

数列放缩练习

一、解答题

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_{n+1}=3a_n, n \in \mathbf{N}^*$. 设 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $b_1 \neq 0$,

$$2b_n - b_1 = S_1 \cdot S_n, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = b_n \cdot \log_3 a_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(3) 证明: 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 有 $\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{3}{2}$.

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$; $b_n = 2^{n-1}$ (2) $T_n = 2 + (n-2) \cdot 2^n$ (3) 证明见解析.

【难度】0.65

【知识点】写出等比数列的通项公式、由递推关系证明等比数列、错位相减法求和、数列综合

【分析】(1)由题意可得数列 $\{a_n\}$ 是以3为公比的等比数列, 可得通项公式, 当 $n=1$ 时先求出 b_1 , 当 $n>1$ 时, 由 $b_n = S_n - S_{n-1}$ 可判断出数列 $\{b_n\}$ 是以2为公比的等比数列, 可得其通项公式.

(2)由 $c_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}$ 由错位相减法求和可得答案.

(3) $\frac{1}{a_n - b_n} = \frac{1}{3^{n-2} + 2(3^{n-2} - 2^{n-2})}$, 当 $n=2$ 时验证不等式成立, 当 $n>2$ 时, $3^{n-2} - 2^{n-2} > 0$, 得出 $\frac{1}{a_n - b_n} < \frac{1}{3^{n-2}}$, 然后由等比数列求和公式可证明.

【详解】(1) 由 $a_{n+1}=3a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以3为公比的等比数列, 则 $a_n=3^{n-1}$

又当 $n=1$ 时, $2b_1 - b_1 = S_1 \cdot S_1$, 又 $b_1 \neq 0$, 即 $b_1 = S_1 = 1$

所以 $2b_n - 1 = S_n$

当 $n>1$ 时, $b_n = S_n - S_{n-1} = 2b_n - 1 - (2b_{n-1} - 1) = 2b_n - 2b_{n-1}$

所以 $b_n = 2b_{n-1}$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是以2为公比的等比数列, 则 $b_n = 2^{n-1}$

(2) 由 $c_n = b_n \cdot \log_3 a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}$

$$T_n = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + (n-1) \times 2^{n-1}$$

$$\text{则 } 2T_n = 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^n$$

$$\text{两式相减得: } -T_n = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^n = -2 - (n-2) \cdot 2^n$$

$$\text{所以 } T_n = 2 + (n-2) \cdot 2^n$$

$$(3) \frac{1}{a_n - b_n} = \frac{1}{3^{n-1} - 2^{n-1}} = \frac{1}{3 \times 3^{n-2} - 2^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-2} + 2(3^{n-2} - 2^{n-2})}$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{1}{a_2 - b_2} = \frac{1}{3-2} = 1 < \frac{3}{2}$$

$$\text{当 } n>2 \text{ 时, } 3^{n-2} - 2^{n-2} > 0, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n - b_n} = \frac{1}{3^{n-2} + 2(3^{n-2} - 2^{n-2})} < \frac{1}{3^{n-2}}$$

$$\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) < \frac{3}{2}$$

$$\text{所以对任意 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \geq 2, \text{ 有 } \frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{3}{2}$$

【点睛】关键点睛：本题考查等比数列的通项公式，错位相减法求和，将数列放缩成等比数列求和证明数列不等式，解答本题的关键是当 $n>2$ 时， $3^{n-2} - 2^{n-2} > 0$ ，所以 $\frac{1}{a_n - b_n} < \frac{1}{3^{n-2}}$ ，

则 $\frac{1}{a_2 - b_2} + \frac{1}{a_3 - b_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - b_n} < \frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}}$ ，属于中档题。

2. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 为等比数列，公比大于 1. 已知

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 4, \quad b_2 + S_2 = 11, \quad b_3 + S_3 = 22.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{(3a_{n+1} - 1)}{a_n(a_n + 1)b_n}$ ，求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和；

(3) 设 $d_n = a_n b_n$ ，求证： $\frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_3 - d_2} + \frac{1}{d_4 - d_3} + \cdots + \frac{1}{d_{n+1} - d_n} < \frac{1}{4}$.

