

选填练习四

1. 设全集为 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $S = \{-3, 0, 1\}$, $T = \{-1, 2\}$, 则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于().

- A. $\emptyset$ B. $\{-2, 3\}$ C. $\{-2, -1, 2, 3\}$ D. $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$

【答案】 B

【解析】 $S \cup T = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$,

$\complement_U(S \cup T) = \{-2, 3\}$.

故选B.

【标注】 【知识点】 交、并、补集混合运算

2. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 1, y > 1$ ”是“ $xy > 1$ ”的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

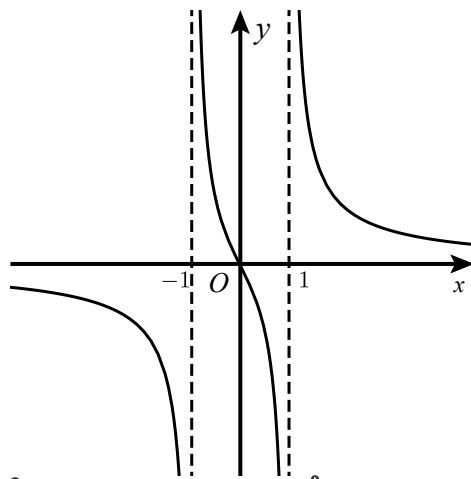
【答案】 A

【解析】 “ $x > 1, y > 1$ ” $\Rightarrow$ “ $xy > 1$ ”.

故选A.

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是().



- A. $f(x) = \frac{2x}{1-|x|}$ B. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ C. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ D. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

【答案】C

【解析】由图可知，当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$ ，排除A；

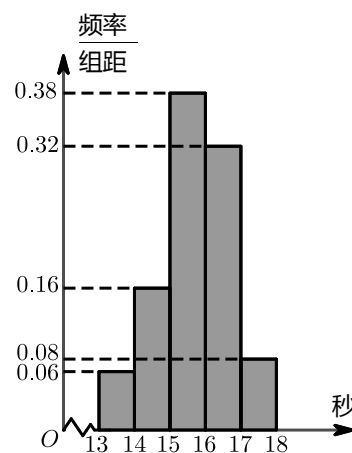
$f(x)$ 为奇函数，排除D，

当 $x \in (0, 1)$ ， $f(x) < 0$ ，排除B．

故选C．

【标注】【知识点】利用函数性质法求解析式

4. 某校抽取100名学生做体能测试，其中百米测试中，成绩全部介于13秒与18秒之间，将测试结果分成五组：第一组[13, 14)，第二组[14, 15)，…，第五组[17, 18]．如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图，若成绩低于 a 即为优秀，如果优秀的人数为14人，则 a 的估计值是（ ）．



A. 14

B. 14.5

C. 15

D. 15.5

【答案】B

【解析】第一组[13, 14)有 $0.06 \times 100 = 6$ 人，

则第二组[14, 15)有 $14 - 6 = 8$ 人优秀，

则 a 的估计值为 $14 + \frac{8}{100 \times 0.16} = 14.5$ ．

故选B．

【标注】【知识点】频率分布直方图

5. 已知一个圆锥的底面半径为2，高为3，其体积大小等于某球的表面积大小，则此球的体积是（ ）．

A. $4\sqrt{3}\pi$

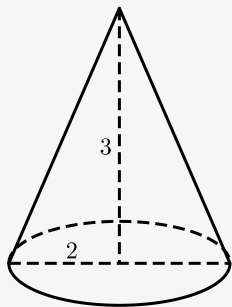
B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$

C. 4π

D. $\frac{4\pi}{3}$

【答案】D

【解析】



$$\therefore V_{\text{圆}} = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi R^2,$$

$$\therefore R = 1,$$

$$\therefore V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积

6. 已知 $a = 4^{0.3}$, $b = 0.3^4$, $c = \log_3 10$, 则().

A. $b > c > a$

B. $a > c > b$

C. $c > a > b$

D. $c > b > a$

【答案】 C

【解析】 $a = 4^{0.3} \in (1, 2)$,

$$b = 0.3^4 < 1,$$

$$c = \log_3 10 > 2.$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x - \cos\omega x$ ($\omega > 0$) 满足 $f(x_1) - f(x_2) = 4$, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, 则 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值为().

