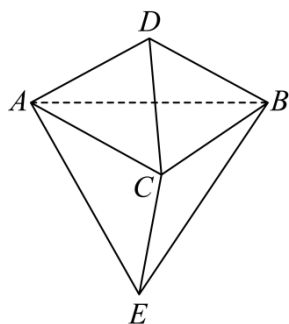


立体几何体积表面积三

一、填空题

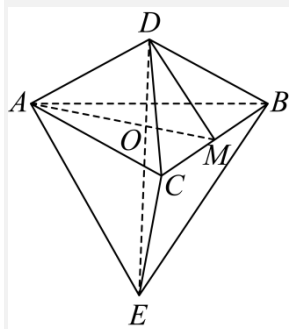
1. 如图, 已知三棱锥 $D-ABC$ 和三棱锥 $E-ABC$ 均为正三棱锥, 其中 $DA = \frac{\sqrt{21}}{3}$, $AB = AE = 2$, 则其内部能放入的最大的球的半径 $R =$ _____.



【答案】 $\frac{3+2\sqrt{6}}{15}$

【分析】根据题意可得该几何体内部能放入的最大的球为该几何体的内切球, 利用等体积法可知: $V_{D-ABC} + V_{E-ABC} = \frac{1}{3}R \cdot S_{\text{表}}$, 分别计算出该几何体的体积以及表面积即可求解.

【详解】取 $\triangle ABC$ 的中心 O , 连接 DO , EO , 则 DO , EO 即分别为两个正三棱锥的高, 易知 D , O , E 三点共线, 连接 AO , 延长后与 BC 相交于点 M , 则 M 为 BC 中点,



$$\because AO = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \therefore DO = \sqrt{DA^2 - AO^2} = 1, \quad EO = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore MO = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore DM = \sqrt{DO^2 + MO^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad EM = \sqrt{EO^2 + MO^2} = \sqrt{3},$$

该几何体内部能放入的最大的球为该几何体的内切球, 其半径为 R ,

$$\text{由题意可得: } V_{D-ABC} + V_{E-ABC} = \frac{1}{3}DO \cdot S_{\triangle ABC} + \frac{1}{3}EO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{又 } S_{\text{表}} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DAC} + S_{\triangle DBC} + S_{\triangle EAB} + S_{\triangle EAC} + S_{\triangle EBC} = 3S_{\triangle DBC} + 3S_{\triangle EBC},$$

$$\text{则 } S_{\text{表}} = 3 \left(\frac{1}{2}DM \cdot BC + \frac{1}{2}EM \cdot BC \right) = 5\sqrt{3},$$

由等体积法可知： $V_{D-ABC} + V_{E-ABC} = \frac{1}{3}R \cdot S_{\text{表}}$ ，所以可得 $R = \frac{3+2\sqrt{6}}{15}$ 。

2. 已知在一个有底的圆锥容器（厚度忽略不计）内放入一个正方体，若该正方体在其内部能任意转动，且正方体的最大棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，则该圆锥容器的容积的最小值为_____。

【答案】 $\frac{8\pi}{3}$

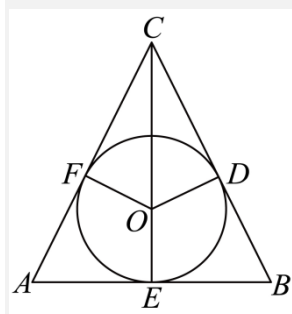
【分析】因为正方体能在圆锥内部任意转动，所以正方体的外接球是圆锥的内切球，根据正方体棱长求出其外接球的半径的最大值，设圆锥的底面半径为 r ，高为 h ，利用圆锥内切球的性质，建立 h 与 r 的关系式，结合圆锥容积公式，将容积表示为关于单一变量 r 的函数，再利用求函数最值的方法（导数法）求容积的最小值。

【详解】因为正方体在圆锥容器内部能任意转动，所以正方体的外接球在圆锥容器内部能任意转动，

又正方体的最大棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，所以外接球的半径的最大值

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1,$$

此时正方体的外接球内切于圆锥容器，轴截面图如图所示，



设圆锥的底面半径为 r ($r > 1$)，高为 h ，母线长为 l ，则 $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ ，

由 $\triangle CDO \sim \triangle CEB$ ，得 $\frac{1}{r} = \frac{l-r}{h}$ ，则 $l = \frac{h+r^2}{r} = \sqrt{h^2 + r^2}$ ，

得 $\frac{h^2 + 2hr^2 + r^4}{r^2} = h^2 + r^2$ ，整理得 $h = \frac{2r^2}{r^2 - 1}$ ($r > 1$)，

所以圆锥容器的容积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2\pi}{3} \times \frac{r^4}{r^2 - 1}$ 。

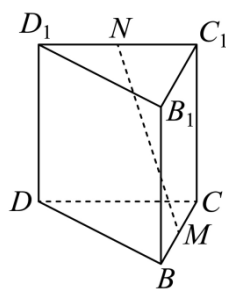
令 $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ ($x > 1$)，则 $f'(x) = \frac{2x^3(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}$ ，

当 $x \in (1, \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, \sqrt{2})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x)_{\min} = f(\sqrt{2}) = 4$,

故圆锥容器的容积的最小值为 $\frac{2\pi}{3} \times 4 = \frac{8\pi}{3}$.

