① $C \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$; ② $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$.

【知识点】三角形面积公式及其应用、正弦定理边角互化的应用、正弦定理求外接圆半径、二倍角的正弦公式

【分析】(1) 利用正弦定理边化角, 利用二倍角的正弦求出 B , 再利用正弦定理求解.

(2) ①由 (1) 的结论, 结合锐角三角形条件求出 C 的范围; ②由正弦定理及三角形面积公式, 结合正切函数的性质求出范围.

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a\sin \frac{A+C}{2} = b\sin A$ 及正弦定理, 得 $\sin A \sin \frac{A+C}{2} = \sin B \sin A$,

而 $\sin A > 0$, 则 $\sin \frac{A+C}{2} = \sin B$, $\cos \frac{B}{2} = 2\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$, 又 $\frac{B}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$,

于是 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}$, 因此 $B = \frac{\pi}{3}$, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

由正弦定理得 $R = \frac{b}{2\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \frac{\pi}{3}} = 1$,

所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的周长为 2π .

(2) ①由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 得 $0 < A < \frac{\pi}{2}, 0 < C < \frac{\pi}{2}$, 又 $B = \frac{\pi}{3}$,

则 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$, 所以角 C 的取值范围是 $C \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$;

② $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}a \cdot 2\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

由正弦定理得 $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{3} + C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3} \cos C + \sin C}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\tan C} + 1$.

由 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$, 得 $\tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $1 < a < 4$, 因此 $\frac{\sqrt{3}}{2} < S_{\triangle ABC} < 2\sqrt{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, $a \cos C + c \cos A = 2b \cos B$, $\sin B = 2\sqrt{3} \cos A$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 c 的值.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

(2) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{15}}{5}$

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、正弦定理解三角形、三角函数的化简、求值——同角三角函数基本关系

【分析】(1) 由正弦定理和两角和的正弦公式化简可得 $\cos A = \frac{1}{4}$, 再由同角三角函数的基本关系即可得出答案;

(2) 由正弦定理可求出 b , 再由两角和的正弦公式求出 $\sin C$, 最后由正弦定理即可得出答案.

【详解】(1) 因为 $a \cos C + c \cos A = 2b \cos B$,

由正弦定理, 得 $\sin A \cos C + \sin C \cos A = 2 \sin B \cos B$,

即 $\sin(A+C) = 2 \sin B \cos B \Leftrightarrow \sin B = 2 \sin B \cos B$.

因为 $B \in (0, \pi)$, $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos B = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{3}$.

由 $2\sqrt{3} \cos A = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\cos A = \frac{1}{4}$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

(2) 由正弦定理, 可得 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$.

又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{8}$,

由正弦定理, 可得 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{15}}{5}$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$, $c - 2b = 1$,

$a = \sqrt{7}$.

(1) 求 A 的值;

(2) 求 c 的值;

(3) 求 $\sin(A+2B)$ 的值.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 3

(3) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、余弦定理解三角形、二倍角的余弦公式、正弦定理解三角形

【分析】(1) 由正弦定理化边为角再化简可求;

(2) 由余弦定理, 结合 (1) 结论与已知代入可得关于 b 的方程, 求解可得 b , 进而求得 c ;

(3) 利用正弦定理先求 B , 再由二倍角公式分别求 $\sin 2B, \cos 2B$, 由两角和的正弦可得.

【详解】(1) 已知 $a \sin B = \sqrt{3}b \cos A$, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

得 $a \sin B = b \sin A = \sqrt{3}b \cos A$, 显然 $\cos A \neq 0$,

得 $\tan A = \sqrt{3}$, 由 $0 < A < \pi$,

故 $A = \frac{\pi}{3}$;

(2) 由 (1) 知 $\cos A = \frac{1}{2}$, 且 $c = 2b + 1$, $a = \sqrt{7}$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

$$\text{则 } 7 = b^2 + (2b+1)^2 - 2 \times \frac{1}{2} b(2b+1) = 3b^2 + 3b + 1,$$

解得 $b=1$ ($b=-2$ 舍去),

故 $c=3$;

$$(3) \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 且 } b=1, a=\sqrt{7}, \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{21}}{14}, \text{ 且 } a > b, \text{ 则 } B \text{ 为锐角},$$

$$\text{故 } \cos B = \frac{5}{14} \sqrt{7}, \text{ 故 } \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$$\text{且 } \cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{21}}{14} \right)^2 = \frac{11}{14};$$

$$\text{故 } \sin(A+2B) = \sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(b \cos C + c \cos B) \tan A = -\sqrt{3}a$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 1$,

(i) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(ii) 求 $\cos(2C - A)$.

【答案】(1) $A = \frac{2\pi}{3}$;

(2) (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) $\frac{11}{14}$.

【知识点】余弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用、正弦定理边角互化的应用、已知两角的正、余弦，求和、差角的余弦

【分析】(1) 利用正弦定理化边为角，结合两角和得正弦公式及三角形内角关系即可得出答案;

(2) 利用余弦定理求得边 c ，根据三角形面积公式可得面积，再根据余弦定理可得 $\cos C$ ，再利用二倍角公式及和差角公式即得.

【详解】(1) 因为 $(b \cos C + c \cos B) \tan A = -\sqrt{3}a$,

所以 $(\sin B \cos C + \sin C \cos B) \tan A = -\sqrt{3} \sin A$,

即 $\sin(B+C) \tan A = -\sqrt{3} \sin A$,

则 $\sin A \tan A = -\sqrt{3} \sin A$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$,

所以 $\tan A = -\sqrt{3}$,

所以 $A = \frac{2\pi}{3}$;

(2) (i) 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $7 = 1 + c^2 + c$, 解得 $c = -3$ (舍去) 或 $c = 2$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(ii) 由上可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7 + 1 - 4}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, 又 $C \in (0, \pi)$,

所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C = \frac{1}{7}$,

所以 $\cos(2C - A) = \cos 2C \cos A + \sin 2C \sin A = \frac{1}{7} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11}{14}$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $c^2 = a^2 + b^2 - 4bc \cos C$,

$\sin A = \cos C$.

