

概率

一、填空题

1. 石室校园，望楼汉阙，红墙掩映，步移景异！现有甲、乙、丙、丁四位校友到“文翁化蜀”、“锦水文风”、“魁星阁”、“银杏大道”4处景点追忆石室读书时光.若每人只去一处景点，设事件 A 为“4 个人去的景点各不相同”，事件 B 为“只有甲去了锦水文风”，则 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{32}$ $\frac{2}{9}$

【分析】根据古典概型结合排列数计算，再应用条件概率公式计算求解即可.

【详解】由题意可知，4 人去 4 个不同的景点，事件数有 $A_4^4 = 24$ ，总事件数为 $4^4 = 256$ ，故 $P(A) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$ ，
又事件 B 的总数为 $3^3 = 27$ ，所以 $P(B) = \frac{27}{256}$ ，
事件 A 和事件 B 同时发生，即“只有甲去了锦水文风，另外 3 人去了另外 3 个不同的景点”，则事件 AB 的总数为 $A_3^3 = 6$ ，
所以 $P(AB) = \frac{6}{256}$ ，所以 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{256}}{\frac{27}{256}} = \frac{2}{9}$.
故答案为： $\frac{3}{32}; \frac{2}{9}$.

2. 将 3 个黑球和 2 个白球放入一个不透明的盒中，各球除颜色不同外完全相同，现从盒中两次随机抽取球，每次抽取一个球.

(i) 若第一次随机抽取一个球之后，将抽取出来的球放回盒中，第二次随机抽取一个球，则两次抽到颜色相同的球的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(ii) 若第一次随机抽取一个球之后，抽取出来的球不放回盒中，第二次从盒中余下的球中随机抽取一个球，则在已知两次抽取的球颜色相同的条件下，第一次抽取的球是白球的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{13}{25}/0.52$ $\frac{1}{4}/0.25$

【分析】放回和不放回两种抽取时，考查抽取的所有情况及不同条件下的情况，利用古典概

型概率计算公式计算即可.

【详解】放回的抽取时，两次抽取共有 $5 \times 5 = 25$ 种情况，

其中两次抽取颜色相同共有 $3 \times 3 + 2 \times 2 = 13$ 种情况，

其中黑色相同的有 $3 \times 3 = 9$ 种，白色相同的共有 $2 \times 2 = 4$ 种，

故所求概率为 $\frac{13}{25}$ ；

当不放回的抽取时，颜色相同的有 $3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ 种情况，

其中其中黑色相同的有 6 种，白色相同的共 2 种，

所以在已知两次抽取的球颜色相同的条件下，

第一次抽取的球是白球的概率为 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{13}{25}$ ； $\frac{1}{4}$

3. 甲、乙两位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：累计赢 2 局者胜，分出胜负即停止比赛.

已知甲每局赢的概率为 $\frac{3}{5}$ ，每局比赛的结果相互独立.本次比赛到第 3 局才分出胜负的概率为 _____，本次比赛甲获胜的概率为 _____.

【答案】 $\frac{12}{25}$ / 0.48 $\frac{81}{125}$ / 0.648

【分析】空 1：根据独立事件的乘法公式求解本次比赛到第 3 局才分出胜负的概率；

空 2：利用独立事件的乘法公式和互斥事件概率加法公式求解甲获胜的概率即可.

【详解】到第 3 局才分出胜负，则前两局甲、乙各赢一局，其概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$.

若甲获胜，分 2 种情况：①甲连赢 2 局，其概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ ，

②前两局甲、乙各赢一局，第三局甲赢，其概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$.

故甲获胜的概率为 $\frac{9}{25} + \frac{36}{125} = \frac{81}{125}$.

故答案为： $\frac{12}{25}$ ， $\frac{81}{125}$

4. 某班从 6 名班干部（其中男生 4 人，女生 2 人）中，任选 3 人参加学校的义务劳动.男生甲或女生乙被选中的概率为 _____；设“男生甲被选中”为事件 A ，“女生乙被选中”为事件 B ，则 $P(A|B) =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{5}$ / 0.8 $\frac{2}{5}$ / 0.4

【分析】根据古典概型结合对立事件的概率即可求出第一空，利用条件概率公式即可求出第二空.

【详解】男生甲和女生乙都没有选中的概率为 $\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$,

所以男生甲或女生乙被选中的概率为 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$,

$$P(B) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}; \frac{2}{5}$.

5. 已知甲盒中有 3 个白球, 2 个黑球; 乙盒中有 1 个白球, 2 个黑球. 若从这 8 个球中随机选取一球, 该球是白球的概率是_____; 若从甲、乙两盒中任取一盒, 然后从所取到的盒中任取一球, 则取到的球是白球的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}/0.5$ $\frac{7}{15}$

【分析】根据古典概型的计算公式及全概率的计算公式直接得解.