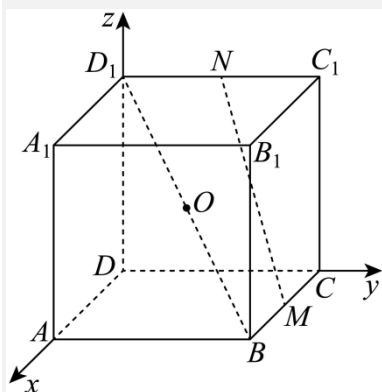
3. 如图, 在直三棱柱 $BCD-B_1C_1D_1$ 中, $BC = CD = CC_1 = 1, BC \perp CD$, M, N 分别是棱 BC, C_1D_1 的中点, 三棱柱 $BCD-B_1C_1D_1$ 的外接球为球 O , 则过 MN 的平面截球 O 所得截面面积的最小值为_____.



【答案】 $\frac{5\pi}{8} / \frac{5}{8}\pi$

【分析】 将三棱柱补成正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 建立空间直角坐标系, 可求出外接球的半径为 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 利用空间向量求出点 O 到直线 MN 的距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 进而求解截面面积的最小值.

【详解】 根据题意, 将该三棱柱补成正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 以 D 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $M\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), N\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$,

由正方体的性质可得该正方体的外接球球心为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ，即为点 O ，

则 $\overrightarrow{OM} = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，外接球半径为 $r = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

点 O 到直线 MN 的距离 $d = \sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，

该截面面积最小时，点 O 到该截面的距离为 d ，

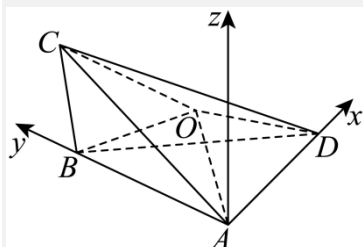
则截面面积的最小值为 $\pi \cdot (r^2 - d^2) = \pi \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{5\pi}{8}$ 。

4. 在四面体 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = BC = 1$ ， $CD = \sqrt{6}$ ，且 $\angle BAD = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ，则该四面体 $ABCD$ 外接球的体积_____。

【答案】 $\frac{7\sqrt{7}}{6}\pi$ / $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}$

【分析】建立空间直角坐标系，利用等量关系求出球心坐标，进而求得外接球半径即可求体积。

【详解】由题得： $AD \perp AB$ ， $CB \perp AB$ ，以 A 为原点建系如图所示，



则 $A(0,0,0)$ ， $B(0,\sqrt{3},0)$ ， $D(1,0,0)$ ，设 $C(m,\sqrt{3},n)$ ，

则 $\overrightarrow{BC} = (m,0,n)$ ， $\overrightarrow{CD} = (1-m,-\sqrt{3},-n)$ ，其中 $m < 0, n > 0$

因为 $|\overrightarrow{BC}| = 1$ ， $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{6}$ ，所以 $|\overrightarrow{BC}|^2 = m^2 + n^2 = 1$ ①，

由 $|\overrightarrow{CD}|^2 = (1-m)^2 + (-\sqrt{3})^2 + (-n)^2 = 6$ ，整理得 $m^2 - 2m + n^2 - 2 = 0$ ②，

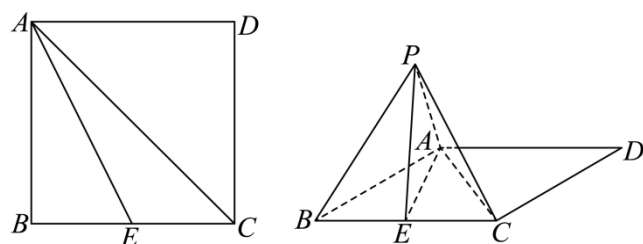
联立①②得： $m = -\frac{1}{2}$ ， $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $C(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，

设外接球球心为 $O(x,y,z)$ ，半径为 R ，则 $\overrightarrow{OA} = (-x,-y,-z)$ ， $\overrightarrow{OB} = (-x,\sqrt{3}-y,-z)$ ，

$\overrightarrow{OC} = (-\frac{1}{2}-x,\sqrt{3}-y,\frac{\sqrt{3}}{2}-z)$ ， $\overrightarrow{OD} = (1-x,-y,-z)$ ，

因为 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = R$ ，所以 $(-y)^2 = (\sqrt{3} - y)^2$ ，解得 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，
 又 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OD}| = R$ ，所以 $(-x)^2 = (1 - x)^2$ ，解得： $x = \frac{1}{2}$ ，则 $\overrightarrow{OA} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -z)$ ，
 $\overrightarrow{OC} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - z)$
 因为 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| = R$ ，所以 $(-\frac{1}{2})^2 + (-z)^2 = (-1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - z)^2$ ，解得： $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，
 则球心 $O(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，半径 $R = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，
 所以该四面体 $ABCD$ 外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{7}}{6}\pi$ 。

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 BC 的中点，将 $\triangle ACD$ 沿直线 AC 折起至 $\triangle ACP$ 处，使得点 P 在平面 ABC 上的投影在直线 AE 上，若三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 8π ，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积为_____。