(1) 求证: $a = 2c$;

(2) 求 $\cos C$ 的值;

(3) 求 $\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(3) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【知识点】已知正(余)弦求余(正)弦、用和、差角的正弦公式化简、求值、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 根据题意, 结合余弦定理可得 $2c \cos C = a \cos C$, 从而得证;

(2) 由(1)及正弦定理得 $\sin A = 2 \sin C$, 结合同角基本关系式可求;

(3) 根据 $\sin A = \cos C$, 结合诱导公式得 $A - C = \frac{\pi}{2}$, 或 $A + C = \frac{\pi}{2}$, 分情况求解.

【详解】(1) 因为 $c^2 = a^2 + b^2 - 4bc \cos C$,

又由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

可得 $2c \cos C = a \cos C$,

由 $\sin A = \cos C$ 知 $\cos C \neq 0$,

所以 $a = 2c$,

(2) 由 (1) 及正弦定理得 $\sin A = 2 \sin C$,

又因为 $\sin A = \cos C$,

所以 $2 \sin C = \cos C$,

又因为 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$,

解得 $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(3) 由 (2) 知 $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{4}{5}$, $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = \frac{3}{5}$,

因为 $\sin A = \cos C$, 即 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos C$,

则 $A - C = \frac{\pi}{2}$, 或 $A + C = \frac{\pi}{2}$,

当 $A - C = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2C\right)$

$$= \cos \frac{5\pi}{6} \cos 2C + \sin \frac{5\pi}{6} \sin 2C$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}.$$

当 $A + C = \frac{\pi}{2}$, B 为 $\frac{\pi}{2}$, 此时 $\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. 已知向量 $\vec{m} = (\sqrt{3} \sin 2x + 2, \cos x)$, $\vec{n} = (1, 2 \cos x)$, 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n}$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 若 $f(A) = 4, b = 1$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 a 的值.

【答案】(1) $f(x)_{\min} = 4, f(x)_{\max} = 5$; (2) $a = \sqrt{3}$

【知识点】求含 $\sin x$ (型)函数的值域和最值、三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形、

数量积的坐标表示

【分析】试题分析：（1）要求 $f(x)$ 的最值，首先要求其解析式，这可由平面向量的数量积的坐标运算可得，然后利用两角和的正弦公式把函数化为一个三角函数形式：

$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + k$ ，最后结合正弦函数的性质可得最值；（2）本小题实质上解三角形问题，分析三角形中的六个元素，由 $f(A) = 4$ 结合（1）可求得角 A ，由 $\triangle ABC$ 的面积，选公式 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 可求得边 c ，最后再由余弦定理可求得 a 。

【详解】试题解析：（1） $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} = \sqrt{3} \sin 2x + 2 + 2 \cos^2 x$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 3 = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递减， $f(0) = 4, f(\frac{\pi}{6}) = 5, f(\frac{\pi}{4}) = 3 + \sqrt{3}$

$\therefore f(x)_{\min} = 4, f(x)_{\max} = 5$ ；

$$(2) \because f(A) = 2 \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) + 3 = 4, \therefore \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\because 2A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right) \therefore 2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \therefore A = \frac{\pi}{3}$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore c = 2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 3 \therefore a = \sqrt{3}$$

考点：平面向量的数量积，两角和的正弦公式，正弦函数的性质，三角形面积，余弦定理。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\frac{\sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 - b^2 - c^2} = \tan A$ 。

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $15\sqrt{3}$ ， $b = 14$ ， $a > c$ 。

(i) 求 a 和 c 的值；

(ii) 求 $\sin 2A$ 的值。

【答案】(1) $B = \frac{2\pi}{3}$

(2) (i) $a = 10$ ， $c = 6$ ；(ii) $\frac{55\sqrt{3}}{98}$

【知识点】二倍角的正弦公式、正弦定理边角互化的应用、三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 根据正、余弦定理化简计算可得 $\tan B = -\sqrt{3}$ ，即可求解；

(2) (i) 根据三角形的面积公式和余弦定理计算可得 $ac = 60$ 、 $a^2 + c^2 = 136$ ，即可求出 a, c ；(ii) 根据正弦定理求出 $\sin A$ ，结合同角的平方关系和二倍角的正弦公式计算即可求解。

【详解】(1) 由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ， $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ，

由 $\frac{\sqrt{3}(a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 - b^2 - c^2} = \tan A$ ，得 $\frac{\sqrt{3} \times 2ac \cos B}{-2bc \cos A} = \tan A$ ，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，得 $-\frac{\sqrt{3} \sin A \cos B}{\sin B \cos A} = \tan A$ ，

则 $-\frac{\sqrt{3} \tan A}{\tan B} = \tan A$ ，又 $\tan A \neq 0$ ，所以 $\tan B = -\sqrt{3}$ ，

又 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{2\pi}{3}$ 。

(2) (i) 由 (1) 知， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = 15\sqrt{3}$ ，得 $ac = 60$ ①。

由余弦定理 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ，所以 $a^2 + c^2 = 136$ ②。

由 ①②，得 $\begin{cases} (a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 = 256 \\ (a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 = 16 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a+c = 16 \\ a-c = \pm 4 \end{cases}$ ，

由 $a > c$ ，解得 $a = 10$ ， $c = 6$ 。

(ii) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，所以 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，

$\because A$ 为锐角， $\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{11}{14}$ ，

$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{55\sqrt{3}}{98}$ 。

19. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 。已知 $a = 2$ ， $c = 3$ ， $B = 60^\circ$ 。

(1) 求边 b 的长；

(2) 求 C 的正切值；

(3) 求 $\sin(2C - B)$ 的值。

【答案】(1) $\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{3}$

(3) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、正弦定理解三角形、余弦定理解三角形

【分析】(1) 由余弦定理求解即可；

(2) 构造直角三角形，计算边长即可求解 C 的正切值；

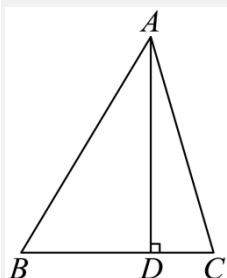
(3) 由 (2) 可求出 C 的正弦、余弦值，再利用两角差的正弦公式求解即可.