【详解】根据题意, 从这个 8 个球中随机选取一球, 该球是白球的概率是 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;

设“取出甲盒”为事件 A_1 , “取出乙盒”为事件 A_2 , “取到的球是白球”为事件 B ,

$$\text{则 } P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{15}.$$

所以从甲、乙两盒中任取一盒, 然后从所取到的盒中任取一球, 则取到的球是白球的概率是 $\frac{7}{15}$.

故答案为: $\frac{1}{2}; \frac{7}{15}$.

6. 甲、乙、丙三个人去做相互传球训练, 训练规则是确定一人第一次将球传出, 每次传球时, 传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人, 每次必须将球传出. 如果第一次由甲将球传出, 设 n 次传球后球在甲手中的概率为 P_n , 则 $P_3 =$ _____; $P_n =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}/0.25$ $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$

【分析】设出事件 A_n ，由题意得到 $A_{n+1} = \overline{A_n} \cdot A_{n+1} + A_n \cdot A_{n+1}$ ，由互斥事件的概率加法公式和全概率公式得到概率 P_n 的递推式 $P_{n+1} = -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}$ ，接着构造等比数列 $\{P_n - \frac{1}{3}\}$ ，求出其通项公式即得。

【详解】设 A_n = “经过 n 次传球后，球在甲的手中”，则事件 A_n 的概率即 $P_n, n=1, 2, 3, \dots, n$ ，则 $P_1 = 0$ ，

$$\begin{aligned} \text{依题意, } A_{n+1} &= \overline{A_n} \cdot A_{n+1} + A_n \cdot A_{n+1}, \text{ 则 } P_{n+1} = P(\overline{A_n} \cdot A_{n+1} + A_n \cdot A_{n+1}) = P(\overline{A_n} \cdot A_{n+1}) + P(A_n \cdot A_{n+1}) \\ &= P(\overline{A_n}) \cdot P(A_{n+1} | \overline{A_n}) + P(A_n) \cdot P(A_{n+1} | A_n) = (1 - P_n) \times \frac{1}{2} + P_n \times 0 = \frac{1}{2}(1 - P_n), \\ \text{即 } P_{n+1} &= -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}, \quad 1, 2, 3, \dots, (*) \end{aligned}$$

$$\text{因 } P_1 = 0, \text{ 代入解得, } P_2 = \frac{1}{2}, \quad P_3 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$\text{由 } (*) \text{ 可得, } P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}(P_n - \frac{1}{3}), \text{ 且 } P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

故数列 $\{P_n - \frac{1}{3}\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项， $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

$$\text{于是, } P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 则得, } P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}.$$

7. 甲、乙两人的口袋中均装有 3 个球，甲的 3 个球为 2 个黑球和 1 个白球，乙的 3 个球均为黑球（黑球和白球的大小，材质一样）。两人决定玩一场游戏：两人各从口袋中任取 1 个球与对方交换，重复进行这样的操作。第 1 次交换后，甲的口袋中黑球的个数为 3 的概率为_____；第 2 次交换后，甲的口袋中依然只有 1 个白球的概率为_____。

【答案】 $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{9}$

【分析】根据题意，结合古典概型概率公式，即可求解；若第 2 次交换后，甲的口袋依然只有 1 个白球，包含这两次甲和乙都交换的黑球，以及第一次甲的白球和乙的黑球交换，第二次甲的黑球和乙的白球交换，再结合概率公式，即可求解。

【详解】若第 1 次交换后，甲的口袋有 3 个黑球，则甲第一次取到白球与乙交换，所以概率 $P = \frac{1}{3}$ ；

若第2次交换后，甲的口袋依然只有1个白球，包含2种情况，

第一种情况，这两次甲和乙都交换的黑球，概率为 $P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ，

第二种情况，第一次甲的白球和乙的黑球交换，第二次甲的黑球和乙的白球交换，概率

$$P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}，$$

所以第2次交换后，甲的口袋依然只有1个白球的概率 $P = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$ 。

故答案为： $\frac{1}{3}$ ； $\frac{5}{9}$

8. 投壶是中国古代士大夫宴饮时做的一种投掷游戏，游戏方式是把箭向壶里投。《醉翁亭记》中的“射”指的就是“投壶”这个游戏。为弘扬传统文化，某单位开展投壶游戏，现甲、乙两人为一组玩投壶游戏，每次由其中一人投壶，规则如下：若投中，则此人继续投壶，若未投中，则换为对方投壶，无论之前投壶的情况如何，甲每次投壶的命中率均为 $\frac{1}{3}$ ，乙每次投壶的命中率均为 $\frac{1}{2}$ ，由抽签确定第1次投壶的人选，第1次投壶的人是甲、乙的概率各为 $\frac{1}{2}$ 。第3次投壶的人是乙的概率为_____，已知在第2次投壶的人是甲的情况下，第1次投壶的人是乙的概率为_____。

