

排列组合进阶 教师版

一、单选题

1. 某校高三年级有 8 名同学计划高考后前往武当山、黄山、庐山三个景点旅游.已知 8 名同学中有 4 名男生, 4 名女生.每个景点至少有 2 名同学前往, 每名同学仅选一处景点游玩, 其中男生甲与女生 A 不去同一处景点游玩, 女生 B 与女生 C 去同一处景点游玩, 则这 8 名同学游玩行程的方法数为 ()

A. 564

B. 484

C. 386

D. 640

【答案】A

【难度】0.4

【来源】辽宁省县级重点高中协作体 2023-2024 学年高二上学期期末数学试题

【知识点】分组分配问题、排列组合综合、分步乘法计数原理及简单应用、实际问题中的组合计数问题

【分析】先将不平均分组问题分成两大类, 然后由排列组合知识结合加法、乘法计数原理即可得解.

【详解】8 人分三组可分为 2 人, 2 人, 4 人和 2 人, 3 人, 3 人, 共两种情况.

第一种情况分成 2 人, 2 人, 4 人: 女生 B, C 去同一处景点, 当 B, C 成 2 人组时,

其他 6 人分成 2 人, 4 人两组且男生甲与女生 A 不同组, 有 $C_4^1 A_2^2 = 8$ 种方法;

当 B, C 在 4 人组时, 有 $\frac{C_2^1 C_4^1 C_4^2}{A_2^2} + C_4^2 A_2^2 = 36$ 种方法.

第二种情况分成 2 人, 3 人, 3 人: 当 B, C 成 2 人组时, 有 $C_4^2 = 6$ 种方法;

当 B, C 在 3 人组时, 有 $C_2^1 C_5^2 + C_4^1 C_3^1 A_2^2 = 44$ 种方法.

故这 8 名同学游玩行程的方法数为 $(8+36+6+44) \times A_3^3 = 564$.

故选: A.

2. 2023 年高考考场的规格为每场 30 名考生, 分为 6 排 5 列, 依照下图所示的方式进行座位号的编排. 为了确保考试的公平性, 考生的试题卷分为 A 卷和 B 卷, 座位号为奇数的考生使用 A 卷, 座位号为偶数的考生使用 B 卷. 已知甲、乙、丙三名考生在同一考场参加高考, 且三人使用的试卷类型相同, 三名考生中任意两人不得安排在同一行或同一列, 则甲、乙、丙

三名考生的座位安排方案共有（ ）

第五列	第四列	第三列	第二列	第一列	
25	24	13	12	01	第一排
26	23	14	11	02	第二排
27	22	15	10	03	第三排
28	21	16	09	04	第四排
29	20	17	08	05	第五排
30	19	18	07	06	第六排

A. 2016 种

B. 1008 种

C. 1440 种

D. 720 种

【答案】A

【难度】0.4

【来源】2023 年普通高等学校招生全国统一考试数学原创卷（二）

【知识点】元素（位置）有限制的排列问题、分类加法计数原理、分步乘法计数原理及简单应用、实际问题中的组合计数问题

【分析】考虑甲、乙、丙三人使用 A 卷，则这三个人的座位号都为奇数，对三个人选择奇数列的人数进行分类讨论，确定第一、二、三个人选择座位的种数，结合分步乘法和分类加法计数原理可得出三人使用 A 卷的座位排法种数，再由对称性可得出三人都使用 B 卷座位排法种数，综合可得结果.

【详解】先考虑甲、乙、丙三人使用 A 卷，则这三个人的座位号都为奇数，分以下几种情况讨论：

（1）若这三人都都在奇数列，则有一人需在第一列选一个奇数号的座位，有 3 种情况，然后有一人在第三列要选一个奇数号的座位，但与第一人不能同在一排，只有 2 种情况，最后一人只能在第五列选择一个奇数号的座位，但该人不能与前两人在同一排，最后一人的座位只有一个，

此时，不同的排法有 $3 \times 2 \times 1 \times A_3^3 = 36$ 种；

（2）三人中只有两人在奇数列，首先在第一、三、五列中选两列，有 C_3^2 种选择，

其次，第一个人在其中的第一个奇数列中选择一个奇数号的位置，有3种选择，

第二个人在另一个奇数列中选择一个奇数号的位置，有2种选择，

第三个人在两个偶数列中选择一个奇数号的位置，有6种选择，

此时，共有 $C_3^2 \times (3 \times 2 \times 6) \times A_3^3 = 648$ 种不同的排法；

(3) 三人中只有一人在奇数列，第一个人在第一、三、五列中随便选择一个奇数号的位置，有9种选择，

其次，第二个人在第二列中选择一个奇数号的位置，有3种选择，例如第二个人选择10号座位，

由于第三个人不能与第二个人同排或同列，则第三个人只有2种选择，即20号和24号两个位置可供选择，

此时，不同的排法种数为 $9 \times 3 \times 2 \times A_3^3 = 324$ 种不同的排法.

综上所述，当三个人都考A卷时，不同的排法种数为 $36 + 648 + 324 = 1008$.

由对称性可知，当三人都考B卷时，不同的排法种数也为1008种.

综上，当三人的考卷类型相同时，不同的座位安排方案种数为 $1008 \times 2 = 2016$ 种.

故选：A.

【点睛】易错点点睛：求解分类、分步计数原理需要注意以下几点：

(1) 处理计数问题，应扣紧两个原理，根据具体问题首先弄清楚是“分类”还是“分步”，要搞清楚“分类”或“分步”的具体标准；

(2) 分类时要满足要满足两个条件：①类与类之间要互斥（保证不重复）；②总数要完备（保证不遗漏），也就是要确定一个合理的分类标准；

(3) 分步时应按事件发生的连贯过程进行分析，必须做到步与步之间互相独立，互不干扰，并确保连续型.

