

概率

一、填空题

1. 袋中有 2 个不同的红球和 3 个不同的白球，每次取 1 个球，若取出红球，则不放回袋中；若取出白球，则放回袋中.连续取 3 次球,袋中还有 2 个红球的概率为_____；若袋中还有 1 个红球，则第 2 次取出红球的概率为_____.

【答案】 $\frac{27}{125}$ $\frac{20}{61}$

【知识点】计算条件概率、独立事件的乘法公式、互斥事件的概率加法公式、利用全概率公式求概率

【分析】先设事件，再应用独立事件概率乘积公式得出 $P(D)$ ，再应用概率乘法公式及互斥事件概率和公式得出 $P(C) = \frac{549}{1000}$ ，最后应用条件概率公式计算求解.

【详解】记“第 i 次取出白球为事件 A_i ”，“第 i 次取出红球为事件 B_i ”，“连续取球 3 次，袋中还有 2 个红球为事件 D ”，“连续取球 3 次，袋中还有 1 个红球为事件 C ”，事件 D 的发生，意味着三次取球中三次取到白球，

$$P(D) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125};$$

事件 C 的发生，意味着三次取球中有且仅有一次取到红球，该次可能是第一次、第二次或第三次，这三种情况互斥，

$$\text{则 } P(C) = P(B_1C) + P(B_2C) + P(B_3C),$$

$$\text{因为 } P(B_1C) = P(B_1A_2A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{40},$$

$$P(B_2C) = P(A_1B_2A_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{50},$$

$$P(B_3C) = P(A_1A_2B_3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{18}{125},$$

$$\text{所以 } P(C) = \frac{9}{40} + \frac{9}{50} + \frac{18}{125} = \frac{549}{1000},$$

$$\text{所以 } P(B_2|C) = \frac{P(B_2C)}{P(C)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{549}{1000}} = \frac{20}{61}.$$

2. 某校发起“AI 赋能乡村教育”公益项目，项目团队下设技术研发组 5 人、课程设计组 3 人.

为推进乡村高中智能教学设备落地，需从两个组中随机抽取 2 人组成执行小组.抽取的 2 人中恰好有 1 名课程设计组人员的概率为_____；已知抽取的 2 人中至少有 1 名课程设计组人员，其中恰好有 1 名课程设计组人员的概率为_____.

【答案】 $\frac{15}{28}$ $\frac{5}{6}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、实际问题中的组合计数问题

【分析】利用组合公式和条件概率公式进行计算.

【详解】从 $5+3=8$ 人中随机抽取 2 人的总组合数为 $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$ 种，

从 3 名课程设计组成员中选 1 人，有 $C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3}{1} = 3$ 种选法

，从 5 名技术研发组成员中选 1 人，有 $C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5}{1} = 5$ 种选法，

所以根据分步乘法原理可得，恰好有 1 名课程设计组成员的选法共有 $C_3^1 \times C_5^1 = 3 \times 5 = 15$ 种，

根据古典概率公式可得：抽取的 2 人中，恰好有 1 名课程设计组成员的概率为 $\frac{15}{28}$ ，

从 5 名技术研发组成员中选 2 人的组合数为 $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 种，

所以没有课程设计组成员的概率为 $\frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28}$ ，

则至少有 1 名课程设计组成员的概率为 $1 - \frac{10}{28} = \frac{18}{28}$ ，

设事件 A 为“抽取的 2 人中恰好有 1 名课程设计组成员”，事件 B 为“抽取的 2 人中至少有 1 名课程设计组成员”，则所求概率为 $P(A|B)$ ，

根据条件概率公式可得： $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ ，

又因为 $A \subseteq B$ ，所以 $P(AB) = P(A) = \frac{15}{28}$ ，

则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{28}}{\frac{18}{28}} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$ 。

故答案为： $\frac{15}{28}$ ； $\frac{5}{6}$

3. 袋内有大小相同的 4 个红球和 3 个白球，从中任取 3 个球；至少有 1 个是白球的概率为_____；在“抽取的 3 个球中至少有 1 个红球”的前提下“抽取的 3 个球中全是红球”的概率是_____.

【答案】 $\frac{31}{35}$ $\frac{2}{17}$

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】利用对立事件概率的性质以及条件概率公式直接求解即可.

【详解】记事件 A 为“全是红球”，则 $P(A) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$,

记事件 B 为“至少有 1 个是白球”，则 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$,

记事件 C 为“至少有 1 个红球”，则 $P(C) = 1 - \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{34}{35}$

则事件 AC 为“全是红球”，则 $P(AC) = P(A) = \frac{4}{35}$

所以“抽取的 3 个球中至少有 1 个红球”的前提下“抽取的 3 个球中全是红球”的概率是

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{34}{35}} = \frac{2}{17}.$$

故答案为: $\frac{31}{35}$; $\frac{2}{17}$.

4. 一个盒子装有 8 个除颜色及等级外完全相同的乒乓球, 其中白球有 4 个一星“☆”, 2 个二星“☆☆”; 黄球有 1 个一星“☆”, 1 个二星“☆☆”. 每次从盒子中随机摸出 1 个球, 摸出的球不再放回. 若摸出白球即停止, 则摸出的球中没有二星球的概率为_____ ; 若连续摸两次, 在第 1 次摸出白球的条件下, 第 2 次摸出二星球的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{8}{21}$

【知识点】计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】利用互斥事件的概率可求第一空答案, 利用条件概率的公式可求第二空的答案.