【答案】 $\frac{8}{9}$

【分析】根据折叠的特点，根据外接球以及球的表面积求解正方形的边长，再根据三棱锥的体积公式求解。

【详解】连接 BD ，交 AC 于点 O ，交 AE 于点 F ，连接 PF ， PO ，
 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，
 因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 折叠的过程中，
 点 D （即点 P ）在底面上的射影一直在直线 BD 上，
 又点 P 在平面 ABC 上的射影在直线 AE 上，
 所以点 F 即为点 P 在平面 ABC 上的射影，即 $PF \perp$ 平面 ABC ，
 因为 $FO \subset$ 平面 ABC ，所以 $PF \perp FO$ ，
 因为 O 为对角线 AC 、 BD 的交点，所以 $|OA| = |OB| = |OC| = |OD|$ ，

即 $|OA|=|OB|=|OC|=|OP|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，所以 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，

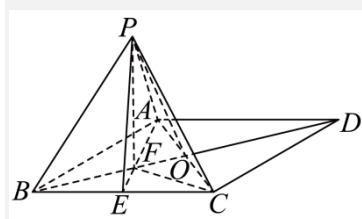
则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $r=|OP|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，则 $4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=8\pi$ ，解得 $a=2$ ，

因为 O 为 AC 的中点， E 为 BC 的中点，所以 F 为 $\triangle ABC$ 的重心，

则 $|OF|=\frac{1}{3}|OB|=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PFO$ 中， $|PF|=\sqrt{|OP|^2-|OF|^2}=\frac{4}{3}$ ，即三棱锥 $P-ABC$ 的高为 $\frac{4}{3}$ ，

则三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times|PF|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$ 。



6. 已知 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面及其内部的点，直线 AP 与直线 CD 所成的角为 45° ，且 $BP=PC_1$ ，给出下列四个结论：

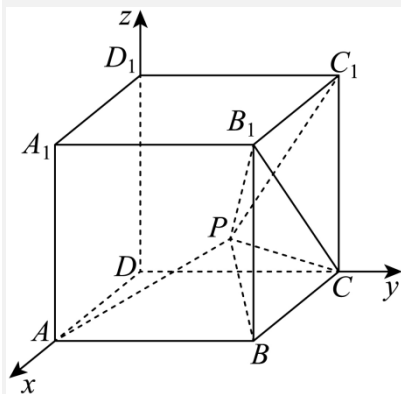
- ①满足条件的点 P 有无数个；
- ②点 P 的轨迹是一段圆弧；
- ③线段 BP 长度的最大值为 2；
- ④三棱锥 $P-BB_1C$ 体积的最大值为 $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ 。

其中正确结论的序号是_____。

【答案】 ①③④

【分析】 建系并求出相关点的坐标，设 $P(x, y, z)$, $x, y, z \in [0, 2]$ ，根据线线夹角和空间中距离公式可得点 P 的轨迹方程，即可判断①②；再根据点 P 的轨迹方程分析可得 $y \in [\sqrt{2}, 2]$ ，进而判断③④。

【详解】 以 D 为坐标原点， DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,0)$, $C_1(0,2,2)$,

设 $P(x,y,z)$, $x,y,z \in [0,2]$,

可得 $\overrightarrow{AP} = (x-2, y, z)$, $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{BP} = (x-2, y-2, z)$, $\overrightarrow{C_1P} = (x, y-2, z-2)$,

因为直线 AP 与直线 CD 所成的角为 45° ,

$$\text{则 } \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{2y}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 整理可得 } (x-2)^2 + z^2 = y^2,$$

又因为 $BP = PC_1$, 则 $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$, 整理可得 $x = z$,

联立可得 $(x-2)^2 + z^2 = y^2$, 即 $\frac{y^2}{2} - (x-1)^2 = 1$,

$$\text{可知点 } P \text{ 的轨迹方程为 } \begin{cases} \frac{y^2}{2} - (x-1)^2 = 1 \\ x = z \end{cases}, \quad x, y, z \in [0, 2],$$

所以点 P 的轨迹为双曲线的一部分, 满足条件的点 P 有无数个, 故①正确, ②错误;

因为 $x \in [0, 2]$, 则 $(x-1)^2 \in [0, 1]$, 可得 $y^2 = (x-2)^2 + x^2 = 2(x-1)^2 + 2 \in [2, 4]$, 即 $y \in [\sqrt{2}, 2]$,

$$\text{则 } BP = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2} = \sqrt{y^2 + (y-2)^2} = \sqrt{2(y-1)^2 + 2} \leq 4,$$

当且仅当 $y = 2$ 时, 等号成立,

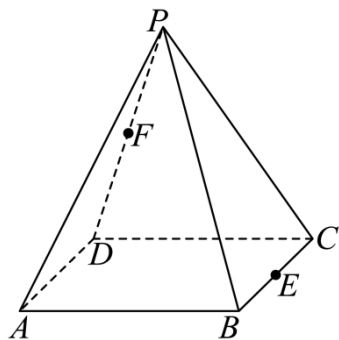
所以线段 BP 长度的最大值为 2, 故③正确;

因为点 P 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $d = 2 - y \leq 2 - \sqrt{2}$,

所以三棱锥 $P-BB_1C$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times (2 - \sqrt{2}) = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$, 故④正确.

