

综合练 3

一、单选题

1. 下列说法中正确的是 ()

A. 具有线性相关关系的变量 x, y , 其线性回归方程为 $y = 0.2x - m$, 若样本的中心 $(m, 3.2)$, 则 $m = 4$

B. 数据 3, 4, 2, 8, 1, 5, 8, 6 的中位数为 5

C. 将一组数据中的每一个数据加上同一个正数后, 方差变大

D. 若甲、乙两组数据的相关系数分别为 -0.91 和 0.89 , 则甲组数据的线性相关性更强

【答案】D

【知识点】计算几个数的中位数、各数据同时加减同一数对方差的影响、相关系数的意义及辨析、根据样本中心点求参数

【分析】把样本点的中心坐标代入线性回归方程, 求出 m 判断 A; 由中位数的计算公式即可判断 B; 由方差的性质即可判断 C; 由相关系数 r 的意义即可判断 D.

【详解】对于 A, 把 $(m, 3.2)$ 代入 $y = 0.2x - m$, 可得 $3.2 = 0.2m - m$, 解得 $m = -4$, 故 A 错误;

对于 B, 数据 3, 4, 2, 8, 1, 5, 8, 6, 即 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 8 的中位数为

$$\frac{4+5}{2} = 4.5, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 将一组数据中的每一个数据加上同一个正数后, 方差不变, 故 C 错误;

对于 D, 若甲、乙两组数据的相关系数分别为 -0.91 和 0.89 , 因为 $|-0.91| > |0.89|$, 则甲组数据的线性相关性更强, 故 D 正确.

故选: D.

2. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$, 则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ ()

A. -2

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

【答案】B

【知识点】正、余弦齐次式的计算、用和、差角的正切公式化简、求值

【分析】由两角和的正切公式可得 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2$, 再将所求式子弦化切得解.

【详解】因为 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$ ，所以 $\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha} = 2$ ，即 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2$ ，

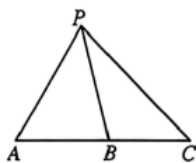
$$\therefore \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = -\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = -\frac{1}{2}.$$

故选：B.

3. 如图，在 $\triangle PAC$ 中， B 是边 AC 上的点，其中 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $C = \frac{\pi}{4}$ ， $\angle PBA = \frac{5\pi}{12}$ ， $BC = 8\sqrt{2}$ ，

则 $AB =$ ()



A. $6\sqrt{2}$

B. $6\sqrt{6}$

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{16\sqrt{6}}{3}$

【答案】D

【知识点】正弦定理解三角形、几何图形中的计算

【分析】先在 $\triangle PBC$ 中，由正弦定理求出 PB ，再在 $\triangle PAB$ 中，由正弦定理求出 AB 。

【详解】在 $\triangle PBC$ 中， $C = \frac{\pi}{4}$ ， $\angle BPC = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}$ ，

由正弦定理得 $\frac{PB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \angle BPC}$ ，

$$\text{所以 } PB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin \angle BPC} = \frac{8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 16,$$

在 $\triangle PAB$ 中， $A = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle APB = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ ，

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{PB}{\sin A}$ ，

$$\text{所以 } AB = \frac{PB \cdot \sin \angle APB}{\sin A} = \frac{16 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16\sqrt{6}}{3},$$

故选：D.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[m, M]$. 若 $a + b = 4$ ，则 $m + M$ 的值为 ()

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

【答案】D

【知识点】利用函数单调性求最值或值域、求指数型复合函数的值域

【分析】根据题意可得函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上递增, 利用 $a+b=4$ 可得 $m+M$ 的值.【详解】解法 1: 因为 $f(x) = \frac{e^{2x-4}-1}{e^{x-2}} + x - 1 = e^{x-2} - e^{2-x} + x - 1$,所以 $f(4-x) + f(x) = 2$,所以 $f(x)$ 关于 $(2, 1)$ 对称.因为 $a+b=4$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[m, M]$, 所以 $m+M=2$.解法 2: 因为 $f(x) = \frac{e^{2x-4}-1}{e^{x-2}} + x - 1 = e^{x-2} - e^{2-x} + x - 1$ 在 $[a, b]$ 上递增,所以 $m+M = f(a) + f(b) = f(4-a) + f(a) = 2$.解法 3: 取 $a=0, b=4$, 因为 $f(x) = \frac{e^{2x-4}-1}{e^{x-2}} + x - 1 = e^{x-2} - e^{2-x} + x - 1$ 在 $[0, 4]$ 上递增,所以 $m+M = f(0) + f(4) = 2$.

故选 D.