3. 某校以劳动周的形式开展劳育工作的创新实践.学生可以参加“民俗文化”“茶艺文化”“茶壶制作”“水果栽培”“蔬菜种植”“3D 打印”这六门劳动课中的两门.则甲、乙、丙这3名学生至少有2名学生所选劳动课全不相同的方法种数共有（ ）

A. 2080

B. 2520

C. 3375

D. 3870

【答案】B

【难度】0.4

【来源】浙江省91高中联盟2022-2023学年高二下学期期中数学试题

【知识点】实际问题中的组合计数问题

【分析】分别计算两人全不相同，一人与另外两人全不相同，三人全不相同的种类数，可得所求结果.

【详解】设甲，乙两人全不相同为事件 A_1 ，甲，丙两人全不相同为事件 A_2 ，乙，丙两人全不相同为事件 A_3

则 A_1 ， A_2 ， A_3 的种类数都为 $C_6^2 C_4^2 C_6^2$ ，

$A_1 \cap A_2$ ， $A_2 \cap A_3$ ， $A_3 \cap A_1$ 的种类数都为 $C_6^2 C_4^2 C_4^2$ ，

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 的种类数为 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ ，

所以至少有两人全不相同的方法数为 $C_6^2 C_4^2 C_6^2 \times 3 - C_6^2 C_4^2 C_4^2 \times 3 + C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 2520$ ，

故选：B.

4. 6 名研究人员在 3 个无菌研究舱同时进行工作，由于空间限制，每个舱至少 1 人，至多 3 人，则不同的安排方案共有（ ）

A. 360 种

B. 180 种

C. 720 种

D. 450 种

【答案】D

【难度】0.4

【来源】贵州省铜仁市石阡民族中学 2022-2023 学年高二下学期 3 月月考数学试题

【知识点】实际问题中的组合计数问题、分组分配问题

【分析】方案一：每个舱各安排 2 人，共有 90（种）不同的方案；方案二：分别安排 3 人，2 人，1 人，共有 360（种）不同的方案，共有 $90+360=450$ （种）不同的安排方案.

【详解】方案一：每个舱各安排 2 人，共有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = 90$ （种）不同的方案；

方案二：分别安排 3 人，2 人，1 人，共有 $C_6^3 C_3^2 C_1^1 A_3^3 = 360$ （种）不同的方案.

所以共有 $90+360=450$ （种）不同的安排方案.

故选：D.

5. “省刻度尺”问题由英国数学游戏大师杜登尼提出：一根 23cm 长的尺子，要能够量出长度为 1cm 到 23cm 且边长为整数的物体，至少需要 6 个刻度（尺子头尾不用刻）. 现有一根 8cm 的尺子，要能够一次量出长度为 1cm 到 8cm 且边长为整数的物体，尺子上至少需要有（ ）个刻度

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】A

【难度】0.4

【来源】浙江省金丽衢十二校、“七彩阳光”2023 届高三下学期 3 月联考数学试题

【知识点】实际问题中的组合计数问题

【分析】将问题转化为组合抽样思维，设 x 为长度， a 为每段长度， b 为刻度对应的数量，则当尺子有 3 个刻度时满足条件， $x \in [1, 8]$ $x \in \mathbb{N}^*$, $x = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + b_4 a_4$ 其中

$b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1\}$ 证明验证求解.

【详解】若有一根 8cm 的尺子，量出长度为 1cm 到 8cm 且为整数的物体，则当尺子有 3 个刻度时满足条件

设 x 为长度， a 为每段长度， b 为刻度对应的数量，则有 $x \in [1, 8]$ 且

$x \in \mathbb{N}^*$, $x = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + b_4 a_4$ ，其中 $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1\}$ ，

当 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 1$ 时， $a_2 = 1, a_1 = 2, a_1 + a_2 = 3, a_3 = 4, a_2 + a_3 = 5, a_2 + a_3 + a_4 = 6$

$a_1 + a_2 + a_3 = 7, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$



下证，当尺子有 2 个刻度时不能量出 1cm ~ 8cm 的物体长度

设 $x \in [1, 8]$ 且 $x \in \mathbb{N}^*$, $x = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$ ，其中 $b_1, b_2, b_3 \in \{0, 1\}$ ，

所以当 b_1, b_2, b_3 中有 1 个 0， x 的取值至多有 3 个

当 b_1, b_2, b_3 中有 2 个 0 时， $b_1 = b_2 = 0$ 或 $b_2 = b_3 = 0$ ， x 的取值至多有 2 个

当 b_1, b_2, b_3 中没有 0 时， x 的取值有 1 个

所以 x 取值至多有 6 个，即当尺子有 2 个刻度时不能量出 1cm ~ 8cm 的物体长度.

故选:A

6. 武术是中国的四大国粹之一，某武校上午开设文化课，下午开设武术课，某年级武术课有太极拳、形意拳、长拳、兵器四门，计划从周一到周五每天下午排两门课，每周太极拳和形意拳上课三次，长拳和兵器上课两次，同样的课每天只上一次，则排课方式共有（ ）

A. 19840 种

B. 16000 种

C. 31360 种

D. 9920 种

【答案】D

【难度】0.4

【来源】辽宁省名校联盟 2023 届高三下学期 3 月份联合考试数学试题

【知识点】实际问题中的计数问题、实际问题中的组合计数问题

【分析】先确定从 5 天中选 3 天排太极拳的排法情况，再分五天中有 3 天既有太极拳又有形意拳，五天中有 2 天既有太极拳又有形意拳，五天中有 1 天既有太极拳又有形意拳，三种情况讨论，从而可得出答案.