7. 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 点 E 和 F 分别为棱 BC 和 PD 的中点. 若过 A, E, F 三点的平面与侧面 PCD 的交线线段长为 $\sqrt{7}$, $\cos \angle PDC = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则该四棱锥的外接球的体积为

_____.



【答案】 $32\sqrt{3}\pi$

【分析】由题意找出过 A 、 E 、 F 三点的平面与侧面 PCD 的交线线段 FG ，证明 G 为 PC 靠近 C 的三等分点，再由已知求解三角形可得正四棱锥的底面边长与侧棱长，然后求解外接球的半径，代入球的体积表面积公式得答案.

【详解】如图，连接 AE 并延长交 DC 的延长线于 H ，连接 FH 交 PC 于 G ，
因为 E 为 BC 的中点，所以 C 为 DH 的中点，

在平面 PDH 中，过 C 作 $CK \parallel PD$ ，交 FH 于 K ，则 $CK = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}PF$ ，

所以 $GC = \frac{1}{2}PG$ ，

由已知可得，四棱锥 $P-ABCD$ 为正四棱锥，

在等腰三角形 PDC 中，由 $\cos \angle PDC = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，得 $PD = \sqrt{2}DC$ ，

设 $DC = \sqrt{2}a$ ，则 $PD = 2a$ ， $PF = a$ ， $PG = \frac{4}{3}a$ ，

$\cos \angle DPC = \cos(\pi - 2\angle PDC) = -\cos 2\angle PDC = 1 - 2\cos^2 \angle PDC = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ ，

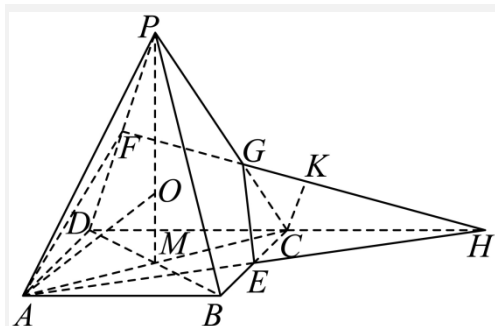
在 $\triangle PFG$ 中，由余弦定理可得， $FG^2 = 7 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{4}{3}a \cdot \frac{3}{4}$ ，解得 $a = 3$ ，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 $3\sqrt{2}$ ，侧棱长为 6，

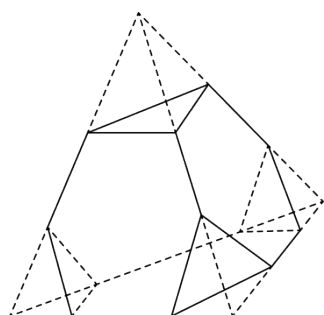
连接 AC 、 BD ，相交于 M ，连接 PM ，则 PM 为正四棱锥的高，则 $PM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ，

设四棱锥外接球的球心为 O ，连接 OA ，则 $(3\sqrt{3} - R)^2 + 3^2 = R^2$ ，解得 $R = 2\sqrt{3}$ ，

所以该四棱锥的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3 = 32\sqrt{3}\pi$ 。



8. 如图，从正四面体的4个顶点处截去4个相同的正四面体，得到一个由正三角形与正六边形构成的多面体.若该多面体的表面积是 $7\sqrt{3}$ ，则该多面体外接球的表面积是_____.



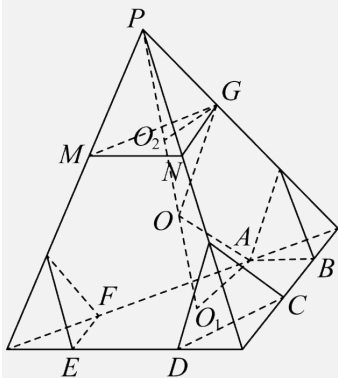
【答案】 $\frac{11}{2}\pi$

【分析】求出原正四面体外接球的半径，从而可求出多面体外接球的球心到底面的距离，求出多面体的棱长，即可求出其外接球的半径，从而可求出外接球的表面积.

【详解】解：由题意可得多面体的棱长为原正四面体棱长的 $\frac{1}{3}$ ，设原正四面体的棱长为 a ，则其表面积为 $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 = \sqrt{3}a^2$ ，由图易知该多面体与原正四面体相比较，表面积少了8个边长为 $\frac{1}{3}a$ 的正三角形的面积，

所以该多面体的表面积为 $\sqrt{3}a^2 - 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{7\sqrt{3}a^2}{9} = 7\sqrt{3}$ ，所以 $a = 3$.

如图， O_1 是下底面正六边形 $ABCDEF$ 的中心， O_2 是上底面正三角形 MNG 的中心，



由正四面体的对称性可知截角四面体的外接球的球心 O 在原正四面体的高 PO_1 上,

$$O_2G = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, O_1O_2 = \frac{2}{3}PO_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3^2 - \left(3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

设球 O 的半径为 R , 在 $\text{Rt}\triangle OO_1A$ 中, $OA^2 = O_1A^2 + OO_1^2$, 所以 $R^2 = 1 + OO_1^2$,

在 $\text{Rt}\triangle OO_2G$ 中, $OG^2 = OO_2^2 + O_2G^2$,

$$\text{所以 } R^2 = O_2G^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - OO_1\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - OO_1\right)^2,$$

$$\text{所以 } OO_1^2 + 1 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - OO_1\right)^2, \text{ 解得 } OO_1 = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 所以 } R = \sqrt{OO_1^2 + 1} = \frac{\sqrt{22}}{4},$$

所以该多面体外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{11}{2}\pi$.

9. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长均为 2, M, N 分别是棱 BB_1, B_1C_1 的中点, 过点 A ,

M, N 的平面分别交直线 BC, CC_1 于点 D, E , 则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 与三棱锥 $E-ACD$ 公共部分的体积为_____.

【答案】 $\frac{23\sqrt{3}}{18} / \frac{23}{18}\sqrt{3}$

【分析】先证明 $\frac{EC_1}{EC} = \frac{EF}{EA} = \frac{FC_1}{AC}$, 再确定所求几何体可通过三棱台 FNC_1-ADC 截去三棱锥 $M-ABD$ 得到, 结合台体和锥体体积公式求结论.

【详解】如图, 连接 NM 并延长, 与 CB 的延长线交于点 D , 连接 AD , 延长 MN 与 CC_1 的延长线交于点 E , 连接 AE , 交 A_1C_1 于点 F , 连接 AM, FN . 因为 $BM = B_1M$, $\angle BMD = \angle B_1MN$, $\angle MDB = \angle MNB_1$,

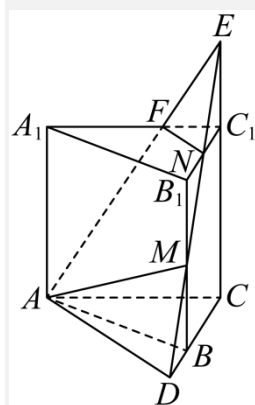
所以 $\triangle DBM \cong \triangle NB_1M$ ，所以 $DB = NB_1$ ， $\frac{DB}{DC} = \frac{BM}{CE} = \frac{1}{3}$ ，

同理可得 $\frac{EC_1}{EC} = \frac{EF}{EA} = \frac{FC_1}{AC} = \frac{1}{3}$ 。

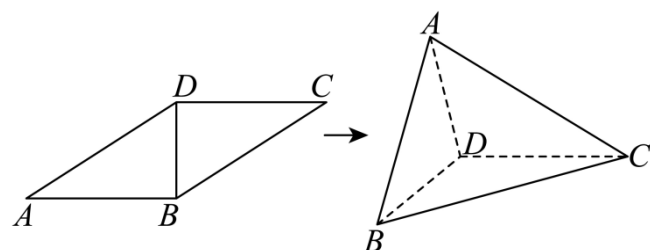
三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 和三棱锥 $E - ACD$ 的公共部分为几何体 FNC_1CBMA ，

其体积为三棱台 $FNC_1 - ADC$ 的体积和三棱锥 $M - ABD$ 的体积之差，

$$\text{即 } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times 2 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \right) \times 1 = \frac{13\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{23\sqrt{3}}{18}.$$



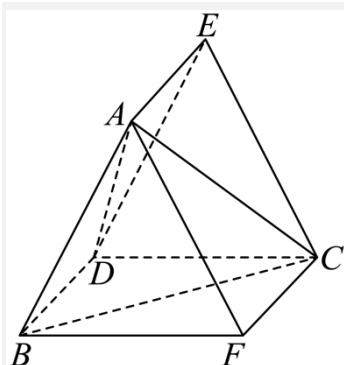
10. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 2$ ， $BD = 1$ ，现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，得到三棱锥 $A - BCD$ ，且三棱锥 $A - BCD$ 外接球的表面积为 7π ，则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\sqrt{7}$

【分析】作出辅助线，转化为三棱柱的外接球问题，结合正弦定理和余弦定理得到答案

【详解】如图，过 B 作 $BF \parallel CD$ ，且 $BF = CD$ ，过 D 作 $DE \parallel AB$ ，且 $DE = AB$ ，



连接 AE ， AF ， CF ， CE ，根据题意可知 $BD \parallel AE \parallel FC$ ， $BD = AE = FC$ ，

由题意知 $BD \perp AB$ ， $BD \perp CD$ ， $BF \parallel CD$ ，所以 $BD \perp BF$ ，

又 AB ， BF 是平面 ABF 内的两条相交直线，所以 $BD \perp$ 平面 ABF ，

所以三棱柱 $ABF-EDC$ 为直三棱柱。

则三棱锥 $A-BCD$ 与直三棱柱 $ABF-EDC$ 的外接球相同，设其半径为 R 。

由 $S = 4\pi R^2 = 7\pi$ ，知 $R = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，设三角形 ABF 的外接圆半径为 r ，

则 $R^2 = r^2 + \left(\frac{CF}{2}\right)^2$ ，求得 $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

设 $AC = x$ ，则 $AF = \sqrt{x^2 - 1}$ ，在 $\triangle ABF$ 中，设 $\angle ABF = \theta$ ， $AB = BF = \sqrt{3}$ ，

则 $\cos \theta = \frac{AB^2 + BF^2 - AF^2}{2 \cdot AB \cdot BF} = \frac{7 - x^2}{6}$ ， $\sin \theta = \frac{AF}{2r} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{6}}$ ，

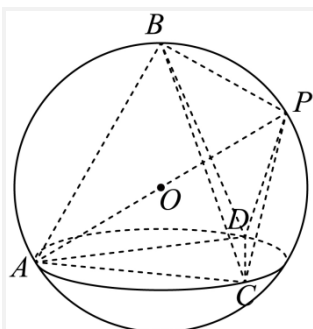
代入 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，解得 $x^2 = 7$ 或 $x^2 = 1$ （舍）， $\therefore x = \sqrt{7}$ 。

11. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $2\sqrt{6}$ ，点 P 为其外接球上的动点，则点 P 到该正四面体 $ABCD$ 四个面的距离之和的最大值为_____。

【答案】8

【分析】用等体积转化法，将到各个面的距离之和最大转化为到一个面的距离最大，计算该位置得到最大值。

【详解】由对称性，不妨设点 P 与点 A 分别在平面 BCD 的异侧，设正四面体的高为 h ，四个侧面的面积为 S ，点 P 到平面 ABC ，平面 ABD ，平面 ACD ，平面 BCD 的距离分别为 d_1 ， d_2 ， d_3 ， d_4 ；



如图所示, 有 $V_{P-ABC} + V_{P-ABD} + V_{P-ACD} = V_{A-BCD} + V_{P-BCD}$,

根据三棱锥的体积公式, 可得:

$$\frac{1}{3}S \cdot (d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{3}S \cdot h + \frac{1}{3}S \cdot d_4,$$

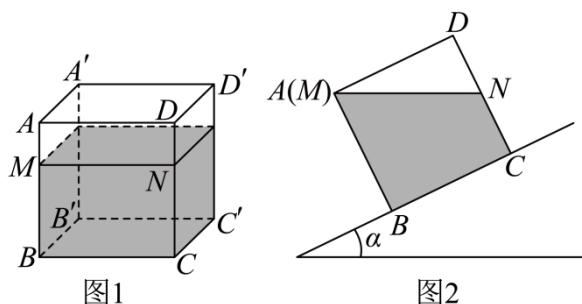
$$\text{可得 } d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h + 2d_4,$$

结合球的性质, 当线段 AP 恰好为外接球的直径位置时, d_4 最大, 外接球的直径为:

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \times 2\sqrt{6} = 6, \text{ 此时 } d_4 = 6 - h.$$

代入正四面体的棱长计算可得 $h = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 2\sqrt{6} = 4$, 此时 $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)_{\max} = 4 + 4 = 8$.

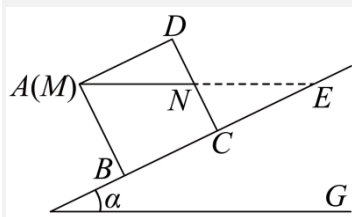
12. 如图 1, 棱长为 9cm 的密封透明正方体容器水平放置在桌面上, 水面高度 $BM = 7\text{cm}$. 将此正方体放在坡角为 α 的斜坡上, 此时水面 MN 恰好与点 A 齐平, 其主视图如图 2 所示, 则 $\frac{\sin\alpha \sin 2\alpha + \sin\alpha + 2\cos^3\alpha}{\cos\alpha} =$ _____.



【答案】 $\frac{22}{9} / 2\frac{4}{9}$

【分析】 延长 AN , 交直线 BC 于点 E , 设 $DN = x\text{cm}$, 由水的体积不变可列式求出 $x = 4$, 再求出 $\tan\alpha$, 由二倍角的正弦公式和同角三角函数的平方公式化简已知式, 代入即可得出答案.

【详解】 如图, 延长 AN , 交直线 BC 于点 E ,



由题意可得： $AD = BC = CD = 9, \angle D = 90^\circ, AD \parallel BC, AN \parallel FG$ ，

设 $DN = x \text{ cm}$ ，则 $CN = CD - DN = (9 - x) \text{ cm}$ ，

因为密封透明正方体容器水平放置在桌面上与放在坡角为 α 的斜坡上，

容器里的水的体积不变，且放在坡角为 α 的斜坡上时，

水的体积等于长为 9 cm 、宽为 9 cm 、高为 $(9 - x) \text{ cm}$ 的长方体的体积与长为 9 cm 、宽为 9 cm 、高为 $x \text{ cm}$ 的长方体的体积的一半之和，

因为 $9 \times 9 \times (9 - x) + \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \cdot x = 9 \times 9 \times 7$ ，解得： $x = 4$ ，即 $DN = 4 \text{ cm}$ ，

因为 $AN \parallel FG$ ，所以 $\angle AEF = \angle F = \alpha$ ，

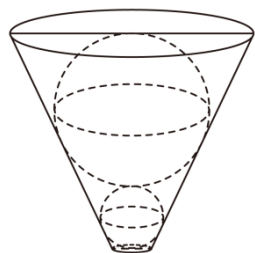
因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $\angle DAN = \angle AEF = \alpha$ ，

所以 $\tan \alpha = \tan \angle DAN = \frac{DN}{AD} = \frac{4}{9}$ ，

$$\frac{\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin \alpha + 2\cos^3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha + 2\cos^3 \alpha}{\cos \alpha} = 2\sin^2 \alpha + \tan \alpha + 2\cos^2 \alpha = 2 + \tan \alpha = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$$

.

13. 如图，圆台形容容器内放进半径分别为 2 和 4 的两个实心铁球，小球与容器下底面、容器壁均相切，大球与小球、容器壁、容器上底面均相切，若向该容器内注满水，则水的体积为 _____.