【详解】(1) 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$, $\therefore b = \sqrt{7}$

(2) 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 60^\circ$, $AB = 3$

$$\therefore BD = \frac{3}{2}, AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore CD = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ACD \text{ 中, } \tan C = \frac{AD}{CD} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3},$$



$$(3) \text{ 由 (2) 可知 } \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\therefore \sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \times \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = 2 \times \frac{1}{28} - 1 = -\frac{13}{14}$$

$$\text{因为 } B = 60^\circ, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin(2C - B) = \sin 2C \cos B - \cos 2C \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{13}{14}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$,

$$\sin B : \sin C = 3 : 5, a = \sqrt{19}.$$

(1) 求角 A 的大小;

(2) 求 b 的值与 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 求 $\sin(C - 2A)$ 的值.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

$$(2) b=3, S_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$(3) -\frac{3\sqrt{57}}{38}$$

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、辅助角公式、三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 利用辅助角公式化简得出 $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，结合角 A 的取值范围可得出角 A 的值；

(2) 由正弦定理得出 $c = \frac{5}{3}b$ ，结合余弦定理求出 b 、 c 的值，再利用三角形的面积公式即可求出 $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 利用余弦定理求出 $\cos C$ 的值，结合同角三角函数的基本关系求出 $\sin C$ 的值，然后利用两角差的正弦公式可求出 $\sin(C - 2A)$ 的值。

【详解】(1) 由 $\sqrt{3}\sin A + \cos A = 2$ 可得 $2\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 2$ ，可得 $\sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，

因为 $0 < A < \pi$ ，则 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$ ，所以 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，解得 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，有 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{3}{5} = \frac{b}{c}$ ，所以 $c = \frac{5}{3}b$ ，

由 (1) 知 $A = \frac{\pi}{3}$ ，由余弦定理得

$$a^2 = 19 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc = \frac{34}{9}b^2 - \frac{5}{3}b^2 = \frac{19}{9}b^2,$$

解得 $b = 3$ ， $c = 5$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ 。

(3) 由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{19 + 9 - 25}{2\sqrt{19} \times 3} = \frac{\sqrt{19}}{38}$ ，

$$\text{所以 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{19}}{38}\right)^2} = \frac{5\sqrt{57}}{38},$$

$$\text{所以 } \sin(C - 2A) = \sin\left(C - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin C \cos \frac{2\pi}{3} - \cos C \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \frac{5\sqrt{57}}{38} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{19}}{38} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{57}}{38}.$$

21. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a = 3, 5a \sin C = 3c \sin B, \cos C = \frac{1}{5}$ 。

(1)求 c 的值;

(2)求 $\sin B$ 的值;

(3)求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】(1) $2\sqrt{7}$;

(2) $\frac{\sqrt{42}}{7}$;

(3) $\frac{6\sqrt{2}-5}{14}$.

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、二倍角的余弦公式、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 应用正弦边角关系及已知可得 $b=5$, 再由余弦定理求边长;

(2) 根据已知得 $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 再由正弦定理求 $\sin B$;

(3) 由 (2) 及已知有 $\cos B = \frac{1}{\sqrt{7}}$, 再应用二倍角正余弦公式及和角正弦公式求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$.

【详解】(1) 由题设及正弦边角关系得 $5ac = 3bc \Rightarrow 5a = 3b$, 又 $a=3$, 则 $b=5$,

由余弦定理有 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 25 - 6 = 28$, 则 $c = 2\sqrt{7}$;

(2) 由 $\cos C = \frac{1}{5}$ 且 $0 < C < \pi$, 则 $\sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$,

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 则 $\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$;

(3) 由上 $b < c$, 故 B 为锐角, 则 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{1}{\sqrt{7}}$,

所以 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = -\frac{5}{7}$,

所以 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2B + \frac{1}{2} \cos 2B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{7} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{6\sqrt{2}-5}{14}$.

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别 a, b, c , 已知 $c(a \cos B + b \cos A) = 4$,

$2a \sin B = 3b \sin C$, $b = 4$.

(1)求 a 的值;

(2)求 $\sin B$ 的值;

(3)求 $\cos(2B+C)$ 的值.

【答案】(1) $a=3$

$$(2)\sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$(3)-\frac{17}{32}$$

【知识点】已知两角的正、余弦，求和、差角的余弦、正弦定理解三角形、正弦定理边角互化的应用、余弦定理边角互化的应用

【分析】(1)方法一：结合题设，根据余弦定理及正弦定理求解即可；

方法二：结合题设，根据正弦定理及两角和的正弦公式求解即可；

(2)由余弦定理先求出 $\cos B = -\frac{1}{4}$ ，再结合平方关系求解即可；

(3)结合二倍角公式先求出 $\cos 2B = -\frac{7}{8}$ ， $\sin 2B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ ，结合正弦定理求出 $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ，再结合平方关系求出 $\cos C = \frac{7}{8}$ ，进而根据两角和的余弦公式求解即可.