5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则“ $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+2} > a_n$,”是“ $\{a_n\}$ 是递增数列”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【知识点】充要条件的证明、由定义判定等比数列

【分析】利用等比递增数列的定义判断即可.

【详解】(1) 充分性证明: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_{n+2} > a_n$, 得 $a_{n+2} - a_n = a_n(q^2 - 1) > 0$,当 $a_n > 0$ 时, $q^2 - 1 > 0$, 则 $q > 1$ 或 $q < -1$, 当 $q > 1$ 时, 显然 $\{a_n\}$ 是递增数列,当 $q < -1$ 时, 则数列为摆动数列不能保证对任意正整数 n 使得 $a_{n+2} > a_n$ (舍去),同理当 $a_n < 0$ 时, $q^2 - 1 < 0$, 当 $0 < q < 1$ 时, 显然 $\{a_n\}$ 是递增数列,当 $-1 < q < 0$, 为摆动数列不能保证对任意正整数 n 使得 $a_{n+2} > a_n$ (舍去),

故充分性成立.

(2) 必要性证明：若 $\{a_n\}$ 是递增数列，则从第二项开始，每一项都比它的前一项大，

所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$, 故 $a_{n+2} > a_{n+1}$, 由上两个式子可得 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+2} > a_n$, 必要性成立.

故选：C

6. $S_n = -n^2 + 8n$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前12项和为 ()

A. 112

B. 48

C. 80

D. 64

【答案】C

【知识点】含绝对值的等差数列前 n 项和、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项

【分析】先由题设结合 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再结合数列 $\{a_n\}$ 各项正负情况即可求解.

【详解】因为 $S_n = -n^2 + 8n$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1^2 + 8 \times 1 = 7$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [-(n-1)^2 + 8(n-1)] = -2n + 9$,

经检验, $a_1 = 7$ 满足上式,

所以 $a_n = -2n + 9 (n \in \mathbf{N}^*)$, 令 $a_n = -2n + 9 \geq 0 \Rightarrow n \leq 4$, $a_n = -2n + 9 \leq 0 \Rightarrow n \geq 5$,

设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 4 项和为 $T_4 = S_4 = -4^2 + 8 \times 4 = 16$

数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为

$$T_{12} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{12}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - \cdots - a_{12}$$

$$= 2S_4 - S_{12} = 2 \times 16 - (-12^2 + 8 \times 12) = 80.$$

故选：C

7. 某校共有学生 2000 名，各年级男、女生人数如右表. 已知在全校学生中随机抽取 1 名，抽到二年级女生的概率是 0.19. 现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生，则应在三年级抽取的女学生人数为

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	250

A. 24

B. 16

C. 12

D. 8

【答案】D

【知识点】抽样比、样本总量、各层总数、总体容量的计算

【分析】根据题意现算出二年级女生的人数，得到三年级女生的人数，再利用分层抽样的方法抽取，即可得到答案.

【详解】由题意，抽到二年级女生的概率是 0.19，所以二年级的女生人数为

$$x = 2000 \times 0.19 = 380 \text{ 人},$$

所以三年级女生的人数为 $y = 250$ 人，

现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生，在三年级抽取的女学生人数为 $\frac{250}{2000} \times 64 = 8$ 人，

故选 D.

【点睛】本题主要考查了简单的随机抽样与分层抽样的应用，其中解答中熟记分层抽样的方法，合理准确计算是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

8. 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若数列 $\{S_n + a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列，则 $a_3 = (\quad)$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

【答案】C

【知识点】等差中项的应用、等比数列通项公式的基本量计算

【分析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，根据题意可得 $2b_2 = b_1 + b_3$ ，即 $2(S_2 + a_2) = 2a_1 + S_3 + a_3$ ，

化简整理得 $2q^2 - 3q + 1 = 0$ ，求得 a_1, q 得解.

【详解】令 $b_n = S_n + a_n$ ， $b_1 = S_1 + a_1 = 2a_1 = 1$ ， $\therefore a_1 = \frac{1}{2}$ ，

又 $2b_2 = b_1 + b_3$ ，即 $2(S_2 + a_2) = 2a_1 + S_3 + a_3$ ，即 $2(a_1 + 2a_2) = 3a_1 + a_2 + 2a_3$ ，

整理得 $3a_2 - a_1 - 2a_3 = 0$ ，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $3a_1q - a_1 - 2a_1q^2 = 0$ ，即

$$2q^2 - 3q + 1 = 0,$$

解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 1, 又 $q \neq 1$, 所以 $q = \frac{1}{2}$,

所以 $a_3 = a_1 \cdot q^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

故选: C.

9. 已知一组数据 1, 2, 3, 4, x 的下四分位数是 x , 则 x 的可能取值为 ()

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】D

【知识点】总体百分位数的估计

【分析】根据百分位数的定义求数据的下四分位数即可.