【详解】设事件 A = “摸出的球中没有二星球”, 则事件 A 包含两个互斥事件: 第一次摸出了白色一星球, 第一次摸出了黄色一星球同时第二次摸出了白色一星球,

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_8^1} + \frac{C_1^1}{C_8^1} \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{4}{7}.$$

设事件 B = “第 1 次摸出白球”, 事件 C = “第 2 次摸出二星球”,

$$P(B) = \frac{C_6^1}{C_8^1} = \frac{3}{4}, \quad P(BC) = \frac{C_4^1}{C_8^1} \times \frac{C_3^1}{C_7^1} + \frac{C_2^1}{C_8^1} \times \frac{C_2^1}{C_7^1} = \frac{3}{14} + \frac{1}{14} = \frac{2}{7},$$

$$\text{所以 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{21}.$$

故答案为: $\frac{4}{7}$ $\frac{8}{21}$

5. 在一个抽奖游戏中, 主持人从编号为 1, 2, 3, 4 的四个外观相同的空箱子中随机选择一个放入奖品, 即主持人知道奖品在哪个箱子里, 当抽奖人选择了某个箱子后, 主持人先随机打开不同于被选择的另一个没有奖品的箱子, 并问抽奖人是否愿意更改选择. 用 A_i 表示 i 号箱有奖品 ($i=1,2,3,4$), 用 B_i 表示主持人打开 i 号箱子 ($i=1,2,3,4$), 现在已知抽奖人选择了 1 号箱, 则 $P(B_3|A_2) = \underline{\hspace{2cm}}$; $P(B_3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}/0.5$ $\frac{1}{3}$

【知识点】 计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】 由题意结合条件概率定义即可分析求解 $P(B_3|A_2)$, 依次求出

$P(B_3|A_1), P(B_3|A_3), P(B_3|A_4)$, 再由全概率公式即可求解 $P(B_3)$.

【详解】 抽奖人选择了 1 号箱, 则由题意在 2 号箱有奖品条件下主持人选择打开 3 号箱或 4 号箱, 故可得 $P(B_3|A_2) = \frac{1}{2}$;

同理可求得 $P(B_3|A_1) = \frac{1}{3}, P(B_3|A_3) = 0, P(B_3|A_4) = \frac{1}{2}$,

所以由全概率公式可得

$$P(B_3) = P(A_1)P(B_3|A_1) + P(A_2)P(B_3|A_2) + P(A_3)P(B_3|A_3) + P(A_4)P(B_3|A_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$.

6. 甲、乙、丙、丁四位同学到 A, B, C, D 四个大学的实验室参观, 每人只去一个大学, 设事件 M 为“4 个人去的大学各不相同”, 事件 N 为“只有甲去了 A 大学”, 则 $P(M) = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $P(M|N) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{32}$ $\frac{2}{9}$

【知识点】 分步乘法计数原理及简单应用、计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】 先根据乘法原理得每人只去一个大学共有 $4^4 = 256$ 种不同情况, 再分别讨论事件

M, N, MN 的不同情况, 最后根据古典概率模型与条件概率公式求解对应概率即可.

【详解】甲、乙、丙、丁四位同学到 A, B, C, D 四个大学的实验室参观,

每人只去一个大学, 共有 $4^4 = 256$ 种不同情况;

事件 M 为“4 个人去的大学各不相同”, 共有 $A_4^4 = 24$ 种不同情况,

事件 N 为“只有甲去了 A 大学”, 共有 $3^3 = 27$ 种不同情况,

事件 MN 为“甲去了 A 大学且 4 个人去的大学各不相同”, 共有 $A_3^3 = 6$ 种不同情况,

$$\text{所以 } P(M) = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}, \quad P(N) = \frac{27}{256}, \quad P(MN) = \frac{6}{256},$$

$$\text{所以 } P(M|N) = \frac{P(MN)}{P(N)} = \frac{\frac{6}{256}}{\frac{27}{256}} = \frac{2}{9}.$$

故答案为: $\frac{3}{32}; \frac{2}{9}$

7. 甲、乙两名同学参加一场乒乓球比赛, 比赛共五局 (无平局), 先赢三局者取得比赛最终胜利. 已知第一局乙同学获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 且对于每一局, 若乙同学在本局中获胜, 则他在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$; 若乙同学在本局中未获胜, 则他在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 甲同学第二局比赛获胜的概率为 _____; 在比赛三局即结束的条件下, 乙同学取得比赛最终胜利的概率为 _____.

【答案】 $\frac{5}{9}$ $\frac{1}{3}$

【知识点】计算条件概率、独立事件的乘法公式、互斥事件的概率加法公式、利用全概率公式求概率

【分析】根据全概率公式及独立事件的概率乘法公式, 分类讨论甲第二局获胜的不同情况, 求得甲第二局获胜的概率; 再根据条件概率公式, 求出各事件的概率, 根据公式求出条件概率.

【详解】第一局乙同学获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 则第一局甲同学获胜的概率为 $\frac{2}{3}$

对于每一局, 若乙同学在本局中获胜, 则他在下一局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 即甲同学在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$,

若乙同学在本局中未获胜, 则他在下一局获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 即甲同学在下一局获胜的概率为

$$\frac{2}{3}.$$

故甲同学第二局比赛获胜的概率 $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

比赛三局即结束，则甲连胜三局或乙连胜三局，

设事件 A 为“比赛进行三局即结束”，事件 B 为“乙取得比赛最终胜利”

$$\text{则 } P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \quad P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27},$$

$$\text{故 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{9}; \frac{1}{3}.$$

8. 某小学五年级有两个班，其中甲班科技课外兴趣小组有 6 人（4 男 2 女），乙班科技课外兴趣小组有 6 人（3 男 3 女），学校准备从五年级科技课外兴趣小组中随机挑选 2 个学生参加全市科技竞赛. 已知其中一个是男生的条件下，则另一个也是男生的概率_____；若通过平时训练发现，如果两个参赛选手来自同一个班，默契程度会高一些，学校决定，先等可能地从两个班中随机选择一个班，再从该班中随机挑选两个同学参赛，则两个都是男生的概率_____.

【答案】  $\frac{3}{8}/0.375$  $\frac{3}{10}/0.3$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】第一空给出具体事件，根据条件概率公式求解即可；第二空根据全概率公式求解.

