

数列小题练习

一、单选题

1. 定义：数列 $\{a_n\}$ 的“间隔和”数列 $\{S_n\}$ 为 $S_n = \sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k|$. 若 $a_n = \begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-8, n \geq 2, \end{cases}$ 则 $S_{15} =$

()

A. 22

B. 30

C. 34

D. 36

【答案】C

【知识点】分组（并项）法求和、数列新定义

【分析】根据数列的通项公式求出相邻两项的差值 $|a_{k+1} - a_k|$ ，再根据“间隔和”数列的定义计算.

【详解】当 $n=1$ 时， $a_1=2$ ，由 $a_2=2 \times 2 - 8 = -4$ ，则 $|a_2 - a_1| = 6$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = 2n - 8$ ，则 $a_{n+1} = 2(n+1) - 8 = 2n - 6$ ，

所以 $|a_{n+1} - a_n| = |(2n-6) - (2n-8)| = 2$ ，

所以 $S_{15} = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{16} - a_{15}| = 6 + 14 \times 2 = 34$ ，

故选：C

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1=1$ ，且 $a_n a_{n+1} = 2^n$ ，则 $\log_2 \left(\frac{1}{3} S_{2026} + 1 \right) =$ ()

A. 1012

B. 1013

C. 1014

D. 1015

【答案】B

【知识点】对数的运算、由递推关系证明等比数列、求等比数列前 n 项和、分组（并项）法求和

【分析】利用等比数列的定义可推得数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项分别构成等比数列，再利用分组求和法求得 S_{2026} ，代入所求式计算得解.

【详解】对于 $a_n a_{n+1} = 2^n$ ，令 $n=1$ ，有 $a_1 a_2 = 2$ ，则 $a_2 = 2$.

因 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项都是以2为公比的等比数列，

$$\text{故 } S_{2026} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2025}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2026}) = \frac{1-2^{1013}}{1-2} + \frac{2 \times (1-2^{1013})}{1-2} = 3 \times 2^{1013} - 3,$$

$$\text{可得 } \log_2 \left(\frac{1}{3} S_{2026} + 1 \right) = \log_2 2^{1013} = 1013.$$

故选：B.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n + 4, S_1 = 1, S_2 = 6$ ，则

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = (\quad)$$

A. 65

B. 105

C. 210

D. 230

【答案】B

【知识点】由递推关系证明数列是等差数列、等差数列前 n 项和的基本量计算、利用等差数列通项公式求数列中的项

【分析】根据题意证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 4，首项为 1，进而求得通项公式，再计算对应项并求和即可.

【详解】因为 $S_{n+2} = 2S_{n+1} - S_n + 4$ ，所以 $(S_{n+2} - S_{n+1}) - (S_{n+1} - S_n) = 4$ ，即 $a_{n+2} - a_{n+1} = 4$ ，

又因为 $S_1 = 1, S_2 = 6$ ，所以 $a_1 = 1, a_2 = S_2 - S_1 = 5$ ， $a_2 - a_1 = 4$ ，

所以 $a_{n+1} - a_n = 4, n \in \mathbf{N}^*$ ，即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 4，首项为 1，

所以 $a_n = 4n - 3, n \in \mathbf{N}^*$ ，

所以 $a_2 = 5, a_4 = 13, a_6 = 21, a_8 = 29, a_{10} = 37$ ，

所以 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 5 + 13 + 21 + 29 + 37 = 105$

故选：B.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $2S_n = a_{n+1} - 2$ ，则 a_4 的值为 ()

A. 3

B. 18

C. 54

D. 152

【答案】C

【知识点】写出等比数列的通项公式、等比数列通项公式的基本量计算、等比数列前 n 项和的基本量计算

【分析】根据已知条件求得数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比，从而得到其通项公式，求得 a_4 .

【详解】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

$$\text{由题可得} \begin{cases} 2S_1 = a_2 - 2 \\ 2S_2 = a_3 - 2 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} 2a_1 = a_2 - 2 \\ 2(a_1 + a_2) = a_3 - 2 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} a_2 = 2a_1 + 2 \\ a_3 = 6a_1 + 6 \end{cases}.$$

$$\text{因为 } a_2 \neq 0, \text{ 所以 } a_1 + 1 \neq 0, \text{ 所以 } \frac{a_3}{a_2} = \frac{6a_1 + 6}{2a_1 + 2} = 3,$$

$$\text{所以} \begin{cases} q = 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}, \text{ 所以 } a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

$$\text{所以 } a_4 = 2 \times 3^3 = 54.$$

故选: C.

