

放缩练习

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$, $a_1 = 2$, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

(1) 证明： $a_n > 1$.

(2) 证明： $\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_3^2}{9} + \cdots + \frac{a_n^2}{n^2} < \frac{9}{5}$ ($n \geq 2$) .

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值 .

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(3) 证明：对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

3. 求证： $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{5}{4}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{2a_1-5} + \frac{2}{2a_2-5} + \frac{3}{2a_3-5} + \cdots + \frac{n}{2a_n-5} = \frac{n}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明： $\frac{1}{22} \leq T_n < \frac{1}{6}$.

5. 已知 $a_n = \frac{n}{2}$, $b_n = n^2$, 设 $c_n = \frac{1}{a_n + b_n}$, 求证: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{4}{3}$.

6. 求证: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

7. 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{29}{24}$.

8. 求证: $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{3}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

9. 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k - 1} < \frac{5}{3}$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $2S_n = (n+2)a_n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{1}{4a_n^2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < 1$.

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{10} = 100$, 数列 $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}$ 的前5项和为9.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $b_n = \frac{a_n + 3}{n^2 \cdot (n+2)^2}$, 求证 $T_n < \frac{5}{8}$.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列, 其前8项和为64. $\{b_n\}$ 是公比大于0的等比数列, $b_1 = 4$,

$$b_3 - b_2 = 48.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

① 求证: $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 为等比数列.

② 证明: $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