【详解】从五年级科技课外兴趣小组的 12 人中随机挑选 2 个学生，记“其中一个是男生”为事件 A_1 ，“另一个也是男生”为事件 A_2 ，

由题意知 12 人中有 7 男 5 女，

$$\text{则 } P(A_2|A_1) = \frac{n(A_1A_2)}{n(A_1)} = \frac{C_7^2}{C_{12}^2 - C_5^2} = \frac{21}{66-10} = \frac{3}{8}.$$

先等可能地从两个班中随机选择一个班，再从该班中随机挑选两名同学参赛，记“从甲班中选两个同学”为事件 B_1 ，“从乙班中选两个同学”为事件 B_2 ，“两个都是男生”为事件 C ，

因为等可能地从两个班中随机选择一个班，所以 $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ ，

又 $B_1 \cup B_2 = \Omega$ ，

所以 $P(C) = P(B_1)P(C|B_1) + P(B_2)P(C|B_2)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{C_4^2}{C_6^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{3}{10}.$$

故答案为: $\frac{3}{8}; \frac{3}{10}$.

9. 有编号分别为 1, 2, 3, 4 的 4 个红球和 4 个黑球, 从中取出 2 个, 则取出的球同色的所有可能的结果有_____种; (用数字作答) 若从中取出的球编号互不相同的概率为_____;

【答案】 12 $\frac{6}{7}$

【知识点】实际问题中的组合计数问题、计算古典概型问题的概率

【分析】根据“取出的球同色”包含取出 2 个红球或取出 2 个黑球两种情况求解第一空; 对于第二空, 先讨论取出的编号相同的情况, 再根据总结果数计算编号互不相同的结果数, 进而根据古典概型计算概率即可.

【详解】由题知“取出的球同色”包含两种情况: 取出 2 个红球或取出 2 个黑球,

所以有 $C_4^2 + C_4^2 = 6 + 6 = 12$ 种结果;

从 8 个球 (4 红 4 黑) 中任意取 2 个, 总结果数为 $C_8^2 = 28$ 种,

其中, 取出“编号相同的 2 个球”即 (红 1 黑 1)、(红 2 黑 2)、(红 3 黑 3)、(红 4 黑 4), 共 4 种,

所以编号互不相同的结果数: $28 - 4 = 24$ 种,

所以若从中取出的球编号互不相同的概率为 $P = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$.

故答案为: 12; $\frac{6}{7}$.

10. 甲乙两人射击一架进入禁飞区的无人机. 已知甲乙两人击中无人机的概率分别为 0.5, 0.4, 且甲乙射击互不影响, 则无人机被至少一人击中的概率为_____. 若无人机恰好被一人击中, 则被击落的概率为 0.2; 若恰好被两人击中, 则被击落的概率为 0.6, 那么无人机被击落的概率为_____.

【答案】 0.7 0.22

【知识点】利用全概率公式求概率、利用对立事件的概率公式求概率

【分析】根据对立事件的概率公式和全概率公式求解即可.

【详解】根据题意, 设甲击中无人机为事件 A , 乙击中无人机为事件 B , 无人机被击中为事件 C , 无人机被击落为事件 D ,

C 的对立事件为无人机没有被击中, 即事件 $\bar{A}\bar{B}$, 其概率 $P(\bar{A}\bar{B}) = (1-0.5)(1-0.4) = 0.3$,

则无人机被击中的概率 $P(C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - 0.3 = 0.7$.

若无人机恰好被一人击中, 记为事件 $M = A\bar{B} + \bar{A}B$, 其概率

$$P(M) = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = (1-0.5) \times 0.4 + 0.5 \times (1-0.4) = 0.5.$$

若无人机恰好被两人击中, 记为事件 $N = AB$, 该概率

$$P(N) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2.$$

$$P(D) = P(M)P(D|M) + P(N)P(D|N) = 0.5 \times 0.2 + 0.2 \times 0.6 = 0.22.$$

故答案为: 0.7; 0.22

11. 甲和乙两个箱子中各装有 10 个球, 其中甲箱有 5 个红球、5 个白球, 乙箱中有 4 个红球、6 个白球. 先从甲箱中随机摸出 1 个球放入乙箱中, 再从乙箱中随机摸出 1 个球, 则摸到红球的概率为_____; 若从甲箱中随机摸出 3 个球, 用 X 表示摸出红球的个数, 则随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{9}{22}$ $\frac{3}{2}$

【知识点】超几何分布的均值、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率

【分析】先运用全概率公式求摸到红球的概率, 再利用超几何分布的期望公式求随机变量 X 的数学期望即可.

【详解】①若先从甲箱摸出的是红球, 其概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

放入乙箱后, 乙箱有 $4+1=5$ 个红球, 6 个白球 (共 11 个球),

此时再从乙箱摸出红球的概率为 $\frac{5}{11}$;

若从甲箱摸出的是白球, 其概率为 $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,

放入乙箱后, 乙箱有 4 个红球, $6+1=7$ 个白球 (共 11 个球),

此时从乙箱摸出红球的概率为 $\frac{4}{11}$.

由全概率公式, 可得概率为: $\frac{1}{2} \times \frac{5}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{9}{22}$;

② X 服从超几何分布 (超几何分布的期望公式为 $E(X) = n \times \frac{M}{N}$,

其中 $n=3$ 是抽取数, $M=5$ 是总体红球数, $N=10$ 是总体球数),

所以： $E(X) = 3 \times \frac{5}{10} = \frac{3}{2}$.

故答案： $\frac{9}{22}$ ； $\frac{3}{2}$.

12. 一质点从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发，每次随机沿一条边运动至另一个顶点时终止，则质点 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的条件下，第 4 次回到顶点 A 的概率 $P =$ _____，记质点 4 次运动过程中经过顶点 B 的次数是 X ，则 $E(X) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{7}$ $\frac{23}{16}$

【知识点】 计算古典概型问题的概率、求离散型随机变量的均值、计算条件概率

【分析】 列举 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的情况，再由古典概率公式即可求解； 记质点 4 次运动过程中经过顶点 B 的次数是 X ， X 的所有可能取值为 0,1,2，分别求得相应概率，列出分布列，再求期望，即可求解.

【详解】 因为质点 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的情况有： $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$ ，
 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ，
 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$ ， $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ ， 共 7 种，
 第四次回到顶点 A 有 3 种，所以质点 4 次运动过程中仅 1 次经过顶点 B 的条件下，第 4 次回到
 顶点 A 的概率 $P = \frac{3}{7}$.