【详解】先从 5 天中选 3 天排太极拳，有 C_5^3 种，

然后再从所选的 3 天中选一节排太极拳有 $C_2^1 C_2^1 C_2^1$ 种，

所以太极拳有 $C_5^3 C_2^1 C_2^1 C_2^1$ 种排法，

若五天中有 1 天既有太极拳又有形意拳，

则哪一天重复有 C_3^1 种，

再从另外不重复的 2 天中每天选 1 天排形意拳，有 $C_2^1 C_2^1$ 种，

再从剩下的 4 节课中选 2 节排长拳，有 C_4^2 种，则另外 2 节排兵器，

所以有 $C_3^1 C_2^1 C_2^1 C_4^2$ 种，

若五天中有 2 天既有太极拳又有形意拳，

则哪两天重复有 C_3^2 种，

再从另外不重复的 2 天中排形意拳，有 $C_2^1 C_2^1$ 种，

再从剩下的 4 节课中抽 2 节课排长拳，有 C_4^2 种，则另外 2 节排兵器，

但排在同一天不合适，所以有 $C_4^2 - 2C_2^2$ 种，

所以共有 $C_3^1 C_2^1 C_2^1 (C_4^2 - 2C_2^2)$ 种，

若五天中有 3 天既有太极拳又有形意拳，

则剩下的 4 节课中选 2 节排长拳，有 C_4^2 种，再去掉排同一天的 $2C_2^2$ 种，

所以有 $C_4^2 - 2C_2^2$ 种，

综上所述：共有 $C_5^3 C_2^1 C_2^1 C_2^1 [C_3^1 C_2^1 C_2^1 C_4^2 + C_3^1 C_2^1 C_2^1 (C_4^2 - 2C_2^2) + (C_4^2 - 2C_2^2)]$

$$= 80 \times (72 + 48 + 4) = 9920 \text{ 种.}$$

故选：D.

7. 在以单循环的象棋比赛中（即每两个人之间比赛场），一盘棋中胜者得 1 分，负者得 0 分，若平局则各得 0.5 分.若已知比赛人数至少有 17 人，而最终得分不多于 5 分的人有 11 个，那么得 8.5 分的人有（ ）个

- A. 6 B. 5 C. 2 D. 0

【答案】D

【难度】0.4

【来源】上海市华东师范大学第二附属中学 2021-2022 学年高二下学期期中数学试题

【知识点】分组分配问题

【分析】根据题意求出比赛的场次，由每局产生 1 分可知，所有比赛共产生的分数为 136 分，将最终得分不多于 5 分的人有 11 个人的分数除去后，把剩下的分数分给余下的 6 人，即可得出结论.

【详解】根据题意，至少要举行 $C_{17}^2 = 136$ 场比赛，

因为每局比赛产生 1 分，所以至少产生 136 分，

因为最终得分不多于 5 分的人有 11 个，那么这 11 人最多有 55 分，

所以最少有 $136 - 55 = 81$ 分需要被剩下的 6 人分配，

得分最多者全胜可得 16 分，其次是 15 分，14 分，13 分，12 分，

5 人得分 70 分，那最后一人最少也要得 11 分，

不可能得 8.5 分，

所以得 8.5 分的人有 0 个，

故选：D.

8. 小林同学喜欢吃 4 种坚果：核桃、腰果、杏仁、榛子，他有 5 种颜色的“每日坚果”袋.每个袋子中至少装 1 种坚果，至多装 4 种坚果.小林同学希望五个袋子中所装坚果种类各不相同，且每一种坚果在袋子中出现的总次数均为偶数，那么不同的方案数为（ ）

- A. 20160 B. 20220 C. 20280 D. 20340

【答案】A

【难度】0.15

【来源】湖北省二十一所重点中学 2022 届高三下学期第三次联考数学试题

【知识点】实际问题中的组合计数问题、分组分配问题、分类加法计数原理、排列组合综合

【分析】设出核桃、腰果、杏仁、榛子为 H, Y, X, Z ，分类讨论求出分堆情况，再进行排列，求出最后答案.

【详解】依次记核桃、腰果、杏仁、榛子为 H, Y, X, Z ，则每个字母出现 2 次或 4 次，分类计算分堆可能：

(1) $H, H; Y, Y; X, X; Z, Z$.

