

基本不等式

一、填空题

1. 已知 $x > 2$, $y > -2$, $x + 2y = 4$, 则 $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2y+4}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值、条件等式求最值

【分析】运用换元法与基本不等式中“1”的妙用，即可得解.

【详解】令 $x-2=a, a>0, 2y+4=b, b>0$, 则 $x=a+2, 2y=b-4$,

则 $x+2y=4$ 可转化为 $a+b=6$, 求 $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2y+4}$ 最小值即求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a+b) = \frac{1}{6} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \right) \geq \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, 即 $a=b$, 即 $x=5, y=-\frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

因此 $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2y+4}$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

故答案为: $\frac{2}{3}$.

2. 已知 $\lg(x+2y) = \lg x + \lg y$, 则 $\frac{xy+x+y^2}{y}$ 的最小值为_____.

【答案】 7

【知识点】条件等式求最值、基本不等式“1”的妙用求最值、对数的运算性质的应用

【分析】根据对数的运算性质, 可得 $x+2y=xy$, 对所求进行化简变形, 结合基本不等式“1”的代换, 分析计算, 即可得答案.

【详解】由题意 $\lg(x+2y) = \lg x + \lg y = \lg xy$, 且 $x > 0, y > 0$

所以 $x+2y=xy$, 则 $\frac{1}{y} + \frac{2}{x} = 1$,

$$\text{又 } \frac{xy+x+y^2}{y} = x + \frac{x}{y} + y = x + x \left(1 - \frac{2}{x} \right) + y = 2x + y - 2,$$

$$\text{令 } t = 2x + y = (2x + y) \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x} \right) = \frac{2x}{y} + 4 + 1 + \frac{2y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 5 = 9,$$

当且仅当 $\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$, 即 $x = y = 3$ 时取等号,

所以 $\frac{xy+x+y^2}{y} = 2x+y-2 \geq 9-2=7$, 即最小值为 7.

故答案为: 7

3. 若正数 x, y 满足 $x+y=xy$, 则 $3x+2y$ 的最小值是_____.

【答案】 $5+2\sqrt{6}$

【知识点】 条件等式求最值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】 将已知等式化简为 $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$, 结合基本不等式“1”的巧用求解最值即可.

【详解】 正数 x, y 满足 $x+y=xy$, 则 $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$,

所以 $(3x+2y)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = \frac{3x}{y} + 3 + 2 + \frac{2y}{x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{3x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} = 5 + 2\sqrt{6}$,

当且仅当 $\frac{3x}{y} = \frac{2y}{x}$, 即 $x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, y = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $3x+2y$ 的最小值是 $5+2\sqrt{6}$.

故答案为: $5+2\sqrt{6}$.

4. 已知正实数 x, y 满足 $x+y=2$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

【知识点】 基本不等式求和的最小值

【分析】 利用基本不等式求解即可.

【详解】 $\frac{y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{2y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{2y} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \times \frac{x}{2y}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$,

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{2y}$ 且 $x+y=2$, 即 $x=4-2\sqrt{2}, y=2\sqrt{2}-2$ 时等号成立,

故答案为: $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

5. 已知正数 a, b 满足 $a+b=1$, 则 $\frac{a+2b}{a^2+ab+b^2}$ 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$

【知识点】 条件等式求最值

【分析】由题意 $a=1-b$ ，再代入 $\frac{a+2b}{a^2+ab+b^2}$ 化简，再换元应用基本不等式求解最值即可.

【详解】由题意， $a=1-b$ ，故 $\frac{a+2b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a+b+b}{a(a+b)+b^2} = \frac{1+b}{1-b+b^2}$ ，

因为正数 a, b 满足 $a+b=1$ ，故 $0 < b < 1$.

令 $t=1+b$ ，则 $1 < t < 2$ ， $b=t-1$ ，

$$\text{故 } \frac{1+b}{1-b+b^2} = \frac{t}{1-(t-1)+(t-1)^2} = \frac{t}{t^2-3t+3} = \frac{1}{t+\frac{3}{t}-3}.$$

又 $t+\frac{3}{t}-3 \geq 2\sqrt{t \times \frac{3}{t}}-3 = 2\sqrt{3}-3$ ，故当且仅当 $t=\sqrt{3}$ ，即 $b=\sqrt{3}-1, a=2-\sqrt{3}$ 时，

$$\frac{1}{t+\frac{3}{t}-3} \text{ 取最大值 } \frac{1}{2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}.$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$

6. 已知 $xy=2$ ，且 $0 < y < 1$ ，则 $\frac{x^2+4y^2}{x-2y}$ 最小值为_____.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【知识点】基本不等式求和的最小值

【分析】转化为利用基本不等式求和的最小值问题解决.