记质点 4 次运动过程中经过顶点 B 的次数是 X ， X 的所有可能取值为 0,1,2，

质点 4 次运动，共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 种情况，

当 $X=0$ 时， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$ ， 共有 1 种情况，则 $P(X=0) = \frac{1}{16}$ ，

当 $X=1$ 时， $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A$ ， $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$ ，

$A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ，

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$ ， $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ， $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$ ， 共有 7 种情况，

所以 $P(X=1) = \frac{7}{16}$ ， 又 $P(X=2) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{2}$ ，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{23}{16}$ ，

故答案为: $\frac{3}{7}, \frac{23}{16}$.

13. 抛掷两枚质地均匀的骰子 (标记为 I 号和 II 号), 观察两枚骰子朝上面的点数. 记事件 A = “两个点数不相同”, 事件 B = “两个点数都没有出现 5 点”, 则 $P(B|A)$ = ____; 设 X 表示两个点数中奇数的个数, 则随机变量 X 的数学期望为 ____.

【答案】 $\frac{2}{3}$ 1

【知识点】 计算古典概型问题的概率、求离散型随机变量的均值、计算条件概率

【分析】 ①判断出符合古典概型, 列出样本空间, 找到满足事件 A , AB 的样本点, 根据条件概率公式求出 $P(B|A)$; ②列出 X 取值, 求出相应的概率, 得到随机变量 X 的分布列, 根据分布列求得其数学期望.

【详解】 记 I 号骰子朝上面的点数为 a , 记 II 号骰子朝上面的点数为 b , 则样本空间 $\Omega = \{(a, b) | a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ 共有 36 个样本点, 各样本点出现的可能性相同, 此试验为古典概型.

记事件 A = “两个点数不相同”, 则事件 $\bar{A}$ = “两个点数相同”, 事件

$\bar{A} = \{(a, a) | a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ 共有 6 个样本点, 所以事件 A 包含 30 个样本点.

因为事件 B = “两个点数都没有出现 5 点”, 所以事件 AB = “两个点数不相同, 且都没有出现 5 点”, 即事件 $AB = \{(a, b) | a \neq b, a, b \in \{1, 2, 3, 4, 6\}\}$ 共 20 个样本点.

$$\text{所以, } P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

由题可知, X 的取值为 0, 1, 2.

因为每枚骰子向上的点数中有 3 个奇数, 3 个偶数,

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_3^1 C_3^1}{36} = \frac{1}{4}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_3^1}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^1 C_3^1}{36} = \frac{1}{4}.$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.$$

所以随机变量 X 的数学期望为1.

故答案为: $\frac{2}{3}, 1$

14. 某志愿者组织召开春季运动会, 为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍, 欲从4名男志愿者和3名女志愿者中随机抽取3人聘为志愿者队的队长, 则①抽取的3人中至少有一名是女志愿者的概率为_____; ②在“抽取的3人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的3人中全是男志愿者”的概率是_____.

【答案】 $\frac{31}{35}$ $\frac{2}{17}$

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、计算条件概率

【分析】本题包含两个概率计算问题, 均需利用组合数及概率相关知识求解, 第一个问题通过对立事件间接计算至少有一名女志愿者的概率; 第二个问题利用条件概率公式, 在给定前提条件下特定事件的概率.

【详解】记全是男志愿者为事件 A , 至少有一名男志愿者为事件 B , 则

$$P(AB) = P(A) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, \quad P(B) = 1 - \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{34}{35}.$$

记至少有一名是女志愿者为事件 C , 则事件 C 与事件 A 互为对立事件,

$$\text{则 } P(C) = 1 - P(A) = \frac{31}{35},$$

抽取的3人中至少有一名男志愿者”的前提下“抽取的3人中全是男志愿者”的概率为

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{35}}{\frac{34}{35}} = \frac{2}{17}.$$

故答案为: $\frac{31}{35}; \frac{2}{17}$.

15. 甲、乙、丙3人练习投篮, 投进的概率分别是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$, 若3人各投1次, 则3人都没投进的概率为_____; 若 X 表示丙投篮3次的进球数, 则随机变量 X 的数学期望为_____.

【答案】 $\frac{2}{15}$ $\frac{9}{5}/1.8$

【知识点】利用对立事件的概率公式求概率、二项分布的均值、独立事件的乘法公式

【分析】先综合利用独立事件的概率公式与对立事件的概率公式求3人都没投进的概率, 再判断随机变量 X 服从二项分布, 直接利用二项分布的期望公式求解即可.

【详解】记事件“甲投篮1次投进”为 A_1 ，事件“乙投篮1次投进”为 A_2 ，事件“丙投篮1次投进”为 A_3 ，事件“3人都没有投进”为 A 。

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{1}{3}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{3}{5},$$

$$P(A) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15},$$

所以3人都没有投进的概率为 $\frac{2}{15}$ 。

随机变量 X 的可能值有0,1,2,3，且 $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$ ，

$$\text{所以 } E(X) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

故答案为： $\frac{2}{15}$ ； $\frac{9}{5}$

16. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品，制作过程必须先后经过两次烧制，当第一次烧制合格后方可进入第二次烧制，再次烧制过程相互独立.根据该厂现有的技术水平，经过第一次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为0.5、0.6、0.4，经过第二次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为0.6、0.5、0.75；则第一次烧制后恰有一件产品合格的概率为_____；经过前后两次烧制后，合格工艺品的件数为 X ，则随机变量 X 的期望为_____。

【答案】 0.38 0.9

【知识点】独立事件的乘法公式、二项分布的均值、互斥事件的概率加法公式

【分析】分为只有甲合格，只有乙合格，只有丙合格，3种情况，根据相互独立事件的概率乘法公式分别求出3种情况的概率，相加即可求得第一次烧制后恰有一件产品合格的概率；根据已知可求得每件工艺品经过两次烧制后合格的概率均为 $p = 0.3$ ，因为概率相同，可以把它们看成3次重复试验发生 k 次的概率，然后根据二项分布期望公式直接求解。