A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 A

【解析】 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = 4, |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore T = \pi, \omega = 2,$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

故选A.

【标注】【知识点】已知正弦型函数性质求解析式；辅助角公式

8. 设直线 $x - \sqrt{3}y + m = 0$ ($m \neq 0$) 与 x 轴交于点 C , 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A, B . 若 A 为 BC 中点, 则该双曲线的离心率是 ().

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】 D

【解析】 设双曲线的渐近线为 $y = \pm kx$,

$$\begin{cases} y = kx \\ x - \sqrt{3}y + m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_B = \frac{-m}{1 - \sqrt{3}k},$$

$$\begin{cases} y = -kx \\ x + \sqrt{3}y + m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A = \frac{-m}{1 + \sqrt{3}k},$$

$$C(-m, 0),$$

$$\therefore x_B + x_C = 2x_A,$$

$$\text{解得 } k = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2.$$

故选D.

【标注】【知识点】求双曲线的离心率；双曲线的标准方程；直线和双曲线的位置关系

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x+4}, & -4 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{x^3}{6-x}}, & 2 \leq x < 6 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - ax^2 = 0$ 有5个不等实根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$

C. $\left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

D. $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$

【答案】 D

【解析】 由题意 $f(0) = 0$,

$\therefore 0$ 是 $f(x) - ax^2 = 0$ 的一个根,

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) - ax^2 = 0$ 即 $a = \frac{f(x)}{x^2}$,

$\therefore a = \frac{f(x)}{x^2}$ 有 4 个实根,

即 $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 图象有 4 个不同的交点, ($x \neq 0$),

$$\frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} -\frac{1}{x(x+4)}, & -4 < x < 0 \\ \frac{1}{x(x+4)}, & 0 < x < 2 \\ \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}}, & 2 \leq x \leq 6 \end{cases} \quad (x \neq 0),$$

$$\text{令 } g(x) = -\frac{1}{x(x+4)} \quad (-4 < x < 0),$$

$$g'(x) = \frac{2x+4}{(x^2+4x)^2},$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, x = -2,$$

$\therefore$ 在 $(-4, -2)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减,

在 $(-2, 0)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增,

当 $x = -2$ 时, $g(x)$ 有极小值 $g(-2) = \frac{1}{4}$,

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{x(x+4)} \quad (0 < x < 2),$$

$$h'(x) = -\frac{2x+4}{(x^2+4x)^2} < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减,

$$\text{令 } \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x(6-x)}} \quad (2 \leq x \leq 6),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{6-2x}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-3}{(6x-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

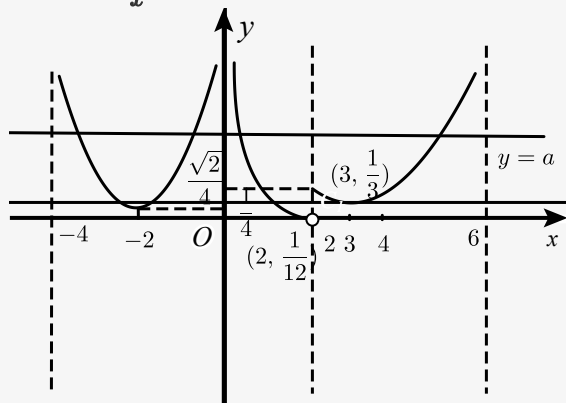
$$\text{令 } \varphi'(x) = 0, \text{ 则 } x = 3,$$

当 $2 \leq x < 3$ 时 $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 递减,

当 $x > 3$ 时 $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 递增,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时 $\varphi(x)$ 有极小值 $\varphi(3) = \frac{1}{3}$,

作出 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 图象,



如图所示,

当 $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x^2}$ 有 4 个交点,

当 $\frac{1}{3} < a \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时有 5 个交点,

当 $a = \frac{1}{3}$ 时有 4 个交点,

当 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$ 时有 3 个交点,

当 $a = \frac{1}{4}$ 时有 2 个交点,

当 $\frac{1}{12} < a < \frac{1}{4}$ 时有 1 个交点,

当 $a \leq \frac{1}{12}$ 时没有交点,

综上, 当 a 取 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$ 时 $f(x) - ax^2 = 0$ 有 5 个不等实根.

故选 D.

【标注】 【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合); 已知零点情况求参数的取值范围

10. i 是虚数单位, 复数 $\frac{2-i}{1+2i}$ 的共轭复数为 ____.