【答案】 $\frac{41}{72}$ $\frac{3}{5}/0.6$

【分析】第3次投壶的人是乙的情况有：甲甲乙、甲乙乙、乙乙乙、乙甲乙，结合互斥事件概率求解即可。根据条件概率公式求解即可。

【详解】第3次投壶的人是乙的情况有：甲甲乙、甲乙乙、乙乙乙、乙甲乙，

所以第3次投壶的人是乙的概率为 $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{41}{72}$ 。

第2次投壶的人是甲的情况有：甲甲、乙甲，第1次投壶的人是乙的情况有：乙，

设“第2次投壶的人是甲”为事件 A ，设“第1次投壶的人是乙”为事件 B ，

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}。$$

故答案为： $\frac{41}{72}$ ； $\frac{3}{5}$ 。

9. 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动，每轮活动由甲、乙各猜一个成语，已知甲每轮猜对的概率为 $\frac{4}{5}$ ，乙每轮猜对的概率为 $\frac{3}{4}$ 。在每轮活动中，甲和乙猜对与否互不影响，各轮结

果也互不影响，则甲在两轮活动中恰好猜对一个成语的概率为_____；“星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率为_____.

【答案】 $\frac{8}{25}$ /0.32 $\frac{21}{50}$ /0.42

【分析】由相互独立事件的概率公式计算即得；分甲对 2 个乙对 1 个和甲对 1 个乙对 2 个两种情况，根据相互独立事件概率乘法公式分别计算，然后可得.

【详解】设 A_1, A_2 分别表示甲两轮猜对 1 个，2 个成语的事件， B_1, B_2 分别表示乙两轮猜对 1 个，2 个成语的事件，

$$\text{则有 } P(A_1) = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{8}{25}, P(A_2) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}, P(B_1) = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, P(B_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

设 A = “两轮活动‘星队’猜对 3 个成语”，则 $A = A_1B_2 \cup A_2B_1$ ，且 A_1B_2 与 A_2B_1 互斥， A_1 与 B_2 ， A_2 与 B_1 分别相互独立，

$$\text{所以 } P(A) = P(A_1B_2) + P(A_2B_1) = P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) = \frac{8}{25} \times \frac{9}{16} + \frac{16}{25} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{50}$$

因此，“星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率是 $\frac{21}{50}$.

故答案为： $\frac{8}{25}$ ； $\frac{21}{50}$

10. 甲、乙两个箱子中各装有 8 个球，其中甲箱中有 4 个红球，4 个白球，乙箱中有 6 个红球，2 个白球. A 同学从乙箱子中随机摸出 3 个球，则 3 个球颜色不全相同的概率是_____.
 B 同学掷一枚质地均匀的骰子，如果点数为 1 或 2，则从甲箱子中随机摸出 1 个球，如果点数为 3, 4, 5, 6，则从乙箱子中随机摸出 1 个球，那么 B 同学摸到红球的概率为_____.

【答案】 $\frac{9}{14}$ $\frac{2}{3}$

【分析】分析可知 3 个球颜色不全相同，则有 2 红 1 白或 1 红 2 白两种情况，根据古典概型分析求解；设相应事件，根据题意可知相应的概率，利用全概率公式运算求解.

【详解】若 A 同学从乙箱子中随机摸出 3 个球，则 3 个球颜色不全相同，则有 2 红 1 白或 1 红 2 白两种情况，

$$\text{所以 3 个球颜色不全相同的概率为 } P = \frac{C_6^1 \cdot C_2^2 + C_6^2 \cdot C_2^1}{C_8^3} = \frac{9}{14};$$

记“一枚质地均匀的骰子，点数为 1 或 2”为事件 M ，“ B 同学摸到红球”为事件 N ，

$$\text{则 } P(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(\bar{M}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(B|M) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(B|\bar{M}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } P(N) = P(B|M)P(M) + P(B|\bar{M})P(\bar{M}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{9}{14}$; $\frac{2}{3}$.

11. 随着我国经济发展越来越好, 外出旅游的人越来越多, 现有两位游客慕名来天津旅游, 他们分别从“天津之眼摩天轮、五大道风景区、古文化街、意式风情街、海河观光游船、盘山风景区”这 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩, 记事件 A 为“两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮”, 事件 B 为“两位游客选择的景点不同”, 则 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(B|A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{11}{36}$ $\frac{10}{11}$

【分析】根据古典概型概率公式求出 $P(A), P(AB)$, 再由条件概率公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 求解即可.

【详解】由题意, 两位游客从 6 个景点中随机选择 1 个景点游玩, 每人都有 6 种不同的选法, 故共有 $6 \times 6 = 36$ (种) 不同的选法.