【详解】分别记甲、乙、丙经第一次烧制后合格为事件 A_1, A_2, A_3 ，

设表示第一次烧制后恰好有一件合格，

$$\text{则 } P(M) = P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3)$$

$$= 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 = 0.38;$$

经过前后两次烧制后，甲合格的概率为 $0.5 \times 0.6 = 0.3$ ，乙合格的概率为 $0.6 \times 0.5 = 0.3$ ，丙合格的概率为 $0.4 \times 0.75 = 0.3$ ，

则每件工艺品经过两次烧制后合格的概率均为，

所以 $X \sim B(3, 0.3)$ ，所以 $EX = np = 3 \times 0.3 = 0.9$ 。

故答案为：0.38；0.9。

17. 某学习小组有男生 4 人，女生 3 人，现需从中抽取 2 人参加学校开展的 AI 人工智能学习，则恰有一名男生参加的概率为_____；在有女生参加学习的条件下，恰有一名女生参加 AI 人工智能学习的概率为_____。

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{5}/0.8$

【知识点】计算古典概型问题的概率、实际问题中的组合计数问题、求超几何分布的概率、计算条件概率

【分析】利用超几何概型的概率、古典概型求法及组合数求概率即可。

【详解】由题设，恰有一名男生参加的概率为 $P_1 = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ ，

有女生参加学习的条件下，恰有一名女生参加的概率为 $P_2 = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_4^1 C_3^1 + C_3^2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。

故答案为： $\frac{4}{7}$ ， $\frac{4}{5}$

18. 某公园有甲、乙两个相邻景点，原拟定甲景点内有 2 个 A 班同学和 2 个 B 班同学；乙景点内有 2 个 A 班同学和 3 个 B 班同学，后由于某种原因，甲、乙两个景点各有一个同学交换景点观光，则甲景点恰有 2 个 A 班同学的概率为_____；甲景点 A 班同学数 X 的数学期望为_____。

【答案】 $\frac{1}{2}$ $\frac{19}{10}$

【知识点】求离散型随机变量的均值、写出简单离散型随机变量分布列、计算古典概型问题的概率

【分析】（1）根据题意，甲景点恰有 2 个 A 班同学有两种情况，互换的是 A 班同学或互换的是 B 班同学，利用组合及古典概型求出概率即可；（2）由题知 X 的取值可能为 1, 2, 3，利用组合及古典概型求出概率，根据公式得到期望。

【详解】（1）甲、乙两景点各有一个同学交换后，甲景点恰有 2 个 A 班同学有两种情况：互换的是 A 班同学，此时甲景点恰有 2 个 A 班同学的事件记为 A_1 ，

$$P(A_1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{1}{5},$$

互换的是 B 班同学，此时甲景点恰有 2 个 A 班同学的事件记为 A_2 ，

$$P(A_2) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{3}{10},$$

所以甲景点恰有 2 个 A 班同学的概率 $P = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$.

(2) 由题知 X 的取值可能为 1, 2, 3,

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{3}{10}, \quad P(X=2) = \frac{1}{2}, \quad P(X=3) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^1 C_5^1} = \frac{1}{5},$$

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{19}{10}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}; \frac{19}{10}$.

19. 盒中有 4 个球，其中有 2 个白球，2 个黑球，从中随机取球，若每次取 1 个，不放回，取到黑球为止，则第 2 次取到黑球的概率 $P = \underline{\quad\quad}$ ；若每次取 1 个，放回，取到黑球停止，且取球不超过 3 次，设此过程取到白球的个数为 X ，则 $P(X \geq 2) = \underline{\quad\quad}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

【知识点】计算古典概型问题的概率、独立重复试验的概率问题、有放回与无放回问题的概率

【分析】第一空计算时注意不放回的取，由题意计算第一次取到白球，第二次取到黑球的概率，再利用概率的乘法公式计算，即可求出结果；

第二空计算时注意放回的取，每次取到黑球或白球的概率不变，计算 $P(X=2), P(X=3)$ ，由 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$ 即得结果.

【详解】若每次取 1 个，不放回，取到黑球为止，因为第二次取到黑球，则第一次取到的一定是白球，所以概率 $P = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

若每次取 1 个，放回，则取到的白球的个数 X 的分布列如下表.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}$.

20. 2025 年是中国人民抗日战争暨世界反法西斯战争胜利 80 周年, 为激发民众的爱国热情和民族自豪感, 某地举办相关知识竞答活动. 在决赛中, 每轮活动由甲、乙各答一个问题, 已知甲每轮答对的概率为 $\frac{1}{4}$, 乙每轮答对的概率为 $\frac{2}{5}$. 在每轮活动中, 甲和乙答对与否互不影响, 各轮结果也互不影响, 则乙在两轮活动中恰好答对一个问题的概率为 _____; 两人在两轮活动中共答对 3 个问题的概率为 _____.

【答案】 $\frac{12}{25}$ $\frac{9}{100}$

【知识点】独立事件的乘法公式、利用互斥事件的概率公式求概率

【分析】设事件甲第 i 轮答对为 A_i , 事件乙第 i 轮答对为 B_i , $i=1,2$, 设事件乙在两轮活动中恰好答对 t 个问题为 F_t , $t=1,2$, 则 $F_1 = B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2$, 结合互斥事件的概率加法公式和独立事件定义求 $P(F_1)$, 设事件甲在两轮活动中恰好答对一个问题为 E_x , $x=1,2$, 根据概率加法公式和独立事件定义求 $P(E_1), P(E_2), P(F_2)$, 再求 $P(E_1F_2 + E_2F_1)$ 可得结论.