【答案】(1) $a_n = n$, $b_n = 2^{n+1}$

$$(2) \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} - \frac{1}{2}$$

(3)证明见解析

【难度】0.65

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算、等比数列通项公式的基本量计算、裂项相消法求和、数列不等式恒成立问题

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q>1)$ ，依题意得到方程组，求出 d 、 q ，即可得解；

(2) 由(1)可得 $c_n = (-1)^n \left[\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right]$ ，利用裂项相消法计算可得；

(3) 由(1)可得 $d_n = n \times 2^{n+1}$ ，即可得到 $\frac{1}{d_{n+1} - d_n} = \frac{1}{(n+2) \times 2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+2}}$ ，利用放缩法及等比数列求和公式计算可得。

【详解】(1) 依题意设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q>1)$ ，

$$\text{则 } S_2 = a_1 + a_2 = d + 2, \quad S_3 = 3a_1 + \frac{3(3-1)}{2}d = 3d + 3,$$

$$\text{又 } b_2 + S_2 = 11, \quad b_3 + S_3 = 22, \quad \text{所以 } \begin{cases} 4q + 2 + d = 11 \\ 4q^2 + 3 + 3d = 22 \end{cases}, \quad \text{解得 } \begin{cases} q = 2 \\ d = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} q = 1 \\ d = 5 \end{cases} \quad (\text{舍去}),$$

所以 $a_n = n$ ， $b_n = 2^{n+1}$ 。

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } c_n = (-1)^n \frac{(3a_{n+1} - 1)}{a_n(a_n + 1)b_n} = (-1)^n \frac{(3n + 2)}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = (-1)^n \left[\frac{1}{n \cdot 2^n} + \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right],$$

设 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 T_{2n} ，

$$\text{所以 } T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2n}$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\frac{1}{1 \times 2^1} + \frac{1}{2 \times 2^2}\right) + \left(\frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{3 \times 2^3}\right) - \left(\frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{4 \times 2^4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}} + \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 因为 } d_n = a_n b_n = n \times 2^{n+1}, \text{ 所以 } d_{n+1} - d_n = (n+1) \times 2^{n+2} - n \times 2^{n+1} = (n+2) \times 2^{n+1},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{d_{n+1} - d_n} = \frac{1}{(n+2) \times 2^{n+1}} < \frac{1}{2 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_3 - d_2} + \frac{1}{d_4 - d_3} + \cdots + \frac{1}{d_{n+1} - d_n}$$

$$< \frac{\frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+2} < \frac{1}{4}.$$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), 正项数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$),

且 $2a_1 = b_1 = 2$, $a_4 = b_2$, $b_5 = 4b_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知 $c_n = \begin{cases} a_{2n-1}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3a_n - 2)b_n - 2}{(b_n + 1)(b_{n+2} + 1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求: $\sum_{k=1}^{2n+1} c_k$;

(3) 求证: $\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} < \frac{5}{4}$.

【答案】(1) $a_n = n$, $b_n = 2^n$

(2) $(2n+1)(n+1) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right)$

(3) 证明见解析

【难度】0.4

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算、等比数列通项公式的基本量计算、裂项相消法求和、数列不等式恒成立问题

【分析】(1) 由题意可得 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, 再分别求解公差与公比即可;

(2) 代入化简可得 $c_n = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2^n+1} - \frac{n+2}{2^{n+2}+1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 再分组根据等差数列与裂项相消求和即可;

(3) 放缩可得 $\frac{1}{a_n^3} < \frac{1}{n(n+1)(n-1)}$ ($n \geq 2$), 再裂项相消求和即可.

【详解】(1) 由题意知, $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , $\{b_n\}$ 为等比数列, 设公比为 q ,

又 $2a_1 = b_1 = 2$, $a_4 = b_2$, $b_5 = 4b_3$, $\therefore q^2 = \frac{b_5}{b_3} = 4$, $\therefore q = 2$, $b_n = 2^n$.