若是“ $8=4+1+1+1+1$ ”，则其中的“4”必须是 $HYXZ$ ，故 1 种可能；

若是“ $8=3+2+1+1+1$ ”，则考虑 $(HYX)(Z※)(※)(※)$ ，故有 $C_4^3 C_3^1 = 12$ 种可能；

若是“ $8=1+1+2+2+2$ ”，则考虑 $(Z)(X)(Z※)(X※)(※※)$ ，故有 $C_4^2 A_2^2 = 12$ 种可能；

小计： $1+12+12=25$ ；

(2) 诸如“ $H, H, H, H; Y, Y; X, X; Z, Z$ ”类型

若是“ $10=4+3+1+1+1$ ”，则四个 H 无论怎么安排，都会出现某两个袋仅放 H ，故 0 种可能；

若是“ $10=4+2+2+1+1$ ”，则“ $1+1$ ”中有一个是 H ，“ $4+2+2$ ”中各一个 H ，“ $2+2$ ”中除了一个 H 外，

另一个互异，故有 $C_3^2 = 3$ 种可能；

若是“ $10=3+3+2+1+1$ ”，则“ $1+1$ ”中各有 1 个 H ，“ $3+3+2$ ”中各一个 H ，可以考虑含 $※$ 模式，

$(H※※)(H※※)(H※)(※)(H)$ ，故有 $C_3^2 A_2^2 = 6$ 种可能；

若是“ $10=3+2+2+2+1$ ”，则可用下表进一步分类，有 $1+C_3^2+C_3^2 C_2^1 = 10$ 种可能；

YXZ	$H※$	$H※$	$H※$	H
$H※※$	$H※$	$H※$	$H※$	$※$
	$H※$	$H※$	$※※$	H

若是“ $10=2+2+2+2+2$ ”，则四个 H 至少有两个出现搭配相同，故 0 种可能；

小计： $C_4^1 \times (0+3+6+10+0) = 76$ ；

(3) 诸如“ $H, H, H, H; Y, Y, Y, Y; X, X; Z, Z$ ”类型

若是“ $12=4+4+2+1+1$ ”，则“ $4+4$ ”必然重复，故 0 种可能；

若是“ $12=4+3+3+1+1$ ”，则枚举“ $3+3$ ”的情况，发现仅 $(HYXZ)(HYZ)(HYX)(Z)(X)$ 可能；

若是“ $12=4+3+2+2+1$ ”，则考虑 $(HYXZ)(HY※)(※※)(※※)(※)$ 或 $(HYXZ)(XZ※)$

$(\times \times)(\times \times)(\times)$ ，故有 $C_2^1 C_2^1 = 4$ 种可能；

若是“ $12=3+3+3+2+1$ ”，则有 $(HYX)(HYZ)(ZXH)(HY)(Y)$ 或 $(HYX)(HYZ)(ZXY)$
 $(HY)(H)$ 都成立，有 2 种可能；

若是“ $12=3+3+2+2+2$ ”，则枚举“ $3+3$ ”的情况，发现 $(HYX)(HYZ)(HY)(H\times)(Y\times)$ ，有 2 种可能。

小计 $C_4^2 \times 9 = 54$ ；

诸如“ $H, H, H, H; Y, Y, Y, Y; X, X, X, X; Z, Z$ ”类型

若是“ $14=4+4+*+*+*$ ”，则“ $4+4$ ”必然重复，故 0 种可能；

若是“ $14=4+3+3+3+1$ ”，则“ $4+3+3+3$ ”中至少有 3 个 Z，故 0 种可能；

若是“ $14=4+3+3+2+2$ ”，则“ $4+3+3$ ”至少有 2 个 Z，考虑 $(HYXZ)(HYX)(Z\times\times)(\times\times)$
 $(\times\times)$ ，其中 $Z\times\times$ 有 $C_3^2 = 3$ 种可能，故此小类有 3 种可能；

若是“ $14=3+3+3+3+2$ ”，则“ $3+3+3+3$ ”中至少有 3 个 Z，故 0 种可能；

小计 $3C_4^1 = 12$ ；

(5) “ $H, H, H, H; Y, Y, Y, Y; X, X, X, X; Z, Z, Z, Z$ ”

只有“ $16=4+3+3+3+3$ ”的搭配，有 1 种可能；

综上：共有 $25+76+54+12+1=168$ 个分堆可能，故不同的方案数为 $168A_5^5 = 168 \times 120 = 20160$ 种。

故选：A

【点睛】比较复杂一些的排列组合问题，要结合分类加法原理和分步乘法原理进行求解，特别是分类标准，要做到不重不漏，本题中，应用的是把 8,10,12,14,16 分为 5 个数（从 1 到 4）的和的分类标准，可以做到不重不漏。

9. “新苗杯”围棋比赛准备在 24 人中挑选若干人举行一次表演赛，并商定挑选到的人之间进行单循环比赛（即每两个人之间进行一场比赛），一场比赛中胜者得 1 分，负者得 0 分，平局则各得 0.5 分，已知比赛人数至少有 18 人，而最终得分不多于 6 分的人有 13 人，那么得 7.5 分的人数是（ ）

A. 5

B. 4

C. 2

D. 0

【答案】D

【难度】0.4

【来源】重庆市南开中学校 2021-2022 学年高二下学期期末数学试题

【知识点】实际问题中的组合计数问题、分组分配问题

【分析】根据题意求出比赛的场次，每局产生 1 分可知，所有比赛共产生的分数等于比赛场次，将最终得分不多于 6 分的人数除去后，把剩下的分数分给余下的人，即可得出结论.

【详解】根据题意，至少要举行 $C_{18}^2 = 153$ 场比赛，

因为每局比赛产生 1 分，所以至少产生 153 分.

又因为最终得分不多于 6 分的有 13 人，那么这 6 个人最多有 78 分.

所以最少有 $153 - 78 = 75$ 分需要被剩下的 5 人分配，

得分最多者全胜可得 17 分，其次是 16 分，15 分，14 分，

4 人得分 62 分，那最后一人最少也要得 13 分，

不可能得 7.5 分，所以得 7.5 分的人有 0 个.

故选：D.

10. 因演出需要，身高互不相等的 9 名演员要排成一排成一个“波浪形”，即演员们的身高从最左边数起：第一个到第三个依次递增，第三个到第七个依次递减，第七、八、九个依次递增，则不同的排列方式有（ ）种.

