

排列组合数证明 教师版

一、解答题

1. 求证: $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1} (n \geq m \geq 2)$.

2. 证明: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} (n > m)$.

3. (1) 求证: $(n+1)! - n! = n \cdot n!$;

(2) 求证: $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$;

(3) 求和: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$.

4. 证明 $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 并利用这一结果化简:

(1) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{9}{10!}$;

(2) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$.

5. 求证: $A_n^n = A_n^m A_{n-m}^{n-m}$.

6. 求证:

$$(1) A_7^4 + 4A_7^3 = A_8^4;$$

$$(2) A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m.$$

7. 求证: (1) $A_{n+1}^{n+1} - A_n^n = n^2 A_{n-1}^{n-1};$

$$(2) \frac{(n+1)!}{k!} - \frac{n!}{(k-1)!} = \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k!} (k \leq n).$$

8. 求证：(1) $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$;

(2) $A_8^8 - 8A_7^7 + 7A_6^6 = A_7^7$.

9. 证明： $A_{n+1}^m - A_n^m = mA_n^{m-1}$.

10. 求证： $A_{n+1}^{n+1} = A_{n+1}^n = (n+1)A_n^n$

11. 已知 $m, n, k \in \mathbb{N}^*$, $m \geq k \geq n$.

(1) 证明: $C_m^k C_{m-k}^n = C_m^n C_{m-n}^k$;

(2) 证明: $C_m^k C_k^n = C_m^n C_{m-n}^{k-n}$.

12. (1) 计算: $\frac{4A_8^4 + 2A_8^5}{A_8^8 - A_9^5}$;

(2) 证明: $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot C_m^k$.

13. 求证: $rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$.

14. 求证: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} (m, n \in \mathbf{N}_+)$.

15. 已知 m 是自然数, n 是正整数, 且 $m \leq n$. 求证:

$$(1) C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$(2) C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

16. 证明: $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

17. 证明下列各等式.

$$(1) C_n^m = \frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1};$$

$$(2) C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m}^m.$$

18. 求证：

$$(1) C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m,$$

$$(2) C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_n^m C_m^k.$$

19. 证明： $C_n^m = \frac{n}{n-m} C_{n-1}^m.$

20. (1) 证明: $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$

(2) 求和 $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$