$\therefore a_4 = b_2 = 4 = a_1 + 3d$, $d = 1$, $\therefore a_n = n$.

(2) 由 $c_n = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ \frac{(3n-2)2^n - 2}{(2^n+1)(2^{n+2}+1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases} = \begin{cases} 2n-1, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2^n+1} - \frac{n+2}{2^{n+2}+1}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$,

$$\begin{aligned}
& \therefore \sum_{k=1}^{2n+1} c_k = (c_1 + c_3 + c_5 + \dots + c_{2n+1}) + (c_2 + c_4 + c_6 + \dots + c_{2n}) \\
& = [1 + 5 + 9 + \dots + (4n+1)] \\
& + \left[\left(\frac{2}{2^2+1} - \frac{4}{2^4+1} \right) + \left(\frac{4}{2^4+1} - \frac{6}{2^6+1} \right) + \left(\frac{6}{2^6+1} - \frac{8}{2^8+1} \right) + \dots + \left(\frac{2n}{2^{2n}+1} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right) \right] \\
& = \frac{[1 + (4n+1)](n+1)}{2} + \left(\frac{2}{5} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right) \\
& = (2n+1)(n+1) + \left(\frac{2}{5} - \frac{2n+2}{2^{2n+2}+1} \right); \\
(3) \quad & \frac{1}{a_n^3} = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n \cdot n^2} < \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{n(n+1)(n-1)} (n \geq 2), \\
& = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right] (n \geq 2), \\
& \therefore \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\
& = 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} (n \geq 2). \\
& \because \frac{1}{2n(n+1)} > 0, \therefore \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4} \text{ 成立}, \\
& n=1 \text{ 时}, 1 < \frac{5}{4} \text{ 也成立}, \therefore \frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{a_2^3} + \frac{1}{a_3^3} + \dots + \frac{1}{a_n^3} < \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3=12$ 且 $a_4=8$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】 (1) $a_n = 2n$, $S_n = n(n+1)$

(2) $T_n = \frac{n}{n+1}$

【难度】 0.65

【知识点】 利用定义求等差数列通项公式、求等差数列前 n 项和、裂项相消法求和

【分析】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据已知条件可得出关于 a_1 、 d 的方程组, 解出这两个量的值, 利用等差数列的通项公式可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 利用等差数列前 n 项

和公式求出 S_n ;

(2) 求得 $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 利用裂项相消法即可求得 T_n .

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 8 \\ S_3 = 3a_1 + 3d = 12 \end{cases}$, 解得 $a_1 = d = 2$,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$,

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 2n$, $S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n(n+1)$;

(2) 由 (1) 可得 $S_n = n(n+1)$,

所以 $b_n = \frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

所以 $T_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $a_7 = 15$, $S_7 = 63$; 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

T_n , $2T_n = 3b_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{2}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 Q_n ;

(3) 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{T_i} < 2$.

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$, $b_n = 3^n$;

(2) $\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$;

(3) 证明见解析.

【难度】0.65

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算、裂项相消法求和、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项、数列不等式恒成立问题

【分析】(1) 利用等差数列的通项公式和求和公式列方程, 解得 $\begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$, 即可得到 a_n , 利

用 $n \geq 2$ 时, $T_n - T_{n-1} = b_n$, 得到数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 然后求 b_n 即可;

(2) 根据 (1) 得到 $\frac{2}{S_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$, 然后利用裂项相消的方法求和即可;

(3) 利用放缩的方法得到 $\frac{a_n}{T_n} \leq \frac{2n+1}{3^n}$, 然后用错位相减的方法求和, 得到

$$B_n = 2 - \frac{n+2}{3^n} < 2, \text{ 即可证明 } \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{T_i} < 2.$$

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_1 + 6d = 15 \\ 7a_1 + 21d = 63 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$, $\therefore a_n = 2n + 1$,