A. 379

B. 360

C. 243

D. 217

【答案】A

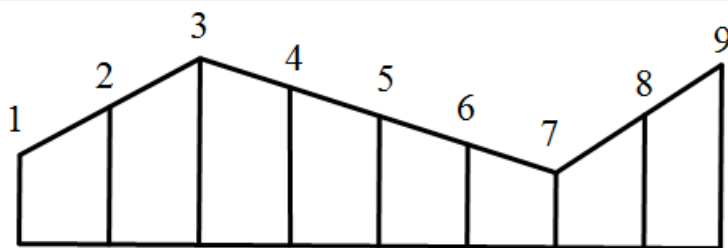
【难度】0.4

【来源】重庆市巴蜀中学 2021-2022 学年高二下学期 3 月月考数学试题

【知识点】分组分配问题、分类加法计数原理

【分析】依题意，重点要先排好 7 号位和 3 号位，余下的按部就班即可.

【详解】依题意作图如下：



上面的数字表示排列的位置，必须按照上图的方式排列，其中 3 号位必须比 124567 要高，

1, 7 两处是排列里最低的，3, 9 两处是最高点，

设 9 个演员按照从矮到高的顺序依次编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，

则 3 号位最少是 7，最大是 9，下面分类讨论：

第 3 个位置选 7 号：先从 1，2，3，4，5，6 号中选两个放入前两个位置，

余下的 4 个号中最小的放入 7 号位置，剩下的三个放入中间三个位置，

8，9 号放入最后两个位置，即 $C_6^2 C_3^3 = 15$ ；

第 3 个位置选 8 号：先从 1，2，3，4，5，6，7 号中选两个放入前两个位置，

余下的 5 个号中最小的放入 7 号位置，剩下 4 个选 3 个放入中间三个位置，

余下的号和 9 号放入最后两个位置，即 $C_7^2 C_4^3 = 84$ ；

第 3 个位置选 9 号：先从 1，2，3，4，5，6，7，8 号中选两个放入前两个位置，

余下的 6 个号中最小的放入 7 号位置，剩下 5 个选 3 个放入中间三个位置，

余下的 2 个号放入最后两个位置，即 $C_8^2 C_3^3 = 280$ ；

由分类计数原理可得共有 $15 + 84 + 280 = 379$ 种排列方式；

故选：A.

11. 用五种不同颜色给三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的六个顶点涂色，要求每个顶点涂一种颜色，且每条棱的两个顶点涂不同颜色，则不同的涂法有（ ）

A. 840 种

B. 1200 种

C. 1800 种

D. 1920 种

【答案】D

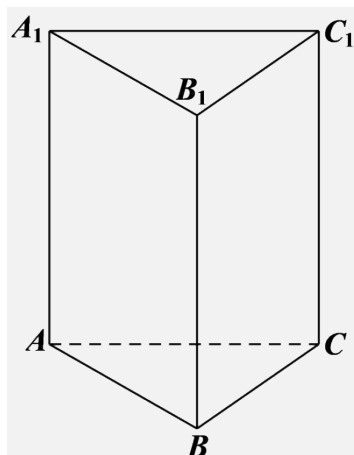
【难度】0.4

【来源】上海市金山区金山中学 2020-2021 学年高二下学期期末数学试题

【知识点】涂色问题、实际问题中的组合计数问题

【分析】对所选颜色的种数进行分类讨论，先涂 A 、 B 、 C 三点，再确定 A_1 、 B_1 、 C_1 三点颜色的选择方法种数，结合分步乘法和分类加法计数原理可得结果.

【详解】分以下几种情况讨论：



①若5种颜色全用上，先涂 A 、 B 、 C 三点，有 P_5^3 种，

然后在 A_1 、 B_1 、 C_1 三点中选择两点涂另外两种颜色，有 P_3^2 种，最后一个点有2种选择，

此时共有 $P_5^3 P_3^2 \times 2 = 720$ 种；

②若用4种颜色染色，由 C_5^4 种选择方法，先涂 A 、 B 、 C 三点，有 P_4^3 种，

然后在 A_1 、 B_1 、 C_1 三点中需选择一点涂最后一种颜色，有3种，不妨设涂最后一种颜色的为点 A_1 ，

若点 B_1 与点 A 同色，则点 C_1 只有一种颜色可选，

若点 B_1 与点 C 同色，则点 C_1 有两种颜色可选，

此时共有 $C_5^4 P_4^3 \times 3 \times 3 = 1080$ 种；

③若用3种颜色染色，则有 C_5^3 种选择方法，先涂 A 、 B 、 C 三点，有 P_3^3 种，

点 A_1 有2种颜色可选，则 B_1 、 C_1 的颜色只有一种选择，

此时共有 $C_5^3 P_3^3 \times 2 = 120$ 种。

由分类加法计数原理可知，共有 $720 + 1080 + 120 = 1920$ 种涂色方法。

故选：D.

12. 正方体六个面上分别标有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 六个字母，现用5种不同的颜色给此正方体六个面染色，要求有公共棱的面不能染同一种颜色，则不同的染色方案有（ ）种。

A. 420

B. 600

C. 720

D. 780

【答案】D

【难度】0.4

【来源】福建省莆田第一中学 2020-2021 学年高二下学期期中考试数学试题

【知识点】涂色问题、排列数的计算、组合数的计算

【分析】根据对面的颜色是否相同，分①三对面染相同的颜色、②两对面染相同颜色，另一对面染不同颜色、③一对面染相同颜色，另两对面染不同颜色，分别求出不同的染色方案，最后加总即可.

【详解】分三类：

1、若三对面染相同的颜色，则有 $A_5^3 = 60$ 种；

2、若两对面染相同颜色，另一对面染不同颜色，则有 $A_5^3 C_3^2 C_2^1 = 360$ 种；

3、若一对面染相同颜色，另两对面染不同颜色，则有 $A_5^3 C_3^1 A_2^2 = 360$ 种；

∴共有 $60 + 360 + 360 = 780$ 种.