5. 在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = -1, \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{b_n} + 3, n \in \mathbf{N}^*$, 则通项公式 $b_n = ()$

A. $\frac{1}{2^n}$ B. $\frac{1}{2^n - 1}$ C. $\frac{1}{2^{n-1}}$ D. $\frac{1}{2^n - 3}$

【答案】D

【知识点】写出等比数列的通项公式、构造法求数列通项

【分析】根据条件先判断出 $\left\{\frac{1}{b_n} + 3\right\}$ 是等比数列, 然后可求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【详解】因为 $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{b_n} + 3$, 所以 $\frac{1}{b_{n+1}} + 3 = 2\left(\frac{1}{b_n} + 3\right)$, 且 $\frac{1}{b_1} + 3 = 2 \neq 0$,

所以 $\left\{\frac{1}{b_n} + 3\right\}$ 是首项为2, 公比为2的等比数列,

$$\text{所以 } \frac{1}{b_n} + 3 = 2 \times 2^{n-1}, \text{ 所以 } \frac{1}{b_n} = 2^n - 3, \text{ 所以 } b_n = \frac{1}{2^n - 3},$$

故选: D.

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 、 T_n , 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{4n-1}{2n+5}$, 则 $\frac{a_7 + a_9}{b_4 + b_{12}} = ()$

A. $\frac{63}{35}$ B. $\frac{65}{37}$ C. $\frac{69}{35}$ D. $\frac{59}{35}$

【答案】D

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算、利用等差数列的性质计算、两个等差数列的前 n 项和之比问题

【分析】根据等差数列的性质以及等差数列的前 n 项和公式计算可得.

【详解】因为 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{4n-1}{2n+5}$,

$$\text{所以 } \frac{a_7+a_9}{b_4+b_{12}} = \frac{a_1+a_{15}}{b_1+b_{15}} = \frac{(a_1+a_{15})\frac{15}{2}}{(b_1+b_{15})\frac{15}{2}} = \frac{S_{15}}{T_{15}} = \frac{4 \times 15 - 1}{2 \times 15 + 5} = \frac{59}{35}.$$

故选: D.

7. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 0, a_{2025} + a_{2026} > 0, a_{2025} \cdot a_{2026} < 0$, 则使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 为 ()

A. 4052

B. 4051

C. 4050

D. 4049

【答案】C

【知识点】利用等差数列的性质计算、求等差数列前 n 项和、求等差数列前 n 项和的最值

【分析】根据等差数列的性质和前 n 项和公式进行计算判断即可.

【详解】因为等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 > 0, a_{2025} + a_{2026} > 0, a_{2025} \cdot a_{2026} < 0$,

则 $a_{2025} > 0, a_{2026} < 0, a_{2025} + a_{2026} > 0$.

$$\text{故 } S_{4051} = \frac{4051(a_1 + a_{4051})}{2} = 4051a_{2026} < 0, \quad S_{4050} = 2025(a_1 + a_{4050}) = 2025(a_{2025} + a_{2026}) > 0.$$

故使前 n 项和 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 $n = 4050$.

故选: C.

8. 任取一个正整数, 若是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”等). 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}, \text{ 则 } a_{2025} = ()$$

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】D

【知识点】数列周期性的应用

【分析】根据“冰雹猜想”探讨数列的周期性, 再利用该性质求得答案.

【详解】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = 4, a_6 = 2, \dots,$

因此数列 $\{a_n\}$ 是以3为周期的周期数列，而 $2025=3\times 675$ ，所以 $a_{2025}=a_3=2$ ，

故选：D

9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_5+a_8<0$ ， $S_{11}>0$ ，则 S_n 的最大值为（ ）

A. S_5

B. S_6

C. S_7

D. S_8

【答案】B

【知识点】求等差数列前 n 项和的最值

【分析】根据等差数列的性质，可以判断数列 $\{a_n\}$ 的特点，确定 S_n 何时最大.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

因为 $a_5+a_8=a_6+a_7$

所以 $a_5+a_8<0\Rightarrow a_6+a_7<0$ ；

由 $S_{11}>0\Rightarrow \frac{11(a_1+a_{11})}{2}>0\Rightarrow a_1+a_{11}>0\Rightarrow a_6>0$.

所以 $a_7<0$.

所以等差数列 $\{a_n\}$ 是首项为正数的递减数列，且前6项为正，从第7项开始为负数.

所以 S_6 最大.

故选：B.

10. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_2+a_5=16$ ， $a_5-a_3=4$ ，则 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i$ ($n\in\mathbb{N}^*$) 的值为（ ）

A. $3\cdot 2^{n-1}(2^n-1)$

B. $3\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}$

C. $\frac{3\cdot 4^n}{2}$

D. $3\cdot 4^{n-1}$

【答案】D

【知识点】等差数列通项公式的基本量计算、求等差数列前 n 项和

【分析】根据条件，可求得等差数列的首项和公差，代入公式，可得通项 $a_n=2n+1$ ，即可求出所求数列的首项、末项和项数，代入等差数列的求和公式，即可得答案.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，设公差为 d ，由题意得
$$\begin{cases} a_1+d+a_1+4d=16 \\ a_1+4d-(a_1+2d)=4 \end{cases}$$

解得 $a_1=3, d=2$,

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n+1$,

因此所求首项为 $a_{2^{n-1}} = 2 \times 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1$, 末项为 $a_{2^n-1} = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$,

项数为 $2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1}$,

所以 $\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \ (n \in \mathbb{N}^*) = \frac{2^{n-1}(2^n + 1 + 2^{n+1} - 1)}{2} = 3 \cdot 4^{n-1}$.

故选: D