由 $2T_n = 3b_n - 3$ ① 可得, 当 $n=1$ 时, $2T_1 = 2b_1 = 3b_1 - 3$, 则 $b_1 = 3$,

当 $n \geq 2$ 时, $2T_{n-1} = 3b_{n-1} - 3$ ②,

①②相减得, $2b_n = 3b_n - 3b_{n-1}$, 整理得 $b_n = 3b_{n-1}$, 所以数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_n = 3^n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 可得, } \frac{2}{S_n} = \frac{2}{3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } Q_n &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 由 (1) 可得, } \frac{a_n}{T_n} = \frac{2n+1}{\frac{3(3^n-1)}{3-1}} = \frac{2(2n+1)}{3(3^n-1)}, \text{ 又 } 3^n - 1 = 2 \times 3^{n-1} + 3^{n-1} - 1 \geq 2 \times 3^{n-1},$$

$$\therefore \frac{a_n}{T_n} \leq \frac{2(2n+1)}{3 \times 2 \times 3^{n-1}} = \frac{2n+1}{3^n},$$

$$\text{设 } B_n = \frac{3}{3^1} + \frac{5}{3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{3^n}, \text{ 则 } \frac{1}{3} B_n = \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{2n+1}{3^{n+1}},$$

$$\text{两式相减得, } \frac{2}{3} B_n = 1 + 2 \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) - \frac{2n+1}{3^{n+1}}$$

$$= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{3^2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n+1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2n+4}{3^{n+1}},$$

$$\therefore B_n = 2 - \frac{n+2}{3^n} < 2,$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{T_i} \leq B_n < 2.$$

6. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列, 其前8项和为64. $\{b_n\}$ 是公比大于0的等比数列,

$$b_1=4, b_3-b_2=48.$$

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 记 $c_n=b_{2n}+\frac{1}{b_n}, n \in N^*$,

(i) 证明 $\{c_n^2-c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 证明 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in N^*)$

【答案】(I) $a_n = 2n - 1, n \in N^*$, $b_n = 4^n, n \in N^*$; (II) (i) 证明见解析; (ii) 证明见解析.

【难度】0.4

【知识点】等差数列前n项和的基本量计算、由定义判定等比数列、错位相减法求和、数列不等式恒成立问题

【分析】(I) 由等差数列的求和公式运算可得 $\{a_n\}$ 的通项, 由等比数列的通项公式运算可得 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) (i) 运算可得 $c_n^2 - c_{2n} = 2 \cdot 4^n$, 结合等比数列的定义即可得证;

(ii) 放缩得 $\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}} < \frac{4n^2}{2 \cdot 2^{2n}}$, 进而可得 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}$, 结合错位相减法即可得证.

【详解】(I) 因为 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列, 其前8项和为64.

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} \times 2 = 64, \text{ 所以 } a_1 = 1,$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n-1, n \in N^*;$$

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q, (q > 0)$,

$$\text{所以 } b_3 - b_2 = b_1 q^2 - b_1 q = 4(q^2 - q) = 48, \text{ 解得 } q = 4 \text{ (负值舍去),}$$

$$\text{所以 } b_n = b_1 q^{n-1} = 4^n, n \in N^*;$$

$$(II) (i) \text{ 由题意, } c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n} = 4^{2n} + \frac{1}{4^n},$$

$$\text{所以 } c_n^2 - c_{2n} = \left(4^{2n} + \frac{1}{4^n}\right)^2 - \left(4^{4n} + \frac{1}{4^{2n}}\right) = 2 \cdot 4^n,$$

$$\text{所以 } c_n^2 - c_{2n} \neq 0, \text{ 且 } \frac{c_{n+1}^2 - c_{2n+2}}{c_n^2 - c_{2n}} = \frac{2 \cdot 4^{n+1}}{2 \cdot 4^n} = 4,$$

所以数列 $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是等比数列;

(ii) 由题意知, $\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4^n} = \frac{4n^2 - 1}{2 \cdot 2^{2n}} < \frac{4n^2}{2 \cdot 2^{2n}},$