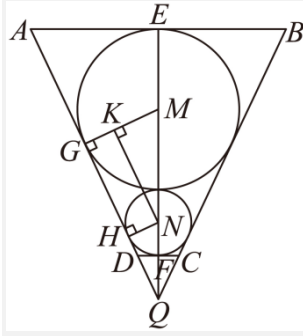


【答案】 72π

【分析】通过轴截面结合相切的几何性质分析解决圆台的上下底面半径及高，求得圆台的体积，即可得水的体积.

【详解】作几何体的轴截面图如图， M, N 分别是小球和大球的球心，

Q 是圆台的轴截面等腰梯形 $ABCD$ 两腰 AD 和 BC 的延长线的交点.



G, H 分别是球 M 和球 N 与圆台侧面的切点, E, F 分别是与圆台上

下底面的切点.

则 $GM \perp AQ, NH \perp AQ, QE \perp AB, QF \perp CD$, 且 $GM = EM = 4, NH = NF = 2, EF = 8 + 4 = 12$.

过 N 点作 $NK \parallel AQ$ 交 GM 于 K , 显然 $NK \perp GM$, 可知四边形 $NHGK$ 为矩形,

且 $MN = 6, MK = MG - KG = MG - NH = 2$,

在直角三角形 MNK 中, $\sin \angle MNK = \frac{MK}{MN} = \frac{1}{3}$,

且 $\angle MNK$ 为锐角, 则 $\cos \angle MNK = \sqrt{1 - \sin^2 \angle MNK} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \angle MNK = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

由 $NK \parallel AQ$ 可得 $\angle MNK = \angle EQA$, 所以 $\sin \angle EQA = \frac{1}{3}, \tan \angle EQA = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

在直角三角形 NHQ 中, $NH = 2$, 得 $NQ = \frac{NH}{\sin \angle EQA} = 6$, 所以 $FQ = NQ - NF = 6 - 2 = 4$.

在直角三角形 DFQ 中, $DF = FQ \cdot \tan \angle EQA = \sqrt{2}$.

在直角三角形 EQA 中, $EQ = EF + FQ = 12 + 4 = 16, AE = EQ \cdot \tan \angle EQA = 4\sqrt{2}$.

即圆台的上底面半径 $AE = 4\sqrt{2}$, 下底面半径 $DF = \sqrt{2}$, 高 $EF = 12$.

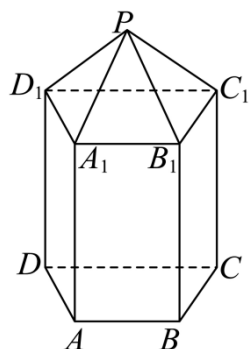
可得圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot EF(AE^2 + AE \cdot DF + DF^2) = 168\pi$,

所以水的体积为 $168\pi - \frac{4}{3}\pi \times 2^3 - \frac{4}{3}\pi \times 4^3 = 72\pi$.

故答案为: 72π .

14. 如图, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD, \angle ADC = 60^\circ$,

$AB = AD = 2$. 点 P 在平面 CDD_1C_1 内, $\triangle PC_1D_1$ 是等腰三角形.



- ①若 $PD_1 = 4$ ，直线 PD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为_____；
- ②若二面角 $P-A_1D_1-A$ 为 $\frac{2\pi}{3}$ ，四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ / $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

【分析】①问求线面角的正弦值，由等腰三角形条件确定点 P 的坐标特征，再利用空间中两点距离公式及线面角的定义，将正弦值转化为垂线段 d 与斜线段 PD_1 的比值直接求解；

②建立空间直角坐标系，依次求出底面梯形几何量（下底长、高、面积），并利用法向量（定义法列方程组）与二面角的余弦值建立方程解出高 d ，最后代入棱锥体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ 得出结果.

【详解】已知直四棱柱底面 $ABCD$ 是等腰梯形， $AB \parallel CD$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $AB = AD = 2$.
过点 A, B 分别作底边 CD 的垂线，垂足分别为 E, F .

因为 $AB \parallel CD$ ，所以四边形 $AEFB$ 为矩形， $EF = AB = 2$.

在 $\triangle ADE$ 中， $\angle ADE = \angle ADC = 60^\circ$ ， $AD = 2$ （腰长），由三角函数定义：

$$AE = AD \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad DE = AD \cdot \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

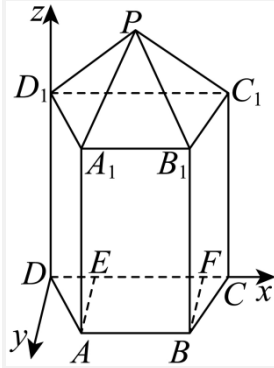
由等腰梯形的对称性，得 $CF = DE = 1$.

因此下底 $CD = DE + EF + CF = 1 + 2 + 1 = 4$.

上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 与底面全等, 其面积: $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{(AB+CD)}{2} \times \text{高} = \frac{(2+4)}{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

以 D 为原点, DC 方向为 x 轴, 梯形高方向 (在底面内垂直于 DC) 为 y 轴,

侧棱方向为 z 轴. 设侧棱长为 H , 得各点坐标:



$$D(0,0,0), C(4,0,0), A(1,\sqrt{3},0), B(3,\sqrt{3},0),$$

$$D_1(0,0,H), C_1(4,0,H), A_1(1,\sqrt{3},H), B_1(3,\sqrt{3},H),$$

平面 CDD_1C_1 即为 $y=0$ 平面. 点 P 在该平面内, 且 $\triangle PC_1D_1$ 为等腰三角形,

故 P 在 D_1C_1 的垂直平分线上, 得 $P(2,0,z)$.