故选：D

13. 已知有 5 个不同的小球，现将这 5 个球全部放入到标有编号 1、2、3、4、5 的五个盒子中，若装有小球的盒子的编号之和恰为 11，则不同的放球方法种数为（ ）

A. 150

B. 240

C. 390

D. 1440

【答案】C

【难度】0.4

【来源】黑龙江省哈尔滨市第三中学 2020-2021 学年度上学期高二学年第二模块考试(理科)数学试题

【知识点】分组分配问题

【分析】分析可得可以将 5 个球放到编号 2、4、5 的三个盒子中或者放到编号 1、2、3、5 的四个盒子中，分别计算每种放球方法种数，再利用分类相加计数原理可求得结果.

【详解】因为 $2+4+5=11$ 或 $1+2+3+5=11$

所以 5 个球放到编号 2、4、5 的三个盒子中或者放到编号 1、2、3、5 的四个盒子中

(1) 5 个球放到编号 2、4、5 的三个盒子中，因为每个盒子中至少放一个小球，所以在三个盒子中有两种方法：

各放 1 个，2 个，2 个的方法有 $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = \frac{5 \times 6 \times 1}{2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 = 90$ 种.

各放 3 个，1 个，1 个的方法有 $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = \frac{10 \times 2 \times 1}{2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 = 60$ 种.

(2) 5 个球放到编号 1、2、3、5 的四个盒子中, 则各放 2 个, 1 个, 1 个, 1 个的方法有

$$\frac{C_5^2 C_3^1 C_2^1 C_1^1}{A_3^3} \cdot A_4^4 = \frac{10 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240 \text{ 种.}$$

综上, 总的放球方法数为 $90 + 60 + 240 = 390$ 种.

故选: C

【点睛】易错点睛: 本题考查排列组合的部分均匀分组, 解题时一定要注意不要重复, 有 n 组均匀, 最后一点要除以 A_n^n , 考查学生的逻辑思维能力与运算求解能力, 属于中档题.

14. 某密码锁共设四个数位, 每个数位的数字都可以是 1, 2, 3, 4 中的任一个. 现密码破译者得知: 甲所设的四个数字有且仅有三个相同; 乙所设的四个数字有两个相同, 另两个也相同; 丙所设的四个数字有且仅有两个相同; 丁所设的四个数字互不相同. 则上述四人所设密码最安全的是 ().

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】C

【难度】0.4

【来源】【全国百强校】福建省三明市第一中学 2016-2017 学年高二下学期第二次月考数学(理)试题

【详解】甲共有 $C_4^2 C_2^1 C_4^1 = 48$ 种不同设法, 乙共有 $\frac{C_4^2 A_4^2}{2!} = 36$, 丙共有 $C_4^2 C_4^1 A_3^2 = 144$, 丁共有 $A_4^4 = 24$, 所以丙最安全, 故选 C.

点睛: 涉及到排列组合的综合问题, 一般较难, 处理此类问题一般先分析如何安排, 在安排时是分类还是分步, 元素之间是否讲顺序, 以及分组问题注意重复情况的处理, 本题中对两个数字相同的情况一定要仔细斟酌题意, 写全切不要重复, 能力要求较高.

15. 某高校大一新生中的 6 名同学打算参加学校组织的“雅荷文学社”、“青春风街舞社”、“羽乒协会”、“演讲团”、“吉他协会”五个社团, 若每名同学必须参加且只能参加 1 个社团且每个社团至多两人参加, 则这 6 个人中至多有 1 人参加“演讲团”的不同参加方法数为

- A. 4680 B. 4770 C. 5040 D. 5200

【答案】C

【难度】0.4

【来源】【全国百强校 word】山西省晋中市 2017 年榆社中学高二下学期期中考试理科数学试卷

【知识点】分组分配问题

【详解】若有1人参加“演讲团”，则从6 人选1人参加该社团，其余5 人去剩下4 个社团，人数安排有2 种情况：1,1,1,2 和1,2,2 ，故1人参加“演讲团”的不同参加方法数为

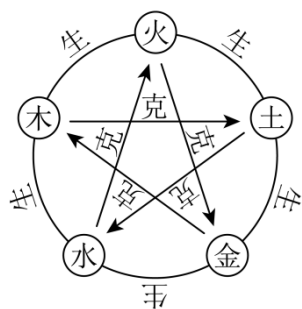
$$C_6^1 \left(\frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2} A_4^3 + \frac{C_5^1 C_4^1 C_3^1}{A_3^3} A_4^4 \right) = 3600$$

，若无人参加“演讲团”，则6 人参加剩下4 个社团，人数安排有2 种情况：1,1,2,2 和2,2,2 ，故无人参加“演讲团”的不同参加方法数为

$$\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^1}{A_2^2 A_2^2} A_4^4 + C_4^3 C_6^2 C_4^2 = 1440$$

【方法点睛】本题主要考查分组分配问题及排列组合的综合应用，属于难题.有关排列组合的综合问题，往往是两个原理及排列组合问题交叉应用才能解决问题，解答这类问题理解题意很关键，一定多读题才能挖掘出隐含条件.解题过程中要首先分清“是分类还是分步”、“是排列还是组合”，在应用分类计数加法原理讨论时，既不能重复交叉讨论又不能遗漏，这样才能提高准确率.