两人都不选择天津之眼摩天轮的方法有 $5 \times 5 = 25$ (种),

故两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮的方法共有 $36 - 25 = 11$ (种),

所以故两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮的的概率 $P(A) = \frac{11}{36}$.

AB 表示两位游客中至少有一人选择天津之眼摩天轮, 且两位游客选择的景点不同, 即一人选择天津之眼摩天轮, 另一人选择其它景点, 共有 $A_2^1 A_5^1 = 10$ (种) 选法,

$$\text{故 } P(AB) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{11}{36}} = \frac{10}{11}.$$

故答案为: $\frac{11}{36}$; $\frac{10}{11}$.

12. 袋子中有 10 个大小相同的小球, 其中 7 个白球, 3 个黑球. 每次从袋子中随机摸出 1 个球, 摸出的球不再放回.

①在第一次摸到白球的条件下, 第二次摸到白球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

②两次都摸到白球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{15}$

【分析】设第1次摸到白球为事件 A ，第2次摸到白球为事件 B ，先求 $P(AB)$ 和 $P(A)$ ，然后根据条件概率公式来求 $P(B|A)$ ；先求第一次摸到白球的概率，再求第二次摸到白球的概率.

【详解】解：设第1次摸到白球为事件 A ，第2次摸到白球为事件 B ，由题意即求 $P(B|A)$ ，

$$\text{因为 } P(AB) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}, \quad P(A) = \frac{7}{10},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{10}} = \frac{2}{3},$$

即在第1次摸到白球的条件下，第2次摸到白球的概率 $\frac{2}{3}$.

因为摸出的球不放回，所以两次都摸到白球的概率为 $P = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$.

故答案为： $\frac{2}{3}$ ； $\frac{7}{15}$.

13. 甲、乙、丙三人射击的命中率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{3}$ ，现要求三人各射击一次，假设每人射击相互独立，则至少有一人命中的概率为_____；记三人命中总次数为 X ，则 $E(X)$ =_____.

【答案】 $\frac{8}{9}$ $\frac{3}{2}/1.5$

【分析】根据相互对立事件概率及相互独立事件的概率公式可求至少有一人命中的概率；先求出随机变量 X 的取值情况及相应的概率，然后结合期望公式即可求解.

【详解】由题意得，至少有一人命中的概率 $P = 1 - (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}$,

由题意得的可能取值为0,1,2,3

$$P(X=0) = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3}) = \frac{1}{9},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3}) + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{2}{3}) + \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = \frac{7}{18},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{3}) + \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}) \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{7}{18},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9},$$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{18} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{2}.$$

故答案为： $\frac{8}{9}$ ； $\frac{3}{2}$.

14. 某志愿者召开春季运动会,为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍,欲从 4 名男志愿者,3 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长,则在“抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率是_____;若用 X 表示抽取的三人中女志愿者的人数,则 $E(X)=$ _____.

【答案】 $\frac{2}{17}$ $\frac{9}{7}$

【分析】由条件概率公式计算在“抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率,由古典概型概率公式计算事件 $X=0,1,2,3$ 的概率,再由期望公式公式得结论.

【详解】由题意三人全是男志愿者,即事件 $X=0$, $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$, $P(X=1)=\frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,

$$P(X=2)=\frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}, \quad P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35},$$

$$E(X)=1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7},$$

再记全是男志愿者为事件 A , 至少有一名男志愿者为事件 B ,

$$P(A)=P(X=0)=\frac{4}{35}, \quad P(B)=1-P(X=3)=\frac{34}{35},$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{35}}{\frac{34}{35}}=\frac{2}{17}.$$

故答案为: $\frac{2}{17}$; $\frac{9}{7}$.

15. 某志愿者召开春季运动会,为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍,欲从 4 名男志愿者,3 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长,则在“抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的 3 人中全是男志愿者”的概率是_____;至少有一名是女志愿者的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{17}$ $\frac{31}{35}$

【分析】①利用条件概率公式即可求解;②“至少有一名是女志愿者”的对立事件是“全是男志愿者”,间接求解即可

【详解】解:记全是男志愿者为事件 A , 至少有一名男志愿者为事件 B , 则

$$P(AB) = P(A) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, P(B) = 1 - \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{34}{35},$$

$$\text{故 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{34}{35}} = \frac{2}{17},$$

记至少有一名是女志愿者为事件 C ，则事件 C 与事件 A 互为对立事件，则

$$P(C) = 1 - P(A) = \frac{31}{35},$$

故答案为: $\frac{2}{17}; \frac{31}{35}$.

16. 某校高三年级有男生 360 人，女生 240 人，对高三学生进行问卷调查，采用分层抽样的方法，从这 600 名学生中抽取 5 人进行问卷调查，再从这 5 名学生中随机抽取 3 人进行数据分析，则这 3 人中既有男生又有女生的概率是_____，记抽取的男生人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{9}{10}/0.9$ $\frac{9}{5}/1.8$

【分析】根据给定条件，利用古典概型计算概率；再利用超几何分布的期望公式计算作答.