【详解】(1)方法一：由 $c(a\cos B + b\cos A) = 4$ ，

$$\text{根据余弦定理可得，} c\left(a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = 4,$$

$$\text{则} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = 4, \text{ 即 } c = 2,$$

由 $2a\sin B = 3b\sin C$ ，根据正弦定理可得 $2ab = 3bc$ ，则 $2a = 3c = 6$ ，即 $a = 3$.

方法二：由 $c(a\cos B + b\cos A) = 4$ ，

$$\text{根据正弦定理可得，} c(2R\sin A\cos B + 2R\sin B\cos A) = 4, \text{ 则 } c(2R\sin C) = 4,$$

$$\text{则 } c^2 = 4, \text{ 即 } c = 2,$$

由 $2a\sin B = 3b\sin C$ ，根据正弦定理可得 $2ab = 3bc$ ，则 $2a = 3c = 6$ ，即 $a = 3$.

$$(2) \text{ 由余弦定理可得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{又因为 } B \in (0, \pi), \text{ 可得 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知, } \cos B = -\frac{1}{4}, \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{则 } \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = -\frac{7}{8}, \sin 2B = 2\sin B\cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8},$$

由正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 则 $\frac{2}{\sin C} = \frac{4}{\sqrt{15}}$, 即 $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$,

又 $c < b$, 则 $C < B$, 所以 $\cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{7}{8}$,

所以 $\cos(2B + C) = \cos 2B \cos C - \sin 2B \sin C = -\frac{7}{8} \times \frac{7}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{15}}{8} = -\frac{17}{32}$.

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, b = 2\sqrt{7}, c = 2, B = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求 $\sin A$;

(3) 求 $\cos(B - 2A)$ 的值.

【答案】(1) 的值为 6

(2) $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

(3) $-\frac{11}{14}$

【知识点】用和、差角的余弦公式化简、求值、二倍角的余弦公式、正弦定理解三角形、余弦定理解三角形

【分析】(1) 由已知利用余弦定理可得 $a^2 - 2a - 24 = 0$, 解方程即可得解的值.

(2) 由正弦定理即可得解 $\sin A$ 的值.

(3) 由已知利用余弦定理可求 $\cos A$ 的值, 利用二倍角公式可求 $\sin 2A$, $\cos 2A$, 进而根据两角差的余弦公式即可求解 $\cos(B - 2A)$ 的值.

【详解】(1) 因为 $b = 2\sqrt{7}, c = 2, B = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 可得 $28 = a^2 + 4 - 2 \times a \times 2 \times \frac{1}{2}$,

可得 $a^2 - 2a - 24 = 0$, 解得 $a = 6$, 或 -4 (舍去),

即 a 的值为 6.

(2) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $\sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$;

(3) 因为 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{28 + 4 - 36}{2 \times 2\sqrt{7} \times 2} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$,

所以 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{3\sqrt{21}}{14} \times (-\frac{\sqrt{7}}{14}) = -\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 2 \times \frac{1}{28} - 1 = -\frac{13}{14}$,

$$\cos(B-2A) = \cos B \cos 2A + \sin B \sin 2A = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{13}{14}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{3\sqrt{3}}{14}\right) = -\frac{11}{14}.$$

24. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2}{bc}, a = 3b$.

(1) 求 C 的值;

(2) 求 $\sin B$ 的值;

(3) 求 $\sin(A+3B)$ 的值.

【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$

(2) $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{14}$

(3) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、二倍角的余弦公式、用和、差角的正弦公式化简、求值

【分析】(1) 利用正弦定理化简 $\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2}{bc}$, 得 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, 再利用余弦定理进行计算即可求解;

(2) 由 (1) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, 结合 $a = 3b$, 解得 $c = \sqrt{7}b$, 再利用正弦定理计算即可求解;

(3) $\sin(A+3B) = \sin\left(2B + \frac{2\pi}{3}\right)$, 进而利用倍角公式和和差公式进行求解即可.

【详解】(1) 因为 $\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2}{bc}$,

由正弦定理可得 $\frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{bc}$, 整理得 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$,

由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$,

又 $C \in (0, \pi)$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 知 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$, 又 $a = 3b$, 得 $c = \sqrt{7}b$,

由正弦定理可得 $\sin C = \sqrt{7}\sin B$,

又 $C = \frac{\pi}{3}$, 解得 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

(3) 因为 $a > b$, 所以 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $\cos B = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

所以 $\sin 2B = 2\sin B \cos B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = \frac{11}{14}$.

$$\begin{aligned}\text{所以 } \sin(A+3B) &= \sin\left(2B + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \sin 2B \cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2B \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.\end{aligned}$$

25. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $b=3, c=4, C=2B$, 且 $a \neq b$.

(1)求 $\cos B$;

(2)求 a 的值;

(3)求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

【答案】(1) $\cos B = \frac{2}{3}$

(2) $a = \frac{7}{3}$

(3) $\frac{4\sqrt{10} + \sqrt{2}}{18}$

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、二倍角的正弦公式、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 由题意可得出 $\sin C = \sin 2B$, 再由正弦定理和二倍角的正弦公式求解即可;

(2) 由余弦定理可得 $3a^2 - 16a + 21 = 0$, 解方程即可得出答案;

(3) 利用同角的正余弦公式可求得 $\sin B$, 再求得 $\sin 2B, \cos 2B$, 进而利用两角差的正弦公式可求得 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{4}\right)$.

【详解】(1) 因为 $C = 2B$, 所以 $\sin C = \sin 2B = 2 \sin B \cos B$,

由正弦定理可得: $c = 2b \cos B$, 所以 $\cos B = \frac{c}{2b} = \frac{4}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$.

