导数运算

一、解答题

1．求下列函数的导数.

(1) $f\left(x\right)=x\cos x-\sin x$；

(2) $f\left(x\right)=\dfrac{3x}{x-1}$；

(3) $f\left(x\right)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

【答案】(1) $f'\left(x\right)=-x\sin x$

(2) $f'\left(x\right)=-\dfrac{3}{\left(x-1\right)^{2}}$

(3) $f'\left(x\right)=\dfrac{2}{1-x^{2}}$

【知识点】基本初等函数的导数公式、导数的乘除法

【分析】由基本初等函数的求导公式以及导数的四则运算代入计算，即可得到结果.

【详解】（1）由 $f\left(x\right)=x\cos x-\sin x$ 可得 $f'\left(x\right)=\cos x+x\left(-\sin x\right)-\cos x=-x\sin x$；

（2）由 $f\left(x\right)=\dfrac{3x}{x-1}$ 可得 $f'\left(x\right)=\dfrac{3\left(x-1\right)-3x}{\left(x-1\right)^{2}}=-\dfrac{3}{\left(x-1\right)^{2}}$；

（3）由 $f\left(x\right)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 可得 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)$，

所以 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{1-x+1+x}{\left(1+x\right)\left(1-x\right)}=\dfrac{2}{1-x^{2}}$；

2．求下列函数的导数：

(1) $y=x^{4}-3x^{2}-5x+6$；

(2) $y=2^{x}+\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$；

(3) $y=x-\log_{2}x$；

(4) $y=\dfrac{\cos x}{x}$；

(5) $y=\dfrac{3x^{2}-x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}}$.

【答案】(1) $y'=4x^3-6x-5$

(2) $y'=2^x\ln2+\frac{1}{2}\cos x$

(3) $y'=1-\frac{1}{x\ln2}$

(4) $y'=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

(5) $y'=\frac{9}{2}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1$

【知识点】导数的乘除法、二倍角的正弦公式

【分析】根据函数结构，运用导数$\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f(x)'\pm g(x)'$，

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{\left[g(x)\right]^2}$运算法则，

结合指数、对数、正余弦函数等求导方法逐一计算.

【详解】（1）$\because \left(x^n\right)'=nx^{n-1}$，

$\therefore y'=\left(x^4\right)'-\left(3x^2\right)'-\left(5x\right)'+\left(6\right)'=4x^3-6x-5$

（2）$\because \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x$

$\therefore y=2^x+\frac{1}{2}\sin x$

$\therefore y'=\left(2^x+\frac{1}{2}\sin x\right)'=\left(2^x\right)'+\frac{1}{2}\left(\sin x\right)'=2^x\ln2+\frac{1}{2}\cos x$

（3）$\because \left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$

$\therefore y'=\left(x\right)'-\left(\log_2 x\right)'=1-\frac{1}{x\ln2}$

（4）$\because \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{\left[g(x)\right]^2}$

$\therefore y'=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{\left(\cos x\right)'\cdot x-\cos x\cdot\left(x\right)'}{x^2}=\frac{-\sin x\cdot x-\cos x}{x^2}=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

（5）$\because y=\frac{3x^2-x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}}=3x^{\frac{3}{2}}-x+5-9x^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore y'=\left(3x^{\frac{3}{2}}\right)'-\left(x\right)'+\left(5\right)'-\left(9x^{-\frac{1}{2}}\right)'=3\times\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}-1+0-9\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1$

3．求下列函数的导数

(1) $f(x)=x^2\ln x+\sin x$

(2) $f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$

【答案】(1) $f'(x)=2x\ln x+x+\cos x$

(2) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

【知识点】基本初等函数的导数公式、导数的运算法则、导数的乘除法

【分析】利用基本初等函数的导数和求导法则直接求导即可.

【详解】（1） $f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'+(\sin x)'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}+\cos x=2x\ln x+x+\cos x$.

（2） $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(x-1)-e^x(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$.