所以 $\sqrt{\frac{a_n a_{n+1}}{c_n^2 - c_{2n}}} < \sqrt{\frac{4n^2}{2 \cdot 2^{2n}}} = \frac{2n}{\sqrt{2} \cdot 2^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n}{2^{n-1}},$

所以 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}},$

设 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}},$

则 $\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$

两式相减得 $\frac{1}{2} T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$

所以 $T_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}},$

所以 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}\right) < 2\sqrt{2}.$

【点睛】关键点点睛:

最后一问考查数列不等式的证明, 因为 $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}}$ 无法直接求解, 应先放缩去除根号, 再由错位相减法即可得证.

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和正项等比数列 $\{b_n\}$, $a_1 = -5, b_1 = 2$, a_5 既是 $b_3 - a_3$ 与 $b_1 - a_1$ 的等差中项, 又是其等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) $c_n = |a_n|$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 证明: $\sum_{i=2}^n \frac{i^2 + 1}{(i^2 - 1)b_{i+1}} < \frac{1}{2}.$

【答案】(1) $a_n = 3n - 8, b_n = 2^n$; (2) $S_n = \begin{cases} -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n, n=1, 2 \\ \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n + 14, n \geq 3 \end{cases}$; (3) 证明见解析.

【难度】0.65

【知识点】利用定义求等差数列通项公式、含绝对值的等差数列前 n 项和、写出等比数列的通项公式、数列不等式恒成立问题

【分析】(1) 设 $\{a_n\}$ 公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q , 由等差中项和等比中项列方程组解得 d, q

可得通项公式；

(2) 按 a_n 的正负分类讨论求 $\{|a_n|\}$ 的和；

(3) 利用 $n \geq 2$ 时, $\frac{n^2+1}{n^2-1} = 1 + \frac{2}{n^2-1} < 2$, 用放缩法放缩后求和可证得不等式成立.

【详解】(1) 设 $\{a_n\}$ 公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

由已知 $a_5 = -5 + 4d$, $b_1 - a_1 = 7$, $b_3 - a_3 = 2q^2 - 2d + 5$,

所以 $\begin{cases} 2(-5+4d) = 7 + 2q^2 - 2d + 5 \\ (-5+4d)^2 = 7(2q^2 - 2d + 5) \end{cases}$, 因为 $q > 0$, 故解得 $\begin{cases} q = 2 \\ d = 3 \end{cases}$ ($\begin{cases} q = -2 \\ d = 3 \end{cases}$ 舍去).

所以 $a_n = -5 + 3(n-1) = 3n - 8$, $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$;

$$(2) c_n = |a_n| = \begin{cases} 8-3n, n \leq 2 \\ 3n-8, n \geq 3 \end{cases},$$

$$n=1,2 \text{ 时, } S_n = \frac{n(5+8-3n)}{2} = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n,$$

$$n \geq 3 \text{ 时, } S_n = 5 + 2 + \frac{(1+3n-8)(n-2)}{2} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n + 14,$$

$$\text{所以 } S_n = \begin{cases} -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n, n=1,2 \\ \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n + 14, n \geq 3 \end{cases}.$$

(3) 证明 $\frac{n^2+1}{(n^2-1) \times 2^{n+1}}$ 中, $n \geq 2$ 时, $\frac{n^2+1}{n^2-1} = 1 + \frac{2}{n^2-1} < 2$,

$$\text{所以 } \sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{(i^2-1)b_{i+1}} = \sum_{i=2}^n \frac{i^2+1}{(i^2-1) \times 2^{i+1}} < \sum_{i=2}^n \frac{2}{2^{i+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}.$$

【点睛】关键点点睛：本题考查求等差数列和等比数列的通项公式. 求含绝对值的数列的和, 证明不等式. 在求含有绝对值的数列的前 n 项和时, 需根据 a_n 的正负分类讨论. 证明数列不等式时常常要用放缩法, 把数列各项放缩后便于求和, 从而证得不等式成立.