(2) 由余弦定理可得: $\cos B = \frac{2}{3} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 16 - 9}{2a \cdot 4} = \frac{a^2 + 7}{8a}$,

所以 $3a^2 - 16a + 21 = 0$, 解得: $a = \frac{7}{3}$ 或 $a = 3$,

因为 $a \neq b$, 所以 $a = \frac{7}{3}$.

(3) 因为 $\cos B = \frac{2}{3}$, 所以 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$,

$\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$,

$$\text{所以 } \sin\left(2B - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2B \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{9}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{10} + \sqrt{2}}{18}.$$

26. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $\frac{b}{a+c} = 1 - \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}$

(1) 求角 A 的值

(2) 若 $a=3, b=2\sqrt{2}$, 求 $\sin(2B+A)$ 的值

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理边角互化的应用、二倍角的余弦公式、已知两角的正、余弦，求和、差角的余弦

【分析】(1) 根据已知条件，由正弦定理角化边，得到三边的关系，进而利用余弦定理求解；

(2) 由正弦定理求得 $\sin B$, 并根据边的大小关系判定 B 为锐角，然后利用倍角公式和两角和的正弦公式计算.

【详解】(1) 解: $\because \frac{b}{a+c} = 1 - \frac{\sin C}{\sin A + \sin B},$

由正弦定理得, $\frac{b}{a+c} = 1 - \frac{c}{a+b}.$

化简得, $b^2 + c^2 - a^2 = bc.$

由余弦定理得, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}.$

又 $0 < A < \pi,$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 解: 由 (1) 知, $A = \frac{\pi}{3},$ 又 $a=3, b=2\sqrt{2},$

$$\therefore \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

又 $b < a,$

$$\therefore \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin(2B+A) = \sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

27. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 - a^2 = 6bc \sin A$.

(1) 求 $\sin A$ 及 $\tan 2A$ 的值;

(2) 若 $C = \frac{\pi}{4}, a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan 2A = \frac{3}{4}$;

(2) 9.

【知识点】用和、差角的正弦公式化简、求值、二倍角的正切公式、三角形面积公式及其应用、余弦定理边角互化的应用

【分析】(1) 应用余弦边角关系及已知得 $\cos A = 3 \sin A$, 再由平方关系求 $\sin A$, 且 $\tan A = \frac{1}{3}$, 应用二倍角正切公式求 $\tan 2A$;

(2) 由正弦定理求得 $c = 3\sqrt{5}$, 根据 (1) 及和角正弦公式求得 $\sin B = \sin(A+C) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 最后应用三角形面积公式求面积.

【详解】(1) 由题设 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6bc \sin A}{2bc} = 3 \sin A$, 即 $\cos A = 3 \sin A$,
故 $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 9 \sin^2 A$, 可得 $\sin^2 A = \frac{1}{10}$, $\sin A > 0$, 则 $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

由上 $\tan A = \frac{1}{3}$, 则 $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{3}{4}$;

(2) 由 $C = \frac{\pi}{4}, a = 3$, 则 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = 3\sqrt{5}$,

由 (1) 知 $\cos A = 3 \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$, 则 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 9$.

28. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $c \cos A = (3b - a) \cos C$.

(1) 求 $\cos C$ 的值;

(2) 若 $a = 1, c = 2$, 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{2}$, 且 $a + b = \sqrt{3}c$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 L .

【答案】(1) $\cos C = \frac{1}{3}$

(2) $\frac{2\sqrt{42}+5}{18}$

$$(3) 6 + 2\sqrt{3}$$

【知识点】余弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用、正弦定理解三角形、用和、差角的正弦公式化简、求值

【分析】(1) 解法 1: 根据正弦定理化边为角, 然后利用两角和的正弦公式化简求解即可. 解法 2: 根据余弦定理化角为边, 然后再利用余弦定理求解即可.

(2) 由 $\cos C = \frac{1}{3}$ 得 $\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 然后根据正弦定理得 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 然后利用二倍角公式求得 $\sin 2A, \cos 2A$, 最后利用两角和的正弦公式求解即可.

(3) 利用面积公式求得 $ab = 9$, 再由余弦定理得 $(a+b)^2 - c^2 = 24$, 结合已知求得 $c = 2\sqrt{3}$, 即可求得周长.

【详解】(1) 解法 1: 因为 $c \cos A = (3b - a) \cos C$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C \cos A = (3 \sin B - \sin A) \cos C$

即 $3 \sin B \cos C = \sin C \cos A + \sin A \cos C = \sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 则 $\sin B > 0$, 故 $\cos C = \frac{1}{3}$;

解法 2: 因为 $c \cos A = (3b - a) \cos C$,

由余弦定理得 $c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = (3b - a) \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

整理得 $2ab = 3a^2 + 3b^2 - 3c^2$, 可得 $a^2 + b^2 - c^2 = \frac{2}{3}ab$,

由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{3}$.

(2) 因为 $\cos C = \frac{1}{3}$, 且 $C \in (0, \pi)$, 则 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, a = 1, c = 2$,

$\therefore \frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}, \therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore a < c \therefore A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \therefore \cos A = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$,

$\therefore \cos 2A = 2(\cos A)^2 - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{5}{9}$,

$$\therefore \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{42} + 5}{18}.$$

$$(3) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}ab = 3\sqrt{2}, \therefore ab = 9,$$

因为由余弦定理得 $2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$,

$$\text{于是 } (a+b)^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = 2ab(\cos C + 1) = 24,$$

因为 $a+b = \sqrt{3}c$, 则 $(a+b)^2 - c^2 = 2c^2 = 24$, 所以 $c = 2\sqrt{3}$,

因此 $a+b = \sqrt{3}c = 6$, 于是 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c = 6+2\sqrt{3}$.

29. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,
 $c = 4 \sin A \sin C$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 求 a 的值;

(3) 若 $b = 2$, 求 $\cos(2B + A)$ 的值.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $a = 3$

(3) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、用和、差角的正弦公式化简、求值

【分析】(1) 由余弦定理的推论即可得到 $\cos A$ 的值, 进而可求得角 A ;

(2) 由正弦定理即可求解 a ;

(3) 运用二倍角公式以及两角和的余弦公式求解即可.

【详解】(1) 由 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 及余弦定理, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$;

(2) 由 (1) 及 $c = 4 \sin A \sin C$, 得 $c = 2\sqrt{3} \sin C$

根据正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2\sqrt{3}$, 解得 $a = 3$;

(3) 根据正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} = 2\sqrt{3}$, 又 $b = 2$, 所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

因为 $b < a$ ，所以 $B < A$ ，则 $\cos B = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

则 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

$\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$ 。

$\cos(2B + A) = \cos 2B \cos A - \sin 2B \sin A = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6}$ 。

30. 在三角形中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a \cos C + c \cos A = -3b \cos B$

(1) 求 $\cos B$ ；

(2) 若 $b = \sqrt{2}a$

(i) 求 $\sin A$ ；

(ii) 求 $\sin(3A + 2B + C)$ 。

【答案】(1) $\cos B = -\frac{1}{3}$ ；

(2) (i) $\sin A = \frac{2}{3}$ ；(ii) $\sin(3A + 2B + C) = \frac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{27}$ 。

【知识点】正弦定理边角互化的应用、二倍角的余弦公式、用和、差角的正弦公式化简、求值、已知正（余）弦求余（正）弦

【分析】(1) 由题设结合正弦定理边化角和两角和的正弦公式即可计算求解。

(2) (i) 先由 (1) 求出 $\sin B$ ，再由题设结合正弦定理即可计算求解。

(ii) 由 (i) 求出 $\cos A$ ，接着由倍角公式求出 $\cos 2A, \sin 2A$ ，再由 $C = \pi - A - B$ 结合两角和的正弦公式即可计算求解。

【详解】(1) 因为 $a \cos C + c \cos A = -3b \cos B$ ，

所以由正弦定理得 $\sin A \cos C + \sin C \cos A = -3 \sin B \cos B$ ，即 $\sin(A + C) = \sin B = -3 \sin B \cos B$ ，

又 $B \in (0, \pi)$ ，则 $\sin B > 0$ ，所以 $\cos B = -\frac{1}{3}$ 。

(2) (i) 由 (1) 可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

若 $b = \sqrt{2}a$ ，则由正弦定理得 $\sin B = \sqrt{2} \sin A$ 即 $\frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \sin A$ ，

所以 $\sin A = \frac{2}{3}$ 。

(ii) 因为 $\sin A = \frac{2}{3}$, $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos B = -\frac{1}{3}$,

所以 $B \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

所以 $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$,

所以 $\sin(3A + 2B + C) = \sin(3A + 2B + \pi - A - B) = \sin[\pi + (2A + B)] = -\sin(2A + B)$

$= -\sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{9} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{27}$.

31. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c = 2a \cos C - 2b$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $a = \sqrt{7}$, $\sin B = 2 \sin C$.

(i) 求 b 的值;

(ii) 求 $\cos\left(\frac{A}{4} - 2B\right)$ 的值.

【答案】(1) $A = \frac{2\pi}{3}$

(2) (i) $b = 2$; (ii) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$

【知识点】二倍角的余弦公式、三角恒等变换的化简问题、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 法一: 利用正弦定理和三角恒等变换的化简计算即可求解; 法二: 利用余弦定理计算即可求解;

(2) (i) 利用余弦定理计算即可求解; (ii) 根据正弦定理和三角恒等变换的化简计算即可求解.

【详解】(1) $\triangle ABC$ 中, $c = 2a \cos C - 2b$,

法 (一)

由正弦定理有 $\sin C = 2 \sin A \cos C - 2 \sin B$ ①,

因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

代入①式整理得 $\sin C + 2 \cos A \sin C = 0$,

又 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos A = -\frac{1}{2}$,

因为 $0 < A < \pi$ ，所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 。

法（二）

由余弦定理 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ，代入 $c = 2a \cos C - 2b$ ，

整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$ ，代入 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$ ，

因为 $0 < A < \pi$ ，所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 。

（2）（i）由已知 $b = 2c$ ， $a = \sqrt{7}$ ，

代入 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$ ，解得 $c = 1$ ， $b = 2$ 。

（ii）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，有 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，

又因为 $A = \frac{2\pi}{3}$ ，故 B 为锐角，故 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，

所以 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ， $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = \frac{1}{7}$ ，

由 $A = \frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{A}{4} = \frac{\pi}{6}$ ，

故 $\cos\left(\frac{A}{4} - 2B\right) = \cos \frac{\pi}{6} \cos 2B + \sin \frac{\pi}{6} \sin 2B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ 。

32. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知

$$3(\sin A - \sin C)^2 = 3\sin^2 B - 2\sin A \sin C.$$

（1）求 $\cos B$ 的值；

（2）若 $5a = 3b$ ，

（i）求 $\tan\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

（ii）求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

【答案】（1） $\cos B = \frac{2}{3}$

（2）（i）3；（ii） $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理边角互化的应用、正弦定理解三角形、三角恒等变换的化简问题

【分析】（1）利用正弦定理化简原式，直接利用余弦定理求 $\cos B$ 的值即可；

(2) (i) 由 (1) 可得 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 再利用正弦定理求 $\sin A$ 的值, 利用同角三角函数的基本关系和两角和的正切公式即可求解;

(ii) 由二倍角的正弦公式以及两角和的正弦公式可得结果.

