

数列新定义

一、解答题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 + a_6 = 16$, $a_5 = 3a_2$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n ;

(2)在数列的每相邻两项间插入这两项的积, 而形成新的数列, 这样的过程叫做该数列的一阶“ P 拓展”.例如对于数列 $1, 3$, 一阶“ P 拓展”得到数列 $1, 3, 3$; 二阶“ P 拓展”得到数列 $1, 3, 3, 9, 3$; 依次构造, 设 n 阶“ P 拓展”得到数列 $1, x_1, x_2, \dots, x_m, 3$, ($m \in \mathbb{N}^*$), 设

$b_n = \log_3(1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_m \cdot 3)$, 则 $b_1 = \log_3(1 \times 3 \times 3) = 2$, $b_2 = \log_3(1 \times 3 \times 3 \times 9 \times 3) = 5$.

(i) 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(ii) 已知 m 为正整数, 设 $c_i = \frac{1}{6\left(b_{2^{i-1}} - \frac{1}{2}\right) + 9^m}$, 求 $\sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^{2m-1} c_i$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是各项均为正整数的递增数列, $a_1 + b_1 = 3$, $a_3 + b_2 = 9$, $b_2 = b_1^2$.

(1)求 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是无穷递增数列, 且从 $\{u_n\}$ 中任取不少于两项(互不相同)之和, 都不

是 $\{v_n\}$ 中的项，则称 $\{u_n\}$ 被 $\{v_n\}$ 拉黑.

(i) 求 $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ ，并判断 $\{S_n\}$ 是否被 $\{a_n\}$ 拉黑，说明理由.

(ii) 设 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{3b_k^2}{(b_k^2-1)(b_{k+1}^2-1)}$ ， $\frac{1}{3} - T_n = \frac{1}{c_n-1}$ ，任取一系列系数 $\{\lambda_n\}$ ，满足

$\lambda_n \in \{1, 2, 3\} (n \in \mathbf{N}^*)$. 令 $x_n = \lambda_n c_n$ ，求证：无论 λ_n 如何取值， $\{x_n\}$ 都被 $\{c_n\}$ 拉黑.

3. 在数列 $\{a_n\}$ 中，按照下面方式构成“次生数列”

$\{b_n\} : b_1 = a_1, b_2 = \min\{a_1, a_2\}, b_3 = \min\{a_1, a_2, a_3\}, \cdots, b_n = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} (n \geq 2)$ ，其中 $\min$

$\{a_1, a_2, \cdots, a_i\} (2 \leq i \leq n)$ 表示数列 $a_1, a_2, \cdots, a_i$ 中最小的项.

(1)若数列 $\{a_n\}$ 中各项均不相等且只有4项， $a_2 = 1, a_n \in \{2, 3, 4\} (n = 1, 3, 4)$ ，请写出 $\{a_n\}$ 的所有

“次生数列” $\{b_n\}$ ；

(2)若 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -2, a_4 = 64$ ，且 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等比数列， $\{a_n\}$ 的“次生数列”为 $\{b_n\}$.

(i) 求 $b_3 + b_{10}$ 的值；

(ii) 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ，若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $\lambda \left(27 - \frac{10}{n} - 18n \right) > \frac{9S_{2n} + 20}{|a_n|}$ 恒成立，

求实数 λ 的取值范围.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = 2S_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n ，且 $B_4 = 4B_2$ ， $b_{2n} = 2b_n + 1, (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $c_n = \frac{1}{2}a_nb_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

(3) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，在数列 $\{d_n\}$ 中是否存在 3 项 d_m, d_k, d_p ，(其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列？若存在，求出这样的 3 项，若不存在，请说明理由。

5. 从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 k 项，第 $k+1$ 项，...，第 $k+m-1$ 项 ($k \in \mathbf{N}^*, m \geq 2$)，并按原顺序构成的新数列称为数列 $\{a_n\}$ 的“ (k, m) 连续子列”。已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 0$ ， $a_2 = 1$ ，对 $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ，

数列 $\{a_n\}$ 的“(2k,3)连续子列”是公比为 $\frac{k+1}{k}$ 的等比数列.

