

基本不等式练习

一、填空题

1. 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + 2b = 2$ ，则 $\frac{9}{a+b} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.

【答案】8

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】根据给定条件可得 $(a+b)+b=2$ ，根据“1”的妙用结合基本不等式求解作答.

【详解】因为 $a > 0, b > 0$ ，且 $a + 2b = 2$ ，则 $(a+b)+b=2$ ，

可得 $\frac{9}{a+b} + \frac{1}{b} = \frac{[(a+b)+b]}{2} \left(\frac{9}{a+b} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{9b}{a+b} + \frac{a+b}{b} \right) \geq \frac{1}{2} \left(10 + 2\sqrt{\frac{9b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{b}} \right) = 8$ ，

当且仅当 $\frac{9b}{a+b} = \frac{a+b}{b}$ 时等号成立，结合 $a + 2b = 2$ 可得，当且仅当 $a = 1, b = \frac{1}{2}$ 时等号成立，

所以 $\frac{9}{a+b} + \frac{1}{b}$ 取得最小值8.

故答案为：8.

2. 若 $x < 0$ ，则 $1 - 2x - \frac{1}{x}$ 的最小值为_____.

【答案】 $1 + 2\sqrt{2}$.

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】先根据已知条件 $x < 0$ ，构造出两个正数，再对代数式进行变形，最后利用基本不等式性质求解最小值.

【详解】因为 $x < 0$ ，所以 $-x > 0$ ，所以 $-2x > 0, -\frac{1}{x} > 0$ ，

所以 $1 - 2x - \frac{1}{x} = 1 + (-2x) + \left(-\frac{1}{x}\right) \geq 1 + 2\sqrt{(-2x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = 1 + 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当 $-2x = -\frac{1}{x}$ ，即 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立.

因此 $1 - 2x - \frac{1}{x} \geq 1 + 2\sqrt{2}$

所以 $1 - 2x - \frac{1}{x}$ 的最小值为 $1 + 2\sqrt{2}$.

故答案为： $1 + 2\sqrt{2}$.

3. 已知 $a > 0, b > 0$ ，若 $a + 4b = 1$ ，则 ab 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{1}{16}/0.0625$

【知识点】条件等式求最值、基本不等式求积的最大值

【分析】根据基本不等式求解即可.

【详解】因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a + 4b \geq 2\sqrt{a \cdot 4b} = 4\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = 4b$, 即 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{8}$ 时, 等号成立.

又 $a + 4b = 1$, 所以 $ab \leq \frac{1}{16}$, 当且仅当 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{8}$ 时, 等号成立.

故 ab 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

故答案为: $\frac{1}{16}$.

4. 若 $m > 0, n > 0$, 且 $m + 2n = 1$, 则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为_____.

【答案】8

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】利用 $m + 2n = 1$, 把式子 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 转化为 $\left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}\right)(m + 2n)$ 展开后利用基本不等式即可求得最小值.

【详解】依题意, $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}\right)(m + 2n) = 2 + \frac{4n}{m} + \frac{m}{n} + 2 = 4 + \frac{4n}{m} + \frac{m}{n} \geq 4 + 2\sqrt{\frac{4n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 8$,

当且仅当 $\frac{4n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}$ 时, 取等号, 所以 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 8;

故答案为: 8.

5. 已知正实数 a, b 满足 $a + 2b = ab$, 则 $a + b$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{2} + 3$

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】由已知等式变形可得 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 将代数式 $a + b$ 与 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$ 相乘, 展开后利用基本不等式可求得 $a + b$ 的最小值.

【详解】因为正实数 a, b 满足 $a + 2b = ab$, 等式 $a + 2b = ab$ 两边同时除以 ab 可得 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$,

所以, $a + b = (a + b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} + 3 \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3$,

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \frac{2b}{a} = \frac{a}{b} \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ a > 0, b > 0 \end{cases} \text{ 时, 即当 } \begin{cases} a = 2 + \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} + 1 \end{cases} \text{ 时, 等号成立,}$$

所以, $a+b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$.

故答案为: $2\sqrt{2}+3$.

6. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x-1} (x > 1)$ 的最小值为_____

【答案】5

【知识点】基本不等式求和的最小值、复杂(根式型、分式型等)函数的值域

【分析】构造基本不等式, 利用基本不等式求得函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x-1} (x > 1)$ 的最小值即可.

【详解】由题意得函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x-1} = \frac{x(x-1)+4}{x-1} = x + \frac{4}{x-1} = x-1 + \frac{4}{x-1} + 1 (x > 1)$,

因为 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0, \frac{4}{x-1} > 0$.

所以 $x-1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 4$, 当且仅当 $x-1 = \frac{4}{x-1}$, 即 $x=3$ 时, 等号成立.

所以 $f(x) \geq 5$, 且当 $x=3$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 5.

故答案为: 5.

7. 已知函数 $y = x + \frac{16}{x-1} (x > 1)$, 函数 y 取得最小值为_____; 此时 x 的值为_____.

【答案】 9 5

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】通过配凑将函数转化为含正数项的形式, 利用基本不等式求出最小值, 同时确定等号成立时 x 的值.

【详解】由 $x > 1$, 得 $x-1 > 0$.

将函数变形为 $y = (x-1) + \frac{16}{x-1} + 1$.

由基本不等式, $(x-1) + \frac{16}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{16}{x-1}} = 8$, 故 $y \geq 8+1=9$.

当且仅当 $x-1 = \frac{16}{x-1}$ 时等号成立, 解得 $(x-1)^2 = 16$, 结合 $x > 1$, 得 $x=5$.

故答案为: 9; 5

8. $x > 0, y > 0$, 且满足 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$, 若 $2x + y \geq k^2 - 1$ 恒成立, 则 k 的取值范围为_____

【答案】 $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值、基本不等式的恒成立问题、条件等式求最值

【分析】利用基本不等式中“1”的代换求得 $(2x+y)_{\min} = 4$ ，进而 $(2x+y)_{\min} \geq k^2 - 1$ ，解不等式即可.

【详解】 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2x} + \frac{1}{y} = 1$,

则 $2x + y = (2x + y) \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} \right) = 2 + \frac{y}{2x} + \frac{2x}{y} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{y}{2x} \times \frac{2x}{y}} = 4$,

当且仅当 $\frac{y}{2x} = \frac{2x}{y}$ ，即 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 时，等号成立，

所以 $(2x + y)_{\min} = 4$.

又 $2x + y \geq k^2 - 1$ 恒成立，所以 $(2x + y)_{\min} \geq k^2 - 1$,

即 $4 \geq k^2 - 1$ ，解得 $-\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$,

所以 k 的取值范围为 $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

故答案为: $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

9. 已知 $x > 0$ ，则 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值为_____.

【答案】 $2 - 4\sqrt{3}$

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】由基本不等式即可直接求解.

【详解】 $2 - 3x - \frac{4}{x} = 2 - \left(3x + \frac{4}{x} \right) \leq 2 - 2\sqrt{3x \cdot \frac{4}{x}} = 2 - 4\sqrt{3}$,

当且仅当 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，取等号，

所以 $2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值为 $2 - 4\sqrt{3}$,

故答案为: $2 - 4\sqrt{3}$

10. 已知正实数 a, b 满足 $ab + 2a + b = 14$ ，则 $2a + b$ 的最小值为_____.

【答案】 $8\sqrt{2} - 4$

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值、基本不等式求和的最小值

【分析】根据基本不等式的性质进行求解即可.

【详解】因为 $ab+2a+b=14$ ，所以 $ab+2a+b+2=16$ ，

化简可得 $(a+1)(b+2)=16$.

因为 $a>0, b>0$ ，所以 $2a+b=2(a+1)+(b+2)-4\geq 2\sqrt{2(a+1)(b+2)}-4=8\sqrt{2}-4$.

当且仅当 $2(a+1)=b+2$ ，即 $a=2\sqrt{2}-1, b=4\sqrt{2}-2$ 时等号成立，

此时 $2a+b$ 取得最小值 $8\sqrt{2}-4$.

故答案为： $8\sqrt{2}-4$.