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

可得: $3(a-c)^2 = 3b^2 - 2ac$, 整理得 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2}{3}$,

由余弦定理, 可得 $\cos B = \frac{2}{3}$;

(2) (i) 由 (1) 可得 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 又由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

及已知 $5a = 3b$, 可得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

由已知 $5a = 3b$, 可得 $a < b$, 故有 $A < B$,

$\therefore A$ 为锐角, 可得 $\cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \tan A = \frac{1}{2}$,

则 $\tan(A + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan A + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan A \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$;

(ii) 由 (i) 可得 $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = \frac{3}{5}$, $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{4}{5}$,

$\therefore \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{6} = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$.

33. 在三角形 ABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin B = 2 \sin A$, $a = 2c$,

$\cos B = \frac{3}{4}$.

(1) 求边 c 的大小;

(2) 求 $\tan A$ 的值;

(3) 求边 $\cos\left(2B - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】(1) $\sqrt{2}$

(2) $-\sqrt{7}$

(3) $\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{16}$

【知识点】用和、差角的余弦公式化简、求值、二倍角的余弦公式、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 由正弦定理和余弦定理方程可得；

(2) 由余弦定理结合同角的三角函数关系可得；

(3) 由同角的三角函数，二倍角的正余弦公式以及两角差的余弦展开式计算可得.

【详解】(1) 由已知 $a \sin B = 2 \sin A$,

$$ab = 2a, \quad b = 2,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4c^2 + c^2 - 2^2}{2 \times 2c \times c} = \frac{3}{4}, \text{ 解为 } c = \sqrt{2};$$

$$(2) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-\sqrt{2}}{4}, \text{ 又 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4},$$

$$\text{所以 } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -\sqrt{7};$$

$$(3) \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{8},$$

$$\cos\left(2B - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2B \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2B \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{16}.$$

34. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c = 2b$, $a = 2c \cos C$.

(1) 求 $\frac{a}{b}$ 的值;

(2) 若 $b = 2$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $\sqrt{6}$

(2) $\sqrt{15}$

【知识点】三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 利用余弦定理化角为边可求答案;

(2) 先求 $\sin C$, 利用面积公式可得答案.

【详解】(1) $\because a = 2c \cos C$, 由余弦定理得, $a = 2c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

$$\text{又 } c = 2b,$$

$$\therefore a = 2 \times 2b \times \frac{a^2 + b^2 - (2b)^2}{2ab}, \text{ 化简得 } a^2 = 6b^2,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{6}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \cos C = \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{6}b}{2 \times 2b} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore C \text{ 为锐角}, \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\because b = 2, \therefore a = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} = \sqrt{15}.$$

35. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $a = 3$, $b - c = 2$, $B = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 求 b, c 的值;

(2) 求 $\sin C$ 的值;

(3) 求 $\sin(B - C)$ 的值.

【答案】(1) $c = 5, b = 7$

$$(2) \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$(3) \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、用和、差角的正弦公式化简、求值、已知正（余）弦求余（正）弦

【分析】(1) 由已知, 利用余弦定理, 代入求解即可;

(2) 根据正弦定理进行求解即可;

(3) 由 (2) 可求得 $\cos C$, 然后利用两角差的正弦公式展开计算即可.

【详解】(1) 因为 $a = 3$, $b - c = 2$, $B = \frac{2\pi}{3}$, 则 $b = c + 2$,

$$\text{由余弦定理, } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 则 } -\frac{1}{2} = \frac{9 + c^2 - (c + 2)^2}{6c},$$

$$\text{解得 } c = 5, b = c + 2 = 7.$$

(2) 由 (1) 知 $c = 5, b = 7$,

$$\text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 则 } \sin C = \frac{c \cdot \sin B}{b} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

(3) 由 (2) 知 $\sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$,

$$\text{又 } B = \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } 0 < C < \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{11}{14},$$

$$\text{则 } \sin(B - C) = \sin B \cos C - \cos B \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

36. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c = 2b$, $\sqrt{2} \sin A = 3 \sin B$.

(1)求 $\sin C$ 的值;

(2)求 $\cos\left(2C + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值;

(3)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$, 求 c 的值.

【答案】(1) $\frac{\sqrt{14}}{4}$;

(2) $-\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$;

(3)4.

【知识点】三角形面积公式及其应用、正弦定理边角互化的应用、二倍角的余弦公式、逆用和、差角的余弦公式化简、求值

【分析】(1) 应用正弦边角关系得 $\sqrt{2}a = 3b$, 结合已知及余弦定理得 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 再由平方关系求 $\sin C$;

(2) 应用二倍角正余弦公式、和角余弦公式求函数值;

(3) 由三角形面积公式得 $ab = 6\sqrt{2}$, 结合 $\sqrt{2}a = 3b$ 、 $c = 2b$ 即可求边长.

【详解】(1) 因为 $\sqrt{2}\sin A = 3\sin B$, 所以 $\sqrt{2}a = 3b$, 而 $c = 2b$,

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad 0 < C < \pi,$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{14}}{4};$$

$$(2) \text{ 由 (1) } \sin 2C = 2\sin C \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = -\frac{3}{4},$$

$$\cos\left(2C + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2C - \frac{1}{2}\sin 2C = -\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8};$$

$$(3) \text{ 由 (1) } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{2}, \text{ 则 } ab = 6\sqrt{2}, \text{ 又 } \sqrt{2}a = 3b, \text{ 则 } b = 2,$$

又 $c = 2b$, 则 $c = 4$.

37. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, $c - b = 2$,

$$\cos A = -\frac{1}{3}.$$

(1)求 a 的值;

(2)求 $\sin C$ 的值;

(3)求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】(1) $a = 2\sqrt{3}$

(2) $\sin C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(3) $\frac{4\sqrt{6}-7}{18}$

【知识点】给值求值型问题、正弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【分析】(1) 利用同角关系可求 $\sin A$ ，再利用面积公式以及条件可求 b, c 的值，最后利用余弦定理即可；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理即可；

(3) 利用倍角公式计算 $\sin 2A, \cos 2A$ ，再利用两角和差的余弦公式计算.