(1)求 a_4 , a_5 的值;

(2)求 a_{2n+1} ($n \in \mathbf{N}^*$);

(3)证明: $\sum_{i=1}^n \frac{2i+3}{(a_{2i}+a_{2i+1})2^{i+1}} < \frac{7}{12}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

6. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 对于给定的 k ($k=1, 2, 3 \dots n$), 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k , 公差为 $2a_k-1$ 的等差数列, 记 $T^{(k)}$ 的第 i 项为 $b_i^{(k)}$. 若 $b_1^{(1)}+b_1^{(2)}=b_2^{(2)}$, 且 $b_2^{(1)}=b_3^{(2)}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $c_n = \frac{(b_n^{(2)}+1)^2}{2a_n \cdot 3^n}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 M_n

(3)若 $d_n = \frac{b_n^{(n)}+n-1}{a_n} - \frac{n-1}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)}$, 求使得 $[d_1]+[d_2]+[d_3]+\dots+[d_n] \leq 2025$ 成立的

最大整数 n 的值. (其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最

大整数)

7. 对于 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_{n+1} - c_n > 1$, 则称这个数列为“优美数列”.

(1) 已知数列 $-1, \log_4 m, \log_2 m$ 是“优美数列”, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若首项为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 为“优美数列”, 且其前 n 项和 S_n 满足 $S_n \leq n^2 + \frac{1}{2}n$ 恒成立, 求 $\{a_n\}$ 的公差的取值范围;

(3) 已知各项均为正整数的等比数列 $\{a_n\}$ 是“优美数列”, 数列 $\left\{\frac{1}{3}a_n\right\}$ 不是“优美数列”, 若

$b_n = \frac{a_{n+1}}{2^n + 1}$, 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为“优美数列”, 并说明理由.

8. 给定数列 $\{A_n\}$, 若对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \neq n$, $A_m + A_n$ 是 $\{A_n\}$ 中的项, 则称 $\{A_n\}$ 为“ H 数列”; 若对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \neq n$, $A_m A_n$ 是 $\{A_n\}$ 中的项, 则称 $\{A_n\}$ 为“ J 数列”.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2^n - 1$, 试判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“ J 数列”, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 既是等比数列又是“ J 数列”，且 $b_1 = 8$ ， $b_2 \geq 16$ ，求公比 q 的所有可能值；

(3) 设等差数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， T_n 是数列 $\{c_n\}$ 中的项，求证：数列 $\{c_n\}$ 是“ H 数列”.

9. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 4$ ， $a_3 - a_1 = 8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和 $\sum_{i=n}^{2n} a_i$ ；

(2) 如果数列 $\{b_n\}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，均满足 $b_{n+2} - b_{n+1} > b_{n+1} - b_n$ ，则称 $\{b_n\}$ 为“速增数列”.

(i) 判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“速增数列”？说明理由；

(ii) 若数列 $\{b_n\}$ 为“速增数列”，且任意项 $b_n \in \mathbf{Z} (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $b_1 = 1$ ， $b_2 = 3$ ， $b_k = 2024$ ，求正整数 k 的最大值.

10. 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 对于给定的 $k(k=1,2,3\cdots n)$, 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k , 公差为 $2a_k-1$ 的等差数列 $\{a_n\}$, 记 $T^{(k)}$ 的第 i 项为 $b_i^{(k)}$. 若 $b_1^{(1)}+b_1^{(2)}=b_2^{(2)}$, 且 $b_2^{(1)}=b_3^{(2)}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i^{(2)}b_{i+1}^{(2)}}$;

(3)求 $\sum_{i=1}^n b_i^{(k)}$.