【详解】设事件甲第 i 轮答对为 A_i , 事件乙第 i 轮答对为 B_i , $i=1,2$,

则 A_1, A_2, B_1, B_2 相互独立, 且 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{4}$, $P(B_1) = P(B_2) = \frac{2}{5}$,

$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $P(\overline{B_1}) = P(\overline{B_2}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$,

设事件乙在两轮活动中恰好答对 t 个问题为 F_t , $t=1,2$,

则 $F_1 = B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2$, 其中事件 $B_1\overline{B_2}$, $\overline{B_1}B_2$ 互斥,

所以 $P(F_1) = P(B_1\overline{B_2} + \overline{B_1}B_2) = P(B_1\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}B_2) = P(B_1)P(\overline{B_2}) + P(\overline{B_1})P(B_2)$,

所以 $P(F_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$, 故乙在两轮活动中恰好答对一个问题的概率为 $\frac{12}{25}$,

设事件甲在两轮活动中恰好答对一个问题为 E_x , $x=1,2$,

则 $E_1 = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$, 其中事件 $A_1\overline{A_2}$, $\overline{A_1}A_2$ 互斥,

所以 $P(E_1) = P(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2)$,

所以 $P(E_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$,

则 $P(E_2) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{16}$, $P(F_2) = P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{4}{25}$,

事件两人在两轮活动中共答对 3 个问题可表示为 $E_1F_2 + E_2F_1$ ，其中事件 E_1F_2, E_2F_1 互斥，事件 E_1, F_2 相互独立，事件 E_2, F_1 相互独立，

$$\text{所以 } P(E_1F_2 + E_2F_1) = P(E_1)P(F_2) + P(E_2)P(F_1) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{25} + \frac{1}{16} \times \frac{12}{25} = \frac{9}{100},$$

所以两人在两轮活动中共答对 3 个问题的概率为 $\frac{9}{100}$ ，

故答案为： $\frac{12}{25}$ ； $\frac{9}{100}$ 。

21. 联合国教科文组织批准，中国传统节日端午节正式列入世界非物质文化遗产，同时，端午节成为中国首个入选世界非物质文化遗产的节日。为弘扬中国传统文化，某校在端午节期间组织有关端午节文化知识竞赛活动，某班甲、乙两人组成“粽队”参加竞赛活动，每轮活动由甲、乙各回答一个问题，已知每轮活动中甲、乙答对问题的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{2}{3}$ ，且每轮活动中甲、乙答对与否互不影响，各轮结果也互不影响。则甲在两轮活动中答对两个问题的概率为_____，“粽队”在两轮活动中至少答对三个问题的概率为_____。

【答案】 $\frac{9}{16}$ $\frac{2}{3}$

【知识点】独立事件的乘法公式、利用互斥事件的概率公式求概率

【分析】根据题意，设事件 A = “甲答对问题”，事件 B = “乙答对问题”，结合独立事件的概率乘法公式和互斥事件的概率加法公式，即可求解。

【详解】设事件 A = “甲答对问题”，事件 B = “乙答对问题”，

因为每轮活动中甲、乙答对与否互不影响，各轮结果也互不影响，

所以甲在两轮活动中答对两个问题的概率为 $P_1 = P(A)P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ ；

“粽队”在两轮活动中至少答对三个问题，则包含 $ABAB, AB\bar{A}\bar{B}, AB\bar{A}B, \bar{A}\bar{B}AB, \bar{A}B\bar{A}B$ ，

可得概率为 $P = P(ABAB) + P(AB\bar{A}\bar{B}) + P(AB\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}AB) + P(\bar{A}B\bar{A}B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times (1 - \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{3}{4}) \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + (1 - \frac{3}{4}) \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{36}{144} + \frac{18}{144} + \frac{12}{144} + \frac{18}{144} + \frac{12}{144} = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

故答案为： $\frac{9}{16}$ ； $\frac{2}{3}$ 。

22. 某超市拟定于周年庆当天举办一次有奖促销活动，顾客一次消费满 500 元可参加一次抽奖活动，规则如下：有甲、乙两个不透明的箱子，甲箱中有 2 个红球和 3 个黑球，乙箱中有

1 个红球和 3 个黑球（所有球除颜色外完全相同），获得抽奖机会的顾客先从甲箱中随机取出 2 个球放入乙箱，再从乙箱中随机取出 1 个球，规定从乙箱中取出的球是红球的顾客中奖，可获得 100 元返金券，则抽奖顾客中奖的概率为_____；据以往消费记录估计当天约有 800 位顾客抽奖，记中奖人数为 X ，则 $E(X)=$ _____.

【答案】 $\frac{3}{10}/0.3$ 240

【知识点】计算古典概型问题的概率、二项分布的均值、独立事件的乘法公式

【分析】由已知从甲箱中随机取出 2 个球有三种情况，放入乙箱后，分别计算其概率，即可求解；由已知可得 $X \sim B\left(800, \frac{3}{10}\right)$ ，根据二项分布期望的计算公式求解即可.

【详解】顾客从甲箱中随机取出 2 个球，可能情况分别为 2 个红球，1 个红球和 1 个黑球，2 个黑球，

若从甲箱中取出 2 个红球放入乙箱，则乙箱中有 3 个红球和 3 个黑球，

则从乙箱中随机取出 1 个球，取出的是红球的概率为 $\frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^2 \cdot C_6^1}$ ，

若从甲箱中取出 1 个红球和 1 个黑球放入乙箱，则乙箱中有 2 个红球和 4 个黑球，

则从乙箱中随机取出 1 个球，取出的是红球的概率为 $\frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1}{C_5^2 \cdot C_6^1}$ ，

若从甲箱中取出 2 个黑球，放入乙箱，则乙箱中有 1 个红球和 5 个黑球，

则从乙箱中随机取出 1 个球，取出的是红球的概率为 $\frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_6^1}$ ，

所以中奖的概率为 $\frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^2 \cdot C_6^1} + \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1}{C_5^2 \cdot C_6^1} + \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_6^1} = \frac{3}{10}$ ；

每位顾客是否中奖相互独立，且中奖概率为 $\frac{3}{10}$ ，所以 $X \sim B\left(800, \frac{3}{10}\right)$ ，

所以 $E(X) = 800 \times \frac{3}{10} = 240$.

故答案为： $\frac{3}{10}$ ； 240.

23. 天津是一个历史悠久的文化古都，五大道，石家大院，古文化街，鼓楼这四个景点又是天津十分有名的旅游胜地. 已知某游客游览五大道的概率为 $\frac{2}{3}$ ，游览石家大院，古文化街，鼓楼的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，且该游客是否游览这四个景点相互独立，则该游客只游览一个景点的概率

率为_____；该游客至少游览三个景点的概率为_____.