【详解】因为 $0 < y < 1 \Rightarrow \frac{1}{y} > 1$ ，

又 $xy=2 \Rightarrow x=\frac{2}{y} > 2$ ，所以 $x-2y > 0$.

$$\text{则 } \frac{x^2+4y^2}{x-2y} = \frac{(x-2y)^2+4xy}{x-2y} = x-2y+\frac{8}{x-2y} \geq 2\sqrt{(x-2y) \times \frac{8}{x-2y}} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} xy=2 \\ x-2y=\frac{8}{x-2y} \\ 0 < y < 1 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ x=\sqrt{6}+\sqrt{2} \end{cases} \text{ 时取等号.}$$

故答案为： $4\sqrt{2}$

7. 已知正数 a, b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ，则 $2ab-3a$ 的最小值为_____.

【答案】 9

【知识点】基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】根据基本不等式的性质，以及换元法，对原代数式进行换元，再根据基本不等式求出最小值即可.

【详解】由题意可知 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ，去分母得 $b + 2a = ab$ ，

代入得 $2ab - 3a = 2(b + 2a) - 3a = 2b + a$ ，

由 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ 可得 $(2b + a)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} + 5 = 9$ ，

当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{2a}{b}$ ，即 $a = b$ 时去等号，所以 $2ab - 3a$ 的最小值为 9.

故答案为：9.

8. 已知 $a, b > 0, a + b = 1$ ，则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$ 的最小值为_____.

【答案】 $2\sqrt{6} + 5$

【知识点】条件等式求最值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】法一：化 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} + 5$ ，再应用基本不等式求最小值；法二：化

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ ，再应用“1”的代换及基本不等式求最小值.

【详解】法一：
$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{2(a+b)}{a} + \frac{a+b}{b} + \frac{(a+b)^2}{ab} = 3 + \frac{2b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{ab}$$
$$= \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} + 5 \geq 2\sqrt{6} + 5$$
，当且仅当 $\begin{cases} a+b=1 \\ \frac{3b}{a} = \frac{2a}{b} \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a=3-\sqrt{6} \\ b=\sqrt{6}-2 \end{cases}$ ，时等号成立，

故 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 $2\sqrt{6} + 5$ ；

法二：因为 $a + b = 1$ ，所以 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a+b}{ab} = \frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ ，

所以 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b}\right)(a+b) = 5 + \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$ ，

当且仅当 $\begin{cases} a+b=1, \\ \frac{3b}{a} = \frac{2a}{b} \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} a=3-\sqrt{6}, \\ b=\sqrt{6}-2 \end{cases}$ ，时等号成立，

故 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 $2\sqrt{6} + 5$.

故答案为： $2\sqrt{6} + 5$

9. 若 $a > 0, b > -\frac{1}{2}$ ，且 $a + b = 1$ ，则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{2b+1}$ 的最小值为_____.

【答案】 3

【知识点】基本不等式求和的最小值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】化简式子 $\frac{2}{a} + \frac{1}{2b+1} = \frac{4}{2a} + \frac{1}{2b+1} = \frac{1}{3}(2a+2b+1)\left(\frac{4}{2a} + \frac{1}{2b+1}\right)$ ，然后利用基本不等式计算.

【详解】因为 $a+b=1$ ，所以

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{2b+1} = \frac{4}{2a} + \frac{1}{2b+1} = \frac{1}{3}(2a+2b+1)\left(\frac{4}{2a} + \frac{1}{2b+1}\right) = \frac{1}{3}\left[4+1+\frac{4(2b+1)}{2a} + \frac{2a}{2b+1}\right].$$

因为 $a>0, b>-\frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{4(2b+1)}{2a} > 0, \frac{2a}{2b+1} > 0$ ，

则 $\frac{4(2b+1)}{2a} + \frac{2a}{2b+1} \geq 2\sqrt{\frac{4(2b+1)}{2a} \cdot \frac{2a}{2b+1}} = 4$ ，当且仅当 $\frac{4(2b+1)}{2a} = \frac{2a}{2b+1}$ ，即 $a=1, b=0$ 时，

等号成立，

则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{2b+1} \geq 3$ ，即 $\frac{2}{a} + \frac{1}{2b+1}$ 的最小值为 3.

故答案为：3

10. 已知 $x, y > 0$ ，且 $x+y=1$ ，则 $\frac{x^2+y^2+2x-y+1}{xy}$ 的最小值为_____.

【答案】7

【知识点】基本不等式求和的最小值、基本不等式“1”的妙用求最值

【分析】根据“1”的妙用，利用等量代换以及基本不等式，可得答案.

【详解】因为 $x, y > 0$ ， $x+y=1$ ，所以

$$\frac{x^2+y^2+2x-y+1}{xy} = \frac{x^2+y^2+2x(x+y)-y(x+y)+(x+y)^2}{xy} =$$

$$\frac{4x^2+y^2+3xy}{xy} = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} + 3 \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 3 = 7,$$

当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{x}$ ，即 $x = \frac{1}{3}$ ， $y = \frac{2}{3}$ 时，等号成立，所以 $\frac{x^2+y^2+2x-y+1}{xy}$ 的最小值为 7.

故答案为：7.