记 d 为 P 到上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离,

$$\text{已知 } PD_1 = 4, \text{ 则 } PD_1 = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (z-H)^2} = \sqrt{4+d^2} = 4, \text{ 解得 } d = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{设直线 } PD_1 \text{ 与平面 } ABCD \text{ 所成角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{d}{PD_1} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 在平面 } A_1D_1A \text{ 内 } \overrightarrow{D_1A} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DD_1} = (0, 0, H).$$

$$\text{设平面 } A_1D_1A \text{ 的法向量 } \vec{n}_1 = (a, b, c), \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{D_1A} = a + \sqrt{3}b = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DD_1} = Hc = 0 \end{cases},$$

$$\text{取 } c = 0, b = 1, \text{ 则 } a = -\sqrt{3}, \text{ 故 } \vec{n}_1 = (-\sqrt{3}, 1, 0).$$

设平面 PA_1D_1 的法向量 $\vec{n}_2$,

$$\text{点 } P \text{ 坐标为 } (2, 0, z), \text{ 取 } z = H - d, \text{ 则 } \overrightarrow{D_1P} = (2, 0, -d). \text{ 另取 } \overrightarrow{D_1A_1} = (1, \sqrt{3}, 0).$$

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{D_1A_1} = a + \sqrt{3}b = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{D_1P} = 2a + 0 \cdot b - cd = 0 \end{cases}, \text{ 取 } b = d, \text{ 则 } a = -\sqrt{3}d, \text{ 代入得 } cd = -2\sqrt{3}d,$$

$$\text{又 } d > 0, \text{ 故 } c = -2\sqrt{3}, \text{ 因此 } \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}d, d, -2\sqrt{3}).$$

二面角 $P-A_1D_1-A$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ，其余弦值为 $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 。

两法向量夹角的余弦值为： $\left| \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ 。

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}d) + 1 \cdot d + 0 \cdot (-2\sqrt{3}) = 3d + d = 4d,$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} = 2,$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{(-\sqrt{3}d)^2 + d^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{3d^2 + d^2 + 12} = 2\sqrt{d^2 + 3},$$

所以： $\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{4d}{2 \cdot 2\sqrt{d^2 + 3}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 3}},$

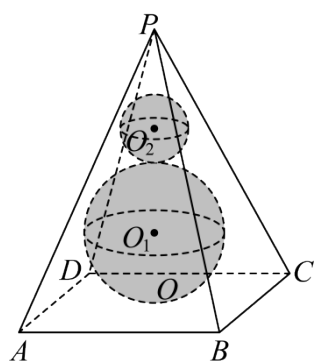
结合二面角方向判断，二面角为钝角 $\frac{2\pi}{3}$ ，余弦值为负，

得： $-\frac{d}{\sqrt{d^2 + 3}} = -\frac{1}{2}$ ，解得 $d = 1$ （取正值）。

四棱锥体积： $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{底}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot d.$

代入得： $V = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}.$

15. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧棱与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，该四棱锥侧面积为 12，且大球 O_1 ，与小球 O_2 均与该四棱锥的四个侧面相切，大球 O_1 与小球 O_2 相切，大球 O_1 与底面 $ABCD$ 相切，则三棱锥 O_2-PBC 的体积为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【分析】根据正四棱锥及球的性质，结合已知条件，运用几何法求出侧面积及小球半径，进而利用三棱锥的体积公式求解。

【详解】设底面正方形的中心为 O ，连接 PO ，则正四棱锥的高为 PO ，

侧棱与底面所成角为 $\angle PAO$ ，则 $\cos \angle PAO = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

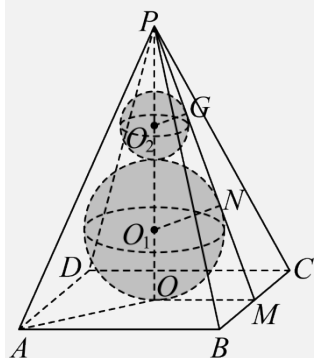
$$\therefore \tan \angle PAO = \frac{\sin \angle PAO}{\cos \angle PAO} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2, \text{ 即 } PO = 2OA,$$

设底面边长为 a ，侧面斜高为 h' ，则 $OA = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ，

$$h' = \sqrt{PO^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2},$$

$\therefore$ 侧面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times a \times \frac{3}{2}a = 12$ ，解得 $a = 2$ ，

取 AB 中点 M ，连接 PM ，作 $O_1N \perp PM$ ， $O_2G \perp PM$ ，则 $PM = h' = \frac{3}{2}a = 3$ ，



设大球半径为 R ，小球半径为 r ，则 $R = O_1N, r = O_2G$ ，

$$\therefore \sin \angle MPO = \frac{OM}{PM} = \frac{1}{3} = \frac{O_1N}{PO_1} = \frac{R}{PO_1} = \frac{R}{2\sqrt{2} - R}, \text{ 解得 } R = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{同理 } \frac{1}{3} = \frac{O_2G}{PO_2} = \frac{r}{\sqrt{2} - r}, \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore V_{O_2-PBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle PBC} \cdot O_2G = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$