【答案】 $\frac{5}{24}$ $\frac{3}{8}$

【知识点】独立事件的乘法公式、互斥事件的概率加法公式

【分析】根据互相独立事件的概率公式和互斥事件的概率加法公式求解即可.

【详解】该游客只游览一个景点的概率为 $\frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{24}$,

该游客游览三个景点的概率为 $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{24}$,

该游客游览四景点的概率为 $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}$,

所以该游客至少游览三个景点的概率为 $\frac{7}{24} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$,

故答案为: $\frac{5}{24}$; $\frac{3}{8}$

24. 小轩操场跑步,一周2次,一次跑5圈或6圈.第一次跑5圈或6圈的概率均为0.5,若第一次跑5圈,则第二次跑5圈的概率为0.3,跑6圈的概率为0.7;若第一次跑6圈,则第二次跑5圈的概率为0.6,跑6圈的概率为0.4.小轩一周跑11圈的概率为_____;若一周至少跑11圈为运动量达标,则连续跑4周,记合格周数为 X ,则 X 的期望 $E(X)$ =_____.

【答案】 $0.65/\frac{13}{20}$ 3.4

【知识点】二项分布的均值、利用全概率公式求概率、利用对立事件的概率公式求概率

【分析】设出事件,利用全概率公式求出小轩一周跑11圈的概率;再求出一周至少跑11圈的概率,得到 $X \sim B(4, 0.85)$,利用二项分布求期望公式进行求解.

【详解】设一周跑11圈为事件 A ,第一次跑5圈为事件 B ,第二次跑5圈为事件 C ,

则 $P(B) = P(\bar{B}) = 0.5, P(C|B) = 0.3, P(\bar{C}|B) = 0.7, P(C|\bar{B}) = 0.6, P(\bar{C}|\bar{B}) = 0.4$,

故 $P(A) = P(B\bar{C}) + P(\bar{B}C) = P(B) \cdot P(\bar{C}|B) + P(\bar{B}) \cdot P(C|\bar{B})$

$= 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.6 = 0.65$;

一周跑10圈的概率为 $0.5 \times 0.3 = 0.15$,故一周至少跑11圈的概率为 $1 - 0.15 = 0.85$,

故 $X \sim B(4, 0.85)$,故 $E(X) = 4 \times 0.85 = 3.4$.

故答案为：0.65，3.4

25. 一个袋子里放有除颜色外完全相同的 2 个白球、3 个黑球.若采取有放回抽样方式，从中依次摸出两个小球，则两个小球颜色不同的概率为_____；若采取不放回抽样方式，从中依次摸出两个小球，则在第 1 次摸到的是黑球的条件下，第 2 次摸到的是黑球的概率为_____.

【答案】 $\frac{12}{25}$ $\frac{1}{2}$

【知识点】独立事件的乘法公式、计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】第一问分先白后黑和先黑后白两种情况，由概率公式计算；第二问利用条件概率公式即可求解.

【详解】令事件 A 表示用放回抽样方式摸出两个颜色不同的小球，

所以每次摸一个白球的概率为 $\frac{2}{5}$ ，每一次摸一个黑球的概率为 $\frac{3}{5}$ ，

$$\text{所以 } P(A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25},$$

令事件 B_i 表示第 i 次摸到黑球 $i=1,2$ ，

$$\text{所以 } P(B_1) = \frac{3}{5}, P(B_1 B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

所以在第一次摸到黑球的条件下，第二次摸到黑球的概率为：

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2},$$

故答案为： $\frac{12}{25}$ ； $\frac{1}{2}$.

26. 已知甲盒产品中有 4 个正品和 2 个次品，乙盒产品中有 3 个正品和 2 个次品，若从甲盒中任取 2 个产品，则这 2 个产品中有一个为正品的条件下，另一个为次品的概率_____.
若先从甲盒中任取 2 个产品，放入乙盒，再从乙盒任取一个产品，则取出的这个产品是正品的概率为_____.

【答案】 $\frac{4}{7}$ $\frac{13}{21}$

【知识点】计算条件概率、利用全概率公式求概率、计算古典概型问题的概率、求超几何分布的概率

【分析】由条件概率公式得到第一个空；由超几何分布，分别计算出从甲中取出的是两个正品、一个正品一个次品、两个次品的概率，再由全概率公式得到第二个空的答案.

【详解】设事件 A 为“从甲中取出的 2 件产品中有一个为正品”，事件 B 为“从甲中取出的 2 个产品中有一个为次品”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^2 + C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{14}{15}, \quad P(AB) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, \quad \text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{14}{15}} = \frac{4}{7};$$

设事件 C 为“从乙中取出的这个产品是正品”，事件 D_1 为“从甲中取出两个正品”，

事件 D_2 为“从甲中取出一个正品、一个次品”，事件 D_3 为“从甲中取出两个次品”，

$$\text{则 } P(D_1) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}, P(D_2) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(D_3) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$P(C|D_1) = \frac{5}{7}, P(C|D_2) = \frac{4}{7}, P(C|D_3) = \frac{3}{7},$$

由全概率公式得

$$P(C) = P(D_1)P(C|D_1) + P(D_2)P(C|D_2) + P(D_3)P(C|D_3) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{7} + \frac{8}{15} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{65}{105} = \frac{13}{21}$$

故答案为： $\frac{4}{7}; \frac{13}{21}$.

27. 某校高三 1 班第一小组有男生 4 人，女生 2 人，为提高中学生对劳动教育重要性的认识，现需从中抽取 2 人参加学校开展的劳动技能学习，恰有一名女生参加劳动学习的概率则为 _____；在有女生参加劳动学习的条件下，都是女生参加劳动学习的概率 _____.

【答案】 $\frac{8}{15}$ $\frac{1}{9}$

【知识点】 计算古典概型问题的概率、计算条件概率

【分析】 设 A 表示事件“恰有一名女生参加学习”， B 表示事件“有女生参加劳动学习”，设 C 表示事件“都是女生参加劳动学习”，结合组合数公式和条件概率公式，可分别求得.