【详解】一共有 5 个数据, $5 \times 25\% = 1.25$,

故数据的下四分位数为从数据从小排到大的每 2 个数据, 所以 $1 \leq x \leq 2$.

故选: D.

10. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 , 若 $d_1 = \frac{1}{4}d_2$,

则点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离为 ()

A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{13}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【答案】B

【知识点】求点到直线的距离、已知方程求双曲线的渐近线

【分析】双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow C$ 的渐近线方程为 $2x \pm y = 0$ 利用点到直线的距离公式可得

$d_1 d_2 = \frac{4}{5}$, 进而求得 $d_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 可求点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离.

【详解】设 $P(m, n)$, 则 $m^2 - \frac{n^2}{4} = 1$, 即 $4m^2 - n^2 = 4$, C 的渐近线方程为 $2x \pm y = 0$, 由点到

直线的距离公式可得 $d_1 d_2 = \frac{|2m+n|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|2m-n|}{\sqrt{5}} = \frac{|4m^2-n^2|}{5} = \frac{4}{5}$,

因为 $d_1 = \frac{1}{4}d_2$, 所以 $d_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. 易知双曲线 C 的右焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$,

所以点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

故选: B.

11. 若直线 $y=2x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 无公共点, 则双曲线的离心率的取值范围为 ()

- A. $(1,\sqrt{5})$ B. $(1,\sqrt{5}]$ C. $(\sqrt{5},+\infty)$ D. $[\sqrt{5},+\infty)$

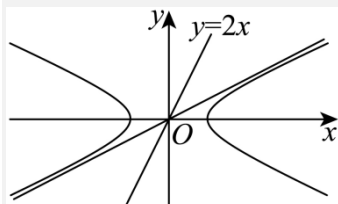
【答案】B

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】过原点的直线与双曲线无公共点, 则渐近线斜率小于等于已知直线的斜率, 再求双曲线的离心率即可得解.

【详解】由题意可知, 双曲线的渐近线斜率为 $k=\pm\frac{b}{a}$,

因为直线 $y=2x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 无公共点,



所以 $\frac{b}{a}\leq 2$, $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\leq\sqrt{5}$,

所以双曲线的离心率范围为 $(1,\sqrt{5}]$.

故选: B.

12. “ $a<b+e$ ”是“ $\ln(a-b)<1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

【答案】B

【知识点】判断命题的必要不充分条件、由对数函数的单调性解不等式

【分析】根据对数函数性质结合充分、必要条件分析判断即可求解.

【详解】因为 $a<b+e$, 所以 $a-b<e$,

又因为 $a-b$ 不一定大于 0, 即 $\ln(a-b)$ 不一定成立,

所以“ $a<b+e$ ”是“ $\ln(a-b)<1$ ”的不充分条件,

因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $\ln(a-b) < 1 \Leftrightarrow 0 < a-b < e$ ，即 $a < b+e$ ，所以“ $a < b+e$ ”是“ $\ln(a-b) < 1$ ”的必要条件，
 所以“ $a < b+e$ ”是“ $\ln(a-b) < 1$ ”的必要不充分条件，
 故选：B.

13. 下列说法正确的是（ ）

- A. 一组数据的标准差为 0，则这组数据中的数均相等
- B. 两组数据的标准差相等，则这两组数据的平均数相等
- C. 若两个变量的相关系数越接近于 0，则这两个变量的相关性越强
- D. 已知变量 X, Y ，由它们的样本数据计算得到 K^2 的观测值 $k \approx 5.527$ ，
 K^2 的部分临界值如下表：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.025	0.01
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

则在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为变量 X, Y 没有关系

【答案】A

【知识点】计算几个数据的极差、方差、标准差、相关系数的意义及辨析、卡方的计算、独立性检验解决实际问题

【分析】根据标准差定义可判断 A 项；通过取反例可排除 B 项；利用相关系数的概念易排除 C 项；利用独立性检验的规定，可判断结论不成立.