【详解】由分层抽样知，抽取的 5 人中男生人数为 $\frac{360}{600} \times 5 = 3$ ，女生人数为 2，

所以从 5 人中再抽 3 人，既有男生又有女生的概率是 $P = \frac{C_5^3 - C_3^3}{C_5^3} = \frac{9}{10}$;

依题意，随机变量 X 服从超几何分布，其期望为 $E(X) = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$.

故答案为: $\frac{9}{10}; \frac{9}{5}$

17. 已知有黑、白两种除颜色外完全相同的若干小球，放入三个相同的空箱子中，已知三个箱子中小球的数量之比为 5:4:6，其中黑球占比分别为 40%,25%,50%. 若从三个箱子中各取一球，则取得的球均为黑球的概率为_____；若将三个箱子中的球全倒入一个箱子内，则从中取得一个白球的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{20}/0.05$ $\frac{3}{5}/0.6$

【分析】先根据题意求出各箱子中白球，黑球的数量，再根据概率的乘法公式可求出第一空；由古典概型的概率公式可求出第二个空.

【详解】设三个箱子中的球的个数分别为 $5n, 4n, 6n$ ，所以总数为 $15n$ ，
则第一个箱子中黑球个数为 $40\% \times 5n = 2n$ ，白球个数为 $3n$ ；

第二个箱子中黑球个数为 $25\% \times 4n = n$ ，白球个数为 $3n$ ；

第三个箱子中黑球个数为 $50\% \times 6n = 3n$ ，白球个数为 $3n$ ；

由古典概型的概率公式知，三个箱子中取到黑球的概率分别为 $\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ，

记“从三个箱子中各取一个球，取到的球都是黑球”为事件 A ，因为从三个箱子中取球相互独立，所以，

$$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}；$$

记“三个箱子中的球全倒入一个箱子内，则从中取得一个白球”为事件 B ，

黑球总共有 $2n + n + 3n = 6n$ 个，白球共有 $9n$ 个，

$$\text{所以由古典概型的概率公式从知， } P(B) = \frac{9n}{15n} = \frac{3}{5}.$$

故答案为：0.05；0.6.

18. 口袋中有 4 个黑球、3 个白球，2 个红球，从中任取 2 个球，每取到一个黑球记 0 分，每取到一个白球记 1 分，每取到一个红球记 2 分，用 ξ 表示得分，则 $P(\xi = 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{11}{36}$ $\frac{14}{9}$

【分析】“ $\xi = 2$ ”表示取出的 2 球为“1 黑 1 红”或“2 白”，利用组合计数原理结合古典概型的概率公式可求得 $P(\xi = 2)$ 的值；写出随机变量 ξ 的分布列，可求得 $E(\xi)$ 的值.

【详解】解：“ $\xi = 2$ ”表示取出的 2 球为“1 黑 1 红”或“2 白”，所以，

$$P(\xi = 2) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_3^2}{C_9^2} = \frac{11}{36}；$$

由题意可知，随机变量 ξ 的可能取值有 0、1、2、3、4，

$$\text{则 } P(\xi = 0) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \quad P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_9^2} = \frac{1}{3}, \quad P(\xi = 2) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_3^2}{C_9^2} = \frac{11}{36},$$

$$P(\xi = 3) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_9^2} = \frac{1}{6}, \quad P(\xi = 4) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}.$$

所以，随机变量 ξ 的分布列如下表所示：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

因此, $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{11}{36} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{14}{9}$.

故答案为: $\frac{11}{36}, \frac{14}{9}$.

19. 甲袋中有 3 个红球和 2 个白球, 乙袋中有 4 个红球和 1 个白球 (除颜色外, 球的大小、形状完全相同). 先从甲袋中随机取出 1 球放入乙袋, 再从乙袋中随机取出 1 球. 分别以 A_1 、 A_2 表示由甲袋取出的球是红球和白球的事件, 以 B 表示由乙袋取出的球是红球的事件, 则 $P(B|A_1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{6}$ $\frac{23}{30}$

【分析】利用古典概型的概率公式先求出 $P(A_1)$, $P(A_2)$, 即可得到 $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$, 再由全概率公式计算可得;

【详解】解: 依题意可得 $P(A_1) = \frac{3}{5}$, $P(A_2) = \frac{2}{5}$,

$$\therefore P(B|A_1) = \frac{5}{6}, \quad P(B|A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{23}{30}.$$

故答案为: $\frac{5}{6}; \frac{23}{30}$.