【详解】 设 A 表示事件“恰有一名女生参加学习”， B 表示事件“有女生参加劳动学习”，设 C 表示事件“都是女生参加劳动学习”，

$$\text{则 } P(A) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}, P(B) = \frac{C_4^1 C_2^1 + C_2^2}{C_6^2} = \frac{9}{15}, P(C) = P(BC) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{1}{9},$$

故答案为: $\frac{8}{15}; \frac{1}{9}$.

28. 在一个口袋中装有编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五张卡片, 这些卡片除编号不同外其他都相同, 从口袋中有放回地摸卡片三次, 每次摸一个. 则三次摸出卡片的数字有两次不超过 3 的概率_____; 在已知三次摸出卡片的数字有两次不超过 3 的前提下, 这三次中有一次摸出编号为 2 的卡片的概率_____.

【答案】 $\frac{54}{125}$ $\frac{4}{9}$

【知识点】计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】根据题意可知三次试验中恰好两次成功的概率服从二项分布, 由二项分布的概率计算公式即可求解①; 求出事件 A 与事件 AB 包含的样本点个数, 根据条件概率计算即可.

【详解】由题意可知, 单次摸到不超过 3 的概率为 $\frac{3}{5}$, 超过 3 的概率为 $\frac{2}{5}$,

记事件 A = “三次摸出卡片的数字有两次不超过 3”

三次试验中恰好两次成功的概率服从二项分布, 故 $P(A) = C_3^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 = 3 \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{125}$;

事件 A 的总情况数为 $C_3^2 \times 3^2 \times 2 = 54$,

记事件 B = “三次中有一次摸出编号为 2 的卡片”,

则事件 AB 为: 有一次摸出编号为 2, 另外一次为 1 或 3, 第三次超过 3,

可由如下步骤实现事件 AB ,

第一步: 从三次摸出卡片中选出一次摸出编号 2, 共 3 种情况,

第二步: 从剩下的两次摸出卡片中选出一次摸出编号 1 或 3, 共 $2 \times 2 = 4$ 种情况,

第三步: 从剩下的一次摸出卡片中选出超过 3 的编号, 共 2 种情况,

由分步乘法计数原理可知, 事件 AB 总情况数为 $3 \times 4 \times 2 = 24$,

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$$

故答案为: $\frac{54}{125}, \frac{4}{9}$

29. 2044 年, 当同学们重返母校参加 140 周年校庆时, 惊喜地发现, 南院正门外真的出现

了一家“南德琐艾奶茶店”，这里正出售 6 款饮品，分别为林林清风、金晓惠兰、明明如月、幽幽谭香、天天爆柠、雅韵冰酿. 甲、乙两位同学分别选购 3 款不同饮品，则甲选购的饮品中有“林林清风”的概率为_____；在甲选购了“林林清风”这款饮品的条件下，甲、乙二人所选饮品中恰有 1 款相同的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}/0.5$ $\frac{9}{20}/0.45$

【知识点】 计算条件概率、计算古典概型问题的概率

【分析】 利用组合数，结合古典概型，并结合条件概率的定义计算即可.

【详解】 总共有 6 款饮品，甲选购 3 款不同饮品，总的选购方案数为组合数 $C_6^3 = 20$ ，甲选购的饮品中包含“林林清风”的方案：固定“林林清风”被选中，则甲需从剩余 5 款饮品中选购 2 款，方案数为 $C_5^2 = 10$ ，因此，概率为 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ；
条件：甲已选购包含“林林清风”的 3 款饮品（记作集合 $S_{\text{甲}}$ ，其中必含“林林清风”），乙独立选购 3 款不同饮品，总的选购方案数为 $C_6^3 = 20$.
要求甲、乙所选饮品集合的交集大小恰好为 1（即恰有 1 款相同）；
设饮品全集为 $\{A, B, C, D, E, F\}$ ，其中 A 为“林林清风”，
不失一般性，设甲选购 $S_{\text{甲}} = \{A, B, C\}$ ，则剩余饮品为 $\{D, E, F\}$.
乙选购时，恰有 1 款与甲相同，即乙从 $\{A, B, C\}$ 中选 1 款，
并从 $\{D, E, F\}$ 中选 2 款. 从 $\{A, B, C\}$ 选 1 款的方案数： $C_3^1 = 3$ ，
从 $\{D, E, F\}$ 选 2 款的方案数： $C_3^2 = 3$.
因此，满足条件的乙选购方案数为 $3 \times 3 = 9$ ，概率为 $\frac{9}{20}$.
故答案为： $\frac{1}{2}$ ； $\frac{9}{20}$.

30. 甲、乙两人的口袋中均装有 3 个球，甲的 3 个球为 2 个黑球和 1 个白球，乙的 3 个球均为黑球（黑球和白球的大小，材质一样）. 两人决定玩一场游戏：两人各从口袋中任取 1 个球与对方交换，重复进行这样的操作. 第 1 次交换后，甲的口袋中黑球的个数为 3 的概率为_____；第 2 次交换后，甲的口袋中依然只有 1 个白球的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{9}$

【知识点】 互斥事件的概率加法公式、独立事件的乘法公式

【分析】根据题意，结合古典概型概率公式，即可求解；若第 2 次交换后，甲的口袋依然只有 1 个白球，包含这两次甲和乙都交换的黑球，以及第一次甲的白球和乙的黑球交换，第二次甲的黑球和乙的白球交换，再结合概率公式，即可求解.

【详解】若第 1 次交换后，甲的口袋有 3 个黑球，则甲第一次取到白球与乙交换，
所以概率 $P = \frac{1}{3}$ ；

若第 2 次交换后，甲的口袋依然只有 1 个白球，包含 2 种情况，

第一种情况，这两次甲和乙都交换的黑球，概率为 $P_1 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ，

第二种情况，第一次甲的白球和乙的黑球交换，第二次甲的黑球和乙的白球交换，概率

$$P_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

所以第 2 次交换后，甲的口袋依然只有 1 个白球的概率 $P = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$ ； $\frac{5}{9}$