【答案】 i

【解析】
$$\begin{aligned}\frac{2-i}{1+2i} &= \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{-5i}{5} \\ &= -i,\end{aligned}$$

$\therefore$ 共轭复数为 i .

【标注】 【知识点】复数的四则运算综合

11. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中, 常数项为 ____.

【答案】 $\frac{15}{4}$

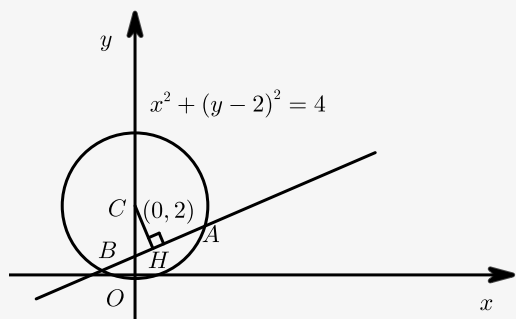
【解析】
$$\begin{aligned}T_{r+1} &= C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{-r} \\ &= C_6^r \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{3-\frac{3r}{2}}, \\ \text{令 } 3 - \frac{3r}{2} &= 0, r = 2, \\ C_6^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 &= 15 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】求项的系数或二项式系数

12. 已知过点(1,1)的直线与圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 相交于A, B两点, 则|AB|的最小值为 ____ .

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 由图知, 过圆心C, 作 $CH \perp AB$, 交AB于点H,



$$\therefore AB = 2AH = 2\sqrt{CA^2 - CH^2} = 2\sqrt{4 - CH^2},$$

当 $CH \perp AB$ 时, CH 取最小值时, H 坐标为(1, 1),

$$\therefore CH_{\min} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AB_{\min} = 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

13. 对某种型号的仪器进行质量检测, 每台仪器最多可检测3次, 一旦发现问题, 则停止检测, 否则一直检测到3次为止. 设该仪器一次检测出现问题的概率为0.2, 则检测2次停止的概率为 ____ ; 设检测次数为 X , 则 X 的数学期望为 ____ .

【答案】 $\frac{4}{25}; \frac{61}{25}$

【解析】 $P = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25},$

X 的可能取值为1、2、3,

$$P(X=1) = \frac{1}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{25},$$

$$P(X=3) = \frac{16}{25},$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{4}{25} + 3 \times \frac{16}{25} = \frac{61}{25}.$$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望

14. 已知 $a > 0, b > 0, a + b + c = 1$, 则 $\frac{a^2 + b^2 + 2}{c - 1}$ 的最大值是 ____ .

【答案】 -2

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \frac{a^2+b^2+2}{c-1} &= \frac{a^2+b^2+2}{-a-b} \\ &= -\frac{a^2+b^2+2}{a+b} \leq -\frac{\frac{(a+b)^2}{2}+2}{a+b} \\ &= -\left(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b}\right) \leq -2. \end{aligned}$$

当且仅当“ $a=b$ ”时且“ $a+b=2$ ”时“ $=$ ”成立.

【标注】 【知识点】 基本不等式成立的条件；已知等式关系求最值

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AC = 2$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \sqrt{3}|\vec{BA}|$, 则 $AB =$ _____ ; 若 $\vec{AE} = \lambda \vec{EC}$, $\vec{CF} = \lambda \vec{FB}$, $\lambda > 0$, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{BF}$ 的最大值为 _____ .

【答案】 $1 + \sqrt{3}$; $\frac{3 - \sqrt{3}}{4}$

【解析】 $\because \angle A = 60^\circ$, $AC = 2$,

$\therefore \vec{AC}$ 在 $\vec{AB}$ 上时投影为1,

$\because \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \sqrt{3}|\vec{BA}|$,

$\therefore \vec{BC}$ 在 $\vec{AB}$ 上投影为 $-\sqrt{3}$,

$\therefore AB = 1 + \sqrt{3}$,

$\vec{AE} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{AC}$,

$\vec{BF} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{BC} = \frac{1}{1+\lambda} (\vec{AC} - \vec{AB})$,

$$\begin{aligned} \vec{AE} \cdot \vec{BF} &= \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} (\vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC}) \\ &= \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} (3 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda^2 + 2\lambda + 1} (3 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}} (3 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题；数量积的最值问题