

排列组合数证明 教师版

一、解答题

1. 求证: $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1} (n \geq m \geq 2)$.

【答案】证明见解析

【分析】根据排列数公式可得

【详解】 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!} = nA_{n-1}^{m-1}, (n \geq m \geq 2)$.

2. 证明: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} (n > m)$.

【答案】证明见解析

【分析】根据排列数公式和运算性质，准确化简，即可求解.

【详解】证明： $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\times\cdots\times 2\times 1}{(n-m)\times\cdots\times 2\times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}.$$

为了使上述结论在 $m=n$ 时也成立，我们规定 $0!=1$.

由此可知，排列数公式还可以写成 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

3. (1) 求证： $(n+1)! - n! = n \cdot n!$;

(2) 求证： $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$;

(3) 求和： $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$.

【答案】(1) 证明见解析；(2) 证明见解析；(3) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

【分析】按照阶乘的定义即可求解.

【详解】(1) 证明： $(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = n \cdot n!$.

(2) 证明： $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n \cdot n!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

(3) 由(2)知 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$,

所以 $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$;

综上, $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

4. 证明 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 并利用这一结果化简:

(1) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{9}{10!}$;

(2) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$.

【答案】(1)证明见详解, $1 - \frac{1}{10!}$;

(2) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

【分析】(1) 由 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 可得 $(n+1)! = (n+1) \times n!$, 先证出

$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ 式子成立, 进而求出前9项的和即可;

(2) 根据证出 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ 式子成立, 求出前 n 项的和即可;

【详解】(1) 解: 证明: 由 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ 可得 $(n+1)! = (n+1) \times n!$,

则 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\text{所以 } \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{9}{10!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} = 1 - \frac{1}{10!}$$

$$(2) \text{ 解: 因为 } \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

5. 求证: $A_n^n = A_n^m A_{n-m}^{n-m}$.

【答案】证明见详解

【分析】利用排列数的计算公式即可证明.

$$\text{【详解】左边} = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!,$$

$$\text{右边} = A_n^m A_{n-m}^{n-m} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1) \times (n-m) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!,$$

所以 $A_n^n = A_n^m A_{n-m}^{n-m}$, 即证.

6. 求证:

$$(1) A_7^4 + 4A_7^3 = A_8^4;$$

$$(2) A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m.$$

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】(1) 利用排列数公式化简可证得等式成立；

(2) 利用排列数公式化简可证得等式成立.

【详解】(1) 证明： $A_7^4 + 4A_7^3 = \frac{7!}{3!} + \frac{4 \times 7!}{4!} = \frac{4 \times 7 \times 2}{4!} = \frac{8!}{4!} = A_8^4$.

(2) 证明： $A_n^m + mA_n^{m-1} = \frac{n!}{(n-m)!} + \frac{m \times n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n-m+1) \times n! + m \times n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!} = A_{n+1}^m$.

7. 求证：(1) $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = n^2 A_{n-1}^{n-1}$ ；

(2) $\frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{(k-1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k!} (k \leq n)$.

【答案】见详解.

【分析】(1) 根据排列数的计算公式展开，通过计算即可证明式子成立；

(2) 利用阶乘的计算公式进行展开，通分，通过计算即可证明式子成立.

【详解】(1) 左边 $= A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = n(n+1)A_{n-1}^{n-1} - nA_{n-1}^{n-1}$

$$= (n^2 + n - n)A_{n-1}^{n-1} = n^2 A_{n-1}^{n-1} = \text{右边},$$

$\therefore$ 结论成立, 即 $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = n^2 A_{n-1}^{n-1}$;

(2) 当 $k \leq n$ 时,

$$\text{左边} = \frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{(k-1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!} - \frac{kn!}{k(k-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n! - kn!}{k!} = \frac{(n-k+1)n!}{k!} = \text{右边},$$

$$\therefore \text{结论成立, 即 } \frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{(k-1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k!} (k \leq n).$$