【详解】(1) $\triangle ABC$ 中，由 $\cos A = -\frac{1}{3}$ ，得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

由面积为 $\sqrt{2}$ ，有 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{2}$ ，整理得 $bc = 3$ ，

又 $c - b = 2$ ，解得 $b = 1, c = 3$ （负值舍去）

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10 - a^2}{6} = -\frac{1}{3}$ ，可得 $a = 2\sqrt{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，得 $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) 因 $\sin 2A = 2\sin A \cos A = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ， $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = -\frac{7}{9}$ ，

则 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2A \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2A \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{7}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{6}-7}{18}$.

38. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c 已知 $c \cos \frac{A}{2} = a \sin C$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若 $b = 1$ ， $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，求 a 的值；

(3) 若 $a = 2$ ，当 $\triangle ABC$ 的周长取最大值时，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $A = \frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(3) $\sqrt{3}$

【知识点】条件等式求最值、余弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用、正弦定理解三

角形

【分析】(1) 根据正弦定理得到 $\cos \frac{A}{2} = \sin A$ ，再根据倍角公式得 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ ，进而得到

$$A = \frac{\pi}{3};$$

(2) 根据 $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 得 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，由正弦定理求得 a 的值；

(3) 根据余弦定理得 $4 = (b+c)^2 - 2bc - 2bccos\frac{\pi}{3}$ ，再利用均值不等式得 $b+c \leq 4$ ，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，此时周长最大，再由面积公式求得此时的面积。

【详解】(1) 因为 $c \cos \frac{A}{2} = a \sin C$ ，由正弦定理得 $\sin C \cos \frac{A}{2} = \sin A \sin C$ ，

因为 $\sin C \neq 0$ ，所以 $\cos \frac{A}{2} = \sin A$ ，

又因为 $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ ，且 $\cos \frac{A}{2} \neq 0$ ，所以 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ ，

又因为 $A \in (0, \pi)$ ， $\frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，

所以 $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，即 $A = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 因为在 $\triangle ABC$ 中， $\cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，所以 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，

又因为 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $b=1$ ，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，

$$\text{可得 } a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ ，

得 $4 = (b+c)^2 - 2bc - 2bccos\frac{\pi}{3}$ ，即 $(b+c)^2 - 4 = 3bc \leq 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(b+c)^2$ ，

所以 $\frac{1}{4}(b+c)^2 \leq 4$ ， $(b+c)^2 \leq 16$ ， $b+c \leq 4$ ，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号，

所以周长的最大值为 $a+b+c=6$ ，

此时面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \sqrt{3}$ 。

39. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $a=3, b=2\sqrt{2}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 3。

(1) 求 c 的值；

(2) 求 $\sin B$ 的值；

(3)求 $\sin(2B-C)$ 的值.

【答案】(1) $\sqrt{5}$

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(3) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、二倍角的余弦公式、用和、差角的正弦公式化简、求值

【分析】(1) 利用三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 可得角 C ，再用余弦定理求 c ；

(2) 根据正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 即得；

(3) 先用二倍角公式求出 $\sin 2B, \cos 2B$ ，然后再用两角差的正弦公式求值.

【详解】(1) $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2}\sin C = 3\sqrt{2}\sin C = 3$,

$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，又 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，

$\therefore C = \frac{\pi}{4}$ ，又由三角形余弦定理得：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 9 + 8 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 5,$$

$\therefore c = \sqrt{5}$.

(2) 由三角形正弦定理得： $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，即 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{\sqrt{5}}{\sin \frac{\pi}{4}}$ ，

$$\therefore \sin B = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(3) 又 $\because B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\therefore \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

$$\therefore \sin 2B = 2\sin B \cos B = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5},$$

又 $\because C = \frac{\pi}{4}$ ，

$$\therefore \sin(2B - C) = \sin 2B \cos C - \cos 2B \sin C = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

40. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{6}, \cos A = -\frac{1}{4}, \sin B = 2\sin C$.

(1) 求边 b 的长;

(2) 求 $\sin B$ 的值;

(3) 求 $\cos\left(2C - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的值.

【答案】(1)4

(2) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

(3) $\frac{9\sqrt{5}-11}{32}$

【知识点】余弦定理解三角形、正弦定理解三角形、给值求值型问题、已知正(余)弦求余(正)弦

【分析】(1) 由正弦定理可知 $b = 2c$, 进而结合余弦定理求解即可;

(2) 根据平方关系先求得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 再结合正弦定理求解即可;

(3) 先求出 $\sin 2C$, $\cos 2C$, 再结合两角差的余弦公式求解即可.

【详解】(1) 因为 $\sin B = 2\sin C$, 由正弦定理可知 $b = 2c$,

由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}$, 即 $\frac{4c^2 + c^2 - 24}{4c^2} = -\frac{1}{4}$,

解得 $c = 2$, 故 $b = 4$.

(2) 由 $\cos A = -\frac{1}{4}$ 及 $A \in (0, \pi)$, 得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{\sin B}$,

解得 $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

(3) 由 (2) 得 $\sin C = \frac{1}{2} \sin B = \frac{\sqrt{10}}{8}$, 所以 $\cos C = \frac{3\sqrt{6}}{8}$.

所以 $\sin 2C = 2\sin C \cos C = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C = \frac{11}{16}$.

所以 $\cos\left(2C - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2C \cos \frac{2\pi}{3} + \sin 2C \sin \frac{2\pi}{3}$

$= \frac{11}{16} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3\sqrt{15}}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{5}-11}{32}$.