20. 甲、乙两名射手射中 10 环的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ (两人射中 10 环与否相互独立), 已知两人各射击 1 次. 两人都射中 10 环的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 两人命中 10 环的总次数为 X , 则随机变量 X 的期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$

【分析】两人都射中 10 环可以看作 2 个互斥事件乘积计算概率即可; 根据独立事件发生结果和对应 X 的概率, 求期望即可求解.

【详解】互斥事件同时发生: $P = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;

由题意可得 $X = 0, 1, 2$

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$E(x) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6};$$

故答案为: $\frac{1}{6}; \frac{5}{6};$

21. 对某实验项目进行测试, 测试方法: ①共进行 3 轮测试; ②每轮测试 2 次, 若至少合格 1 次, 则本轮通过, 否则不通过. 已知测试 1 次合格的概率为 $\frac{2}{3}$, 如果各次测试合格与否互不影响, 则在一轮测试中, 通过的概率为_____; 在 3 轮测试中, 通过的次数 X 的期望是_____.

【答案】 $\frac{8}{9}$ $\frac{8}{3}/2\frac{2}{3}$

【分析】根据给定条件利用独立事件概率的乘法公式求出两次都不合格的概率即可得通过的概率; 再利用二项分布的期望公式计算作答.

【详解】依题意, 一轮测试的 2 次都不合格的概率 $P_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, 所以在一轮测试中, 通过的概率为 $P = 1 - P_1 = \frac{8}{9}$;

在 3 轮测试中, 通过的次数 X 的所有可能值为: 0, 1, 2, 3,

一轮测试就是一次试验, 有通过与不通过两个结果, 因此, $X \sim B(3, \frac{8}{9})$, 则

$$E(X) = 3 \times \frac{8}{9} = \frac{8}{3},$$

所以通过的次数 X 的期望是 $\frac{8}{3}$.

故答案为: $\frac{8}{9}; \frac{8}{3}$

22. 在 2022 年北京冬奥会志愿者选拔期间, 来自北京某大学的 4 名男生和 2 名女生通过了志愿者的选拔. 从这 6 名志愿者中挑选 3 名负责滑雪项目的服务工作, 恰有两名男生的概率为_____; 若对入选的 2 名男生和 1 名女生进行滑雪项目相关知识的测试, 已知两名男生通过测试的概率均为 $\frac{2}{3}$, 女生通过测试的概率为 $\frac{3}{4}$, 且每人通过与否相互独立, 记这三人中通过测试的人数为 X , 则随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{3}{5}/0.6$ $\frac{25}{12}$

【分析】利用古典概型概率公式可得恰有两名男生的概率; 由题可得 X 可取的值, 然后利用独立事件概率公式求概率, 再利用期望公式即得.

【详解】由题可知从 6 名志愿者中挑选 3 名负责滑雪项目的服务工作共有 C_6^3 种结果, 其中

恰有两名男生的结果有 $C_4^2 C_2^1$,

∴从这 6 名志愿者中挑选 3 名负责滑雪项目的服务工作, 恰有两名男生的概率为 $P = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$;

由题可知 X 可取 0,1,2,3, 则

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{36},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + C_2^0 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{36},$$

$$P(X=2) = C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} + C_2^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{9},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{7}{36} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{25}{12}.$$

故答案为: $\frac{3}{5}; \frac{25}{12}$.

23. 某校元旦联欢晚会的最后一个环节是一个抽奖游戏, 主持人从编号为 1, 2, 3 的三个外观相同的空箱子中随机选择一个, 放入一件奖品, 再将三个箱子关闭, 也就是主持人知道奖品在哪个箱子里, 当抽奖人选择了某个箱子后, 在箱子打开之前, 主持人先随机打开了另一个没有奖品的箱子, 并问抽奖人是否愿意更改选择以便增加中奖概率. 现在已知甲选择了 1 号箱, 用 A_i 表示 i 号箱有奖品 ($i=1,2,3$), 用 B_i 表示主持人打开 i 号箱子 ($i=2,3$), 则

$P(B_3 | A_1) =$ _____, 若抽奖人更改了选择, 则其中奖概率为 _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ /0.5; $\frac{2}{3}$.

【分析】 根据条件概率的定义结合古典概型概率公式可求 $P(B_3 | A_1)$, 分奖品在 1 号箱, 奖品不在 1 号箱, 两种情况讨论, 结合独立事件的概率公式可得抽奖人更改了选择并中奖的概率.

【详解】 奖品在 1 号箱, 甲选择了 1 号箱, 主持人可从 2, 3 号箱中打开一个, 则

$$P(B_3 | A_1) = \frac{1}{2};$$

若奖品在 1 号箱, 其概率为 $\frac{1}{3}$, 抽奖人更改了选择, 则其选中奖品所在箱子的概率为 0;

若奖品不在 1 号箱，其概率为 $\frac{2}{3}$ ，主持人随机打开不含奖品的那个箱子，

若此时抽奖人更改选择，其选中奖品所在箱子的概率为 1.