16. 五行是华夏民族创造的哲学思想，多用于哲学、中医学和占卜方面，五行学说是华夏文明重要组成部分.古代先民认为，天下万物皆由五类元素组成，分别是金、木、水、火、土，彼此之间存在相生相克的关系.下图是五行图，现有5 种颜色可供选择给五“行”涂色，要求五行相生不能用同一种颜色（例如金生水，水生木，不能同色），五行相克可以用同一种颜色（例如水克火，木克土，可以用同一种颜色），则不同的涂色方法种数有（ ）



A. 3125

B. 1000

C. 1040

D. 1020

【答案】D

【难度】0.4

【来源】浙江省名校联盟 2024 届高三上学期 9 月新高考研究卷（全国 I 卷）数学试题（二）

【知识点】涂色问题、分类加法计数原理、分步乘法计数原理及简单应用

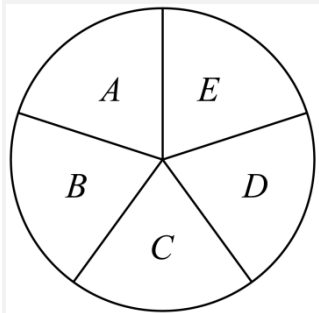
【分析】根据不邻区域是否同色进行分类，确定涂色顺序再分步计数即可.

【详解】五行相克可以用同一种颜色，也可以不用同一种颜色，即无限制条件.

五行相生不能用同一种颜色，即相邻位置不能用同一种颜色.

故问题转化为如图 A, B, C, D, E 五个区域，

有 5 种不同的颜色可用，要求相邻区域不能涂同一种颜色，即 5 色 5 区域的环状涂色问题.



分为以下两类情况：

第一类： A, C, D 三个区域涂三种不同的颜色，

第一步涂 A, C, D 区域，

从 5 种不同的颜色中选 3 种按序涂在不同的 3 个区域上，则有 A_5^3 种方法，

第二步涂 B 区域，由于 A, C 颜色不同，有 3 种方法，

第三步涂 E 区域，由于 A, D 颜色不同，则有 3 种方法，

由分步计数原理，则共有 $3 \times 3A_5^3 = 540$ 种方法；

第二类： A, C, D 三个区域涂两种不同的颜色，

由于 C, D 不能涂同一色，则 A, C 涂一色，或 A, D 涂同一色，两种情况方法数相同.

若 A, C 涂一色，

第一步涂 A, C, D 区域， A, C 可看成同一区域，且 A, D 区域不同色，

即涂 2 个区域不同色，

从 5 种不同的颜色中选 2 种按序涂在不同的 2 个区域上，则有 A_5^2 种方法，

第二步涂 B 区域，由于 A, C 颜色相同，则有 4 种方法，

第三步涂 E 区域，由于 A, D 颜色不同，则有 3 种方法，

由分步计数原理，则共有 $4 \times 3A_5^2 = 240$ 种方法；

若 A, D 涂一色，与 A, C 涂一色的方法数相同，

则共有 $2 \times 240 = 480$ 种方法.

由分类计数原理可知，不同的涂色方法共有 $540 + 480 = 1020$ 种.

故选：D.

17. 现有天平及重量为1, 2, 4, 10的砝码各一个, 每一步, 我们选取任意一个砝码, 将其放入天平的左边或者右边, 直至所有砝码全放到天平两边, 但在放的过程中发现天平的指针不会偏向分度盘的右边, 则这样的放法共有 () 种.

A. 105

B. 72

C. 60

D. 48

【答案】A

【难度】0.4

【来源】湖北省云学新高考联盟学校 2022-2023 学年高二下学期 4 月期中联考数学试题

【知识点】实际问题中的组合计数问题、分类加法计数原理、分步乘法计数原理及简单应用

【分析】由题意, 按照从大到小的顺序, 逐一分情况讨论, 结合排列组合以及分类加法原理, 可得答案.

【详解】依题可知 10 只能在左边, 按照从大到小的顺序, 逐一分情况讨论, 有以下 4 种情况:

情况①: 第一步先排 10, 10 只能在左边, 接下来重量为 1,2,4 的砝码顺序随意有 A_3^3 种, 左右边随意, 则 2^3 种, 共有 $2^3 A_3^3 = 48$ 种;

情况②: 第一步先排 4, 4 只能在左边, 10 可以在第 2,3,4 步中任选一步放, 有 C_3^1 种, 重量为 1,2 的砝码顺序随意左右边随意, 共有 $C_3^1 2^2 A_2^2 = 24$ 种;

情况③: 第一步先排 2, 2 只能在左边,

若第二步放 10, 则重量为 1,4 的砝码顺序随意左右边随意, 有 $2^2 A_2^2$ 中,

若第二步放 4, 则 10 可以在第 3,4 步汇总任选一步放, 砝码 1 左右边随意放, 有 $2C_2^1$ 种,

若第二步放 1, 有 2 种放法, 接下第 3 步有 2 种情形:

(a) 若第三步放 10, 那第四步放 4 可以在左右都行, 有 2 种,

(b) 若第三步放 4, 那 4 只能放左边, 第四步放 10 只能放左边, 有 1 种,

共有 $2^2 A_2^2 + C_2^1 \times 2 + 2(2+1) = 18$ 种;

情况④: 第一步先排 1, 1 只能在左边, 接下来第二步:

若第二步放 10, 则重量为 2,4 的砝码顺序随意左右边随意放, 有 $2^2 A_2^2$ 种,

若第二步放 4, 则 10 可以在第 3,4 步中任选一步放, 砝码 2 左右边随意放, 有 $2C_2^1$ 种,

若第二步放 2, 2 只能在左边, 接下来第三步有 2 种情形:

(i) 若第三步放 10, 那第四步放 4 可以在左右边都行, 有 2 种,

(ii) 若第三步放 4, 那 4 只能在左边, 第四步放 10 只能放左边, 有 1 种,

共有 $2^2 A_2^2 + 2C_2^1 + 2 + 1 = 15$ 种,

綜上有 $48 + 24 + 18 + 15 = 105$ 种.