8. 求证: (1) $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$;

$$(2) A_8^8 - 8A_7^7 + 7A_6^6 = A_7^7.$$

【答案】(1) 证明见解析; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 根据排列数的计算公式先化简右式, 然后即可证明等式成立;

(2) 将左式每一项都变形为阶乘的形式, 然后进行化简计算并与右式比较, 由此证明等式成立.

$$\text{【详解】(1) 右式} = nA_{n-1}^{m-1} = n \times \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(m-1)]!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m = \text{左式},$$

故等式成立;

$$(2) \text{左式} = 8! - 8 \times 7! + 7 \times 6! = 8! - 8! + 7! = 7! = A_7^7 = \text{右式},$$

故等式成立.

9. 证明: $A_{n+1}^m - A_n^m = mA_n^{m-1}$.

【答案】见解析

【详解】

$$\begin{aligned}\because A_{n+1}^m - A_n^m &= \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} - \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n+1-m} - 1 \right) = \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{m}{n+1-m} = m \cdot \frac{n!}{(n+1-m)!} \\ &= mA_n^{m-1}, \therefore A_{n+1}^m - A_n^m = mA_n^{m-1}.\end{aligned}$$

10. 求证: $A_{n+1}^{n+1} = A_{n+1}^n = (n+1)A_n^n$

【答案】证明见解析

【分析】利用排列数公式将 $A_{n+1}^{n+1}, A_{n+1}^n, (n+1)A_n^n$ 展开，即可证结论.

【详解】 $A_{n+1}^{n+1} = (n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$,

$$A_{n+1}^n = (n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2,$$

$$(n+1)A_n^n = (n+1) \times n! = (n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1,$$

综上， $A_{n+1}^{n+1} = A_{n+1}^n = (n+1)A_n^n$.

11. 已知 $m, n, k \in \mathbb{N}^*$, $m \geq k \geq n$.

(1)证明: $C_m^k C_{m-k}^n = C_m^n C_{m-n}^k$;

(2)证明: $C_m^k C_k^n = C_m^n C_{m-n}^{k-n}$.

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】(1) 由组合数公式计算即可;

(2) 由组合数公式计算即可.

【详解】(1) 因为 $C_m^k C_{m-k}^n = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(m-k)!}{n!(m-k-n)!} = \frac{m!}{k!n!(m-n-k)!}$,

$$C_m^n C_{m-n}^k = \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot \frac{(m-n)!}{k!(m-n-k)!} = \frac{m!}{k!n!(m-n-k)!},$$

所以 $C_m^k C_{m-k}^n = C_m^n C_{m-n}^k$;

$$(2) \text{ 因为 } C_m^k C_k^n = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{m!}{n!(m-k)!(k-n)!},$$

$$C_m^n C_{m-n}^{k-n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot \frac{(m-n)!}{(k-n)!(m-k)!} = \frac{m!}{n!(m-k)!(k-n)!},$$

$$\text{所以 } C_m^k C_k^n = C_m^n C_{m-n}^{k-n}.$$

$$12. (1) \text{ 计算: } \frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5};$$

$$(2) \text{ 证明: } C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k.$$

【答案】(1) $\frac{4}{5}$; (2) 证明见解析.

【分析】(1) 利用排列数公式可求得所求代数式的值;

(2) 利用组合数公式可证得结论成立.

$$\text{【详解】(1) } \frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 + 2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{8! - 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = \frac{4+8}{24-9} = \frac{4}{5};$$

$$(2) \text{ 证明: } C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!},$$

$$C_n^m \cdot C_m^k = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!},$$

$$\text{因此, } C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k.$$

$$13. \text{ 求证: } rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}.$$

【答案】证明见详解

【分析】根据组合数公式推导可得.

【详解】由组合数公式可知 $rC_n^r = r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!} = nC_{n-1}^{r-1}$,

等式成立.

14. 求证: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} (m, n \in \mathbf{N}_+)$.

【答案】证明见解析

【分析】从 $n+1$ 个元素里面取 m 个元素可以分为以下两种情形来考虑:

情形一: 选取的 m 个元素中包含某一确定的元素 a ; 情形二: 选取的 m 个元素中不包含某一确定的元素 a .