所以若抽奖人更改选择，其中奖的概率为 $P = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$ ； $\frac{2}{3}$.

【点睛】关键点点睛：解答本题的关键是根据题意正确分“奖品在 1 号箱”和“奖品不在 1 号箱”两种情况分类讨论求解，使得问题更为清晰.

24. 有编号分别为 1, 2, 3, 4 的 4 个红球和 4 个黑球，从中取出 2 个，则取出的编号互不相同的概率为_____；在取出球的编号互不相同的条件下，2 号红球被取到的概率为_____.

【答案】 $\frac{6}{7}$ $\frac{1}{4}/0.25$

【分析】由已知可求出总的基本事件的个数，进而可根据“取出的编号相同”这一事件包含的基本事件个数，求出取出的编号互不相同的概率；然后得出“在取出球的编号互不相同的条件下，2 号红球被取到”这一事件，包含的基本事件个数，根据条件概率计算公式即可得出答案.

【详解】由已知可得，从中取出 2 个，总的基本事件的个数为 $n(\Omega) = C_8^2 = 28$.

记“取出的编号互不相同”为事件 A ，

则 $\bar{A}$ 表示“取出的编号相同”，包括 4 个基本事件，

所以，事件 A 包含的基本事件的个数为 $28 - 4 = 24$ ，

所以，取出的编号互不相同的概率为 $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$.

记“2 号红球被取到”为事件 B ，则 AB 表示“取出球的编号互不相同，且 2 号红球被取到”，事件 AB 包括的基本事件有 6 个，

所以，在取出球的编号互不相同的条件下，2 号红球被取到的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

故答案为： $\frac{6}{7}$ ； $\frac{1}{4}$.

25. 现有 10 道题，其中 6 道甲类题，4 道乙类题，张同学从中任取 3 道题解答. 张同学至少取到 1 道乙类题的概率为_____；已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题，1 道乙类题. 已知张同学答

对每道甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立.用 X 表示张同学答对题的个数，则 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{5}{6}$ 2

【分析】利用组合计数原理、古典概型概率公式以及对立事件的概率公式可求得事件“张同学至少取到1道乙类题”的概率；分析可知随机变量 X 的可能取值有 0、1、2、3，求出随机变量 X 在不同取值下的概率，可求得 $E(X)$ 的值.

【详解】记事件 A : 张同学从10道题中任取3道题解答，至少取到1道乙类题，

$$\text{则 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{6},$$

由题意可知，随机变量 X 的可能取值有 0、1、2、3，

$$\text{则 } P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{125}, \quad P(X=1) = C_2^1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{125},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + C_2^1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{125}, \quad P(X=3) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{125},$$

$$\text{所以, } E(X) = 0 \times \frac{4}{125} + 1 \times \frac{28}{125} + 2 \times \frac{57}{125} + 3 \times \frac{36}{125} = 2.$$

故答案为: $\frac{5}{6}$; 2.

26. 设甲、乙两位同学上学期间，每天 7:30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立. 用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数，则随机变量 X 的数学期望为_____；设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2”，则事件 M 发生的概率为_____.

【答案】 2 $\frac{20}{243}$

【分析】由题设知 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$ ，根据二项分布的期望公式求期望，应用独立事件乘法公式及互斥事件的加法公式求 M 为事件的概率.

【详解】由题意知: $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ，且服从 $X \sim B(3, \frac{2}{3})$ ，

$$\therefore E(X) = np = 3 \times \frac{2}{3} = 2.$$

甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2 的基本事件有{甲

3 天乙 1 天, 甲 2 天乙 0 天}, 又 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{27}$, $P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^1=\frac{6}{27}$,

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{12}{27}$, $P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$,

$\therefore P=\frac{8}{27}\times\frac{6}{27}+\frac{12}{27}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}$.

故答案为: 2, $\frac{20}{243}$.

【点睛】关键点点睛: 由题设确定 X 服从 $B(3, \frac{2}{3})$ 的二项分布, 进而求期望, 求 X 各可能值的概率, 结合独立事件乘法公式及互斥事件的加法公式求概率.

27. 甲、乙、丙三人投篮的命中率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, 现要求三人各投篮一次. 假设每人投篮相互独立, 则至少有一人命中的概率为_____; 记三人命中总次数为 X , 则 $E(X)=$ _____.

【答案】 $\frac{23}{24}$; $\frac{23}{12}$

【分析】根据相互对立事件概率及相互独立事件的概率公式可求至少有一人命中的概率; 先求出随机变量 X 的取值情况及相应的概率, 然后结合期望公式可求.

【详解】解: 由题意得, 至少有一人命中的概率 $P=1-(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{3}{4})=\frac{23}{24}$,

由题意得 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$,

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$,

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,

$E(X)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{1}{4}=\frac{23}{12}$.

