

数列求和形式导数构造

1 已知函数 $f(x) = a(x-1) - \ln x$.

- (1) 若函数 $f(x)$ 的极小值不大于 k 对任意 $a > 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.
- (2) 证明: $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{2^n}\right) < e^2$. (其中 e 为自然对数的底数)

2 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{a-1}{x} + 2a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y - 1 = 0$ 垂直, 求 a 的值.
- (2) 若 $f(x) \leq ax + 1$ 在 $[1, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.
- (3) 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{n}{2(n+1)}$.

3 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的极值.
- (2) 求证: $\frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{24} + \cdots + \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdots \ln n}{(n+1)!} < \frac{n-1}{2n+2}$, $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

4 已知函数 $f(x) = \ln x - x - 3$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最大值.
- (2) 求证: $\ln(2^2 + 1) + \ln(3^2 + 1) + \ln(4^2 + 1) + \cdots + \ln(n^2 + 1) < 1 + 2 \ln n! (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

5 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{a}{x}$, 其中 $a > 0$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (2) 证明: $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \left(1 + \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e^{\frac{3}{4}} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$.