由以上两种情形并结合组合数的意义即可得证.

【详解】一方面：从 $n+1$ 个元素里面取 m 个元素可以分为以下两种情形：

情形一：选取的 m 个元素中包含某一确定的元素 a ，则只需从剩下的 n 个元素里面取 $(m-1)$ 个元素即可；

情形二：选取的 m 个元素中不包含某一确定的元素 a ，则需从剩下的 n 个元素里面取 m 个元素.

另一方面：由组合数的意义可知从 $n+1$ 个元素里面取 m 个元素的选取法数可以用组合数

$C_{n+1}^m (m, n \in \mathbf{N}_+)$ 来表示，

同理从 n 个元素里面取 $(m-1)$ 个元素以及从 n 个元素里面取 m 个元素的选取法数可以分别

用组合数 C_n^m 、 $C_n^{m-1} (m, n \in \mathbf{N}_+)$ 来表示.

结合以上两方面且由分类加法计数原理有 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} (m, n \in \mathbf{N}_+)$.

15. 已知 m 是自然数， n 是正整数，且 $m \leq n$. 求证：

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

(2) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】代入阶乘公式，化简证明.

【详解】(1) 根据组合数公式, 可以得到 $C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)! [n-(n-m)]!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$.

$$\begin{aligned} (2) \text{ 根据组合数公式, 可以得到 } C_n^m + C_n^{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m+1)!} + \frac{n!m}{m!(n-m+1)!} = \frac{n!(n-m+1+m)}{m!(n-m+1)!} = \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = C_{n+1}^m. \end{aligned}$$

16. 证明: $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

【答案】证明见解析

【分析】根据组合数公式证明即可.

【详解】证明: $mC_n^m = m \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = nC_{n-1}^{m-1}$.

17. 证明下列各等式.

$$(1) C_n^m = \frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1};$$

$$(2) C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m}^{m-1}.$$

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】(1) 直接利用组合数的阶乘公式对右边化简即可得到证明；

(2) 利用组合数的性质公式 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ 和 $C_n^0 = C_{n+1}^0$ ，对右边化简即可得到证明.

【详解】(1) 由 $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ ，知右边 $= \frac{m+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(m+1)]!(m+1)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m$

所以，左边=右边，故原式成立.

(2) 由组合数的性质 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ ，知左边

$$= C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+1}^{m-1} = C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+3}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m}^{m-1}$$

所以，左边=右边，故原式成立.

18. 求证：

$$(1) C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m,$$

$$(2) C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m C_m^k.$$

【答案】(1)证明见解析；

(2)证明见解析.

【分析】(1) 利用组合数计算公式变形, 计算推理作答;

(2) 利用组合数计算公式变形, 计算推理作答.

【详解】(1) 因为 $\frac{n}{n-m} C_{n-1}^m = \frac{n}{n-m} \cdot \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$,

所以 $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m$ 成立;

(2) 因为 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$,

$C_n^m \cdot C_m^k = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}$,

所以 $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$ 成立.

19. 证明: $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m$.

【答案】证明见解析

【分析】根据组合数的运算公式和运算性质, 准确化简, 即可求解.

【详解】根据组合数的运算性质得: 右边 $= \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m = \frac{n}{n-m} \cdot \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$,

又因为左边 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$,

所以 $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m$.

20. (1) 证明: $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$,

(2) 求和 $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$

【答案】(1) 证明见解析;

$$(2) 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

【分析】(1) 对 $\frac{n}{(n+1)!}$ 分子分母同时乘以 $n!$ 化简即可.

(2) 利用 (1) 的结论, 可把每一项拆开中间项约掉即可得到答案.

【详解】(1) 证明:

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n \times n!}{n! \times (n+1)!} = \frac{(n+1-1) \times n!}{n! \times (n+1)!} = \frac{(n+1)n! - n!}{n! \times (n+1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{n! \times (n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \text{ 得证.}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 (1) 知 } & \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$