故答案为: $\frac{23}{24}$, $\frac{23}{12}$.

28. 某电视台招聘节目主持人, 应聘者需进行笔试和面试两个环节, 若两个环节都合格, 则可以成为该电视台的节目主持人. 已知甲、乙、丙三人同时参加应聘, 三人笔试合格的概率依次为 0.5, 0.4, 0.6, 面试合格的概率依次为 0.6, 0.75, 0.5, 且每个人在两个环节中是否合格互不影响, 甲、乙、丙也互不影响, 则甲、乙、丙三人在笔试中恰有一人合格的概率为_____; 记甲、乙、丙三人在本次应聘中成为电视台的节目主持人的人数为 X , 则随机

变量 X 的期望为_____.

【答案】 $0.38/\frac{19}{50}$ $\frac{9}{10}/0.9$

【分析】根据相互独立事件、互斥事件的概率公式求出甲、乙、丙三人在笔试中恰有一人合格的概率，首先求出甲、乙、丙三人成为主持人的概率，即可得到 $X \sim B\left(3, \frac{3}{10}\right)$ ，根据二项分布的期望公式计算可得；

【详解】解：甲、乙、丙三人在笔试中恰有一人合格的概率

$$P = 0.5 \times (1 - 0.4) \times (1 - 0.6) + (1 - 0.5) \times 0.4 \times (1 - 0.6) + (1 - 0.5) \times (1 - 0.4) \times 0.6 = 0.38,$$

依题意甲成为主持人的概率 $P_1 = 0.5 \times 0.6 = \frac{3}{10}$,

乙成为主持人的概率 $P_2 = 0.4 \times 0.75 = \frac{3}{10}$,

丙成为主持人的概率 $P_3 = 0.5 \times 0.6 = \frac{3}{10}$,

即甲、乙、丙三人在本次应聘中成为电视台的节目主持人的概率均为 $\frac{3}{10}$,

所以 $X \sim B\left(3, \frac{3}{10}\right)$, 则 $E(X) = 3 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

故答案为: $0.38; \frac{9}{10}$

29. 一个盒子里有 5 个相同的球, 其中 2 个红球, 2 个黄球, 1 个绿球, 每次从盒中随机取出一个且不放回, 则红球首先被全部取完的概率为_____; 若红球全部被取出视为取球结束, 记在此过程中取到黄球的个数为 ξ , 则 $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{30}$ $\frac{4}{3}$

【分析】由题可知红球首先被全部取完分两种情况, 红球 2 次取完或红球 3 次取完, 结合古典概型概率公式即得; 由题可知 ξ 可能的取值为 0, 1, 2, 然后分别求概率, 再利用数学期望公式即得.

【详解】由题可知红球 2 次取完的概率为 $\frac{A_2^2}{A_5^2} = \frac{1}{10}$,

红球 3 次取完(前 2 次中有 1 次取到黄球)的概率为 $\frac{C_2^1 C_2^1 A_2^2}{A_5^3} = \frac{2}{15}$,

所以红球先取完的概率为 $\frac{1}{10} + \frac{2}{15} = \frac{7}{30}$;

由题可知 ξ 可能的取值为 0, 1, 2, 则

$$P(\xi=0)=\frac{A_2^2}{A_5^2}+\frac{C_2^1 A_2^2}{A_5^3}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6},$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_2^1 C_2^1 A_2^2}{A_5^3}+\frac{C_2^1 C_2^1 A_3^3}{A_5^4}=\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^1 A_3^3}{A_5^4}+\frac{C_2^1 A_4^4}{A_5^5}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } E(\xi)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}.$$

故答案为: $\frac{7}{30}$; $\frac{4}{3}$.

30. 一个口袋里有形状一样仅颜色不同的 5 个小球, 其中白色球 3 个, 黑色球 2 个. 若从中任取 1 个球, 每次取球后都放回袋中, 则事件“连续取球 3 次, 恰好取到两次白球”的概率为 _____; 若从中任取 2 个球, 记所取球中白球可能被取到的个数为 ξ , 则随机变量 ξ 的期望为 _____.

【答案】 $\frac{54}{125}$ $\frac{6}{5}$ /1.2

【分析】应用古典概型的概率求法求概率, 写出 ξ 的可能值并求出对应概率, 进而求随机变量的期望.

【详解】“连续取球 3 次, 恰好取到两次白球”的概率 $P=\frac{C_2^1 C_3^1 C_3^1 + C_3^1 C_2^1 C_3^1 + C_3^1 C_3^1 C_2^1}{C_5^1 C_5^1 C_5^1}=\frac{54}{125},$

由题意, ξ 的可能值为 0, 1, 2, 则 $P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}, P(\xi=1)=\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}, P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}.$

故答案为: $\frac{54}{125}, \frac{6}{5}.$