故选: A.

18. 将六枚棋子 A, B, C, D, E, F 放置在 2×3 且一端固定的棋盘中, 并用红、黄、蓝三种颜色的油漆对其进行上色 (颜色不必全部选用), 要求相邻棋子的颜色不能相同, 且棋子 A, B 的颜色必须相同, 则一共有 () 种不同的放置与上色方式

A. 11232

B. 10483

C. 10368

D. 5616

【答案】C

【难度】0.4

【来源】江苏省苏州市 2022-2023 学年高三下学期 2 月学业质量调研数学试题

【知识点】分类加法计数原理、分步乘法计数原理及简单应用、涂色问题、排列组合综合

【分析】进行颜色分配, 然后利用分类原理的相加和分步相乘的原理进行分析即可.

【详解】①3 个 1, 3 个 2, 0 个 3 如表:

1	2	1
2	1	2

只用两种颜色, 并选取两个位置放 AB , 此时有: $A_3^2 (C_3^2 + C_3^2) = 36$ 种,

②1 个 1, 2 个 2, 3 个 3 如表:

1	3	2
3	2	3

选用三种颜色 (1+2+3, 且只用一次的颜色放在拐角), 并选取两个位置放 AB , 此时有:

$C_4^1 \cdot A_3^3 \cdot (C_3^2 + C_2^2) = 96$ 种,

或

3	1	3
2	3	2

选用三种颜色（1+2+3，且只用一次的颜色放在中间），并选取两个位置放 AB ，此时有：

$$C_2^1 \cdot A_3^3 \cdot (C_3^2 + C_2^2) = 48 \text{ 种},$$

③2 个 1，2 个 2，2 个 3 如表：

1	3	2
2	1	3

选用三种颜色（2+2+2），并选取两个位置放 AB ，此时有： $C_3^1 \cdot A_3^3 = 18$ 种，

或

1	2	3
2	3	1

选用三种颜色（2+2+2），并选取两个位置放 AB ，此时有： $C_3^1 \cdot A_3^3 = 18$ 种，

所以不同的放置与上色方式有：

$$(36 + 96 + 48 + 18 + 18) \cdot A_2^2 \times A_4^4 = 10368.$$

故选：C.

二、填空题

19. 从正方体的顶点及其中心共 9 个点中任选 4 个点，则这 4 个点在同一个平面的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{7}$

【难度】0.4

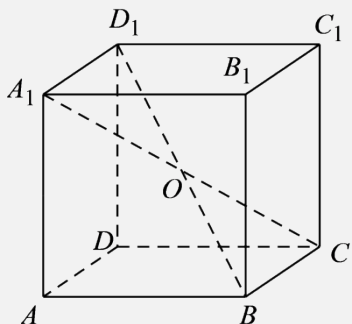
【来源】广西南宁市 2023 届高三上学期摸底测试数学（理）试题

【知识点】计算古典概型问题的概率、几何组合计数问题

【分析】由正方体性质，结合组合数求出所有共面的 4 个点的选法，而所有可能情况有 C_9^4 种，应用古典概型的概率求法求概率.

【详解】如下图，选正方体 6 个侧面上的顶点，共有 6 种共面的情况；

过中心 O 的平面共有 6 个平面，每个平面含 9 个点中的 5 个，则共有 $6C_5^4$ 种；



所有可能情况有 C_9^4 种，

所以这 4 个点在同一个平面的概率为 $\frac{6+6C_5^4}{C_9^4} = \frac{36}{126} = \frac{2}{7}$ 。

故答案为： $\frac{2}{7}$

20. 某年数学竞赛邀请了一位来自 X 星球的选手参加填空题比赛，共 10 道题目，这位选手做题有一个古怪的习惯：先从最后一题（第 10 题）开始往前看，凡是遇到会的题目就作答，遇到不会的题目先跳过（允许跳过所有的题目），一直看到第 1 题，然后从第 1 题开始往后看，凡是遇到先前未答的题目就随便写个答案，遇到先前已答得题目则跳过（例如，他可以按照 9、8、7、4、3、2、1、5、6、10 的次序答题），这样所有题目均有作答，则这位选手可能的答题次序有_____种.

【答案】512

【难度】0.4

【来源】上海市七宝中学 2015-2016 学年高二下学期期末数学试题

【知识点】二项式的系数和、其他组合计数模型

【分析】按照规则，相当于将 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 按照规则排序，要求放在 1 左侧的数字从大到小，右侧从小到大（1 可以在两端），可以设 1 左侧 n 个数字，不同的排序方法 C_9^n 种，一共有 $C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + \cdots + C_9^9$ 种.

【详解】设从最后一题（第 10 题）开始往前看直到第 2 题（含第 2 题），做了 $n, n \in N, n \leq 9$ 道题，这 n 道题的顺序只能从大到小或者不答题（ $n=0$ ），则不同的答题情况 C_9^n 种，

按照规则：接下来无论他是否会第一题，都必须做第一题，剩下的题目只有一种做题顺序.
则剩下的 $10-n$ 道题只能一种答法，

所以可能的答题次序一共有 $C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + \cdots + C_9^9 = 2^9 = 512$ 种.

故答案为：512

【点睛】此题考查分步计数原理，其中涉及组合知识，关键在于等价转化，以比较简单的方式完成题目要求的事件.