【详解】对于 A，根据标准差定义，一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的标准差

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]} = 0 \text{ 时,}$$

显然有 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$ ，故 A 正确；

对于 B，两组数据的标准差相等，这两组数据的平均数未必相等，如都为 1 和都为 2 的两组数据，

它们的标准差均为 0，但它们的平均数分别为 1 和 2，故 B 错误；

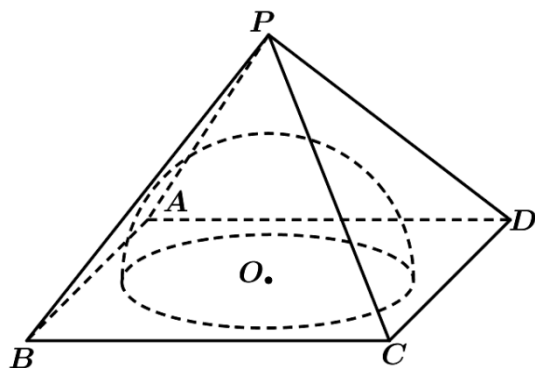
对于 C，两个变量的相关系数越接近于 0，两个变量的相关性越弱，故 C 错误；

对于 D， $k \approx 5.527 > 5.024$ ，根据独立性检验原理，

在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为变量 X, Y 有关系，故 D 错误.

故选：A

14. 如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 M 的球面上，侧面 PAB 是等边三角形.若半球 O 的球心为四棱锥的底面中心，且半球与四个侧面均相切，则半球 O 的体积与球 M 的体积的比值为（ ）



A. $\frac{\sqrt{3}}{18}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{16}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{15}$

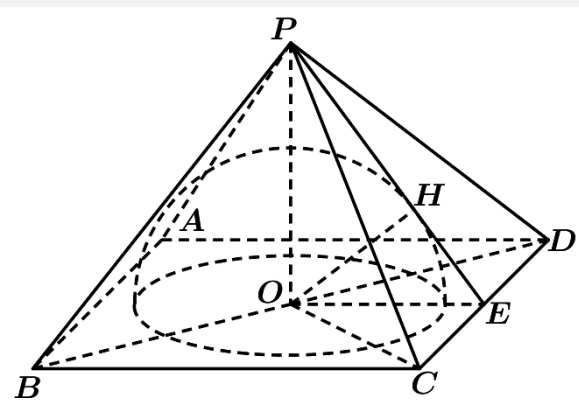
D. $\frac{\sqrt{3}}{14}$

【答案】A

【知识点】多面体与球体内切外接问题、球的体积的有关计算

【分析】易知 $BO = PO$ ，则球 M 的球心是 O ，其 $R = 2\sqrt{2}$ ，再由半球 O 的半径为 $R_0 = OH$ ，由 $\frac{R_0}{R} = \frac{OH}{PO} = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，结合球的体积公式求解.

【详解】如图：



连接 PO ， BD ，取 CD 的中点 E ，连接 PE ， OE ，

过 O 作 $OH \perp PE$ 于 H ，易知 $PO \perp$ 底面 $ABCD$ ，

设 $AB = 4$ ，则 $BD = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$ ， $BO = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2}$ ，

$$PO = \sqrt{BP^2 - BO^2} = 2\sqrt{2}，$$

所以球 M 的球心是 O ，设半径为 R ，则 $R = 2\sqrt{2}$ ，

半球 O 的半径为 R_0 ，则 $R_0 = OH$ ，

$$\text{所以 } \frac{R_0}{R} = \frac{OH}{PO} = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{故 } \frac{V_{\text{半球}O}}{V_{\text{球}M}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4\pi R_0^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

故选：A

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$ ，其前 n 项和为 S_n ，则数列 $\{(-1)^n \cdot S_n\}$ 的前 2025 项和为（ ）

A. $\frac{2024 \times 2025}{2}$ B. $-\frac{2024 \times 2025}{2}$ C. $\frac{2025 \times 2026}{2}$ D. $-\frac{2025 \times 2026}{2}$

【答案】D

【知识点】求等差数列前 n 项和、分组（并项）法求和

【分析】根据等差数列求和公式计算，再结合分组求和计算求解.

【详解】数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$ ，其前 n 项和为 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ ，

$$\text{所以 } (-1)^n S_n = (-1)^n n^2,$$

则数列 $\{(-1)^n \cdot S_n\}$ 的前 2025 项和为

$$\begin{aligned} & -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 2023^2 + 2024^2 - 2025^2 \\ &= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + \cdots + (2024-2023)(2024+2023) - 2025^2 \\ &= 1+2+3+4+\cdots+2024 - 2025^2 \\ &= \frac{2024(1+2024)}{2} - 2025^2 \\ &= \frac{2024 \times 2025}{2} - 2025^2 = \frac{2025 \times (-2026)}{2}. \end{aligned}$$

故选：D.

16. 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点，过点 F 作垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 S, T 两点， A_1, A_2 分别为双曲线的左、右顶点，连接 A_1S 交 y 轴于点 R ，连接 RA_2 并延长交 ST 于点 H ，且 $4\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FT}$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{5}{3}$

【答案】D

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】先将 $F_1(c, 0)$ 代入双曲线，得到 S, T 两点坐标，写出直线 SA_1 的方程，得到 R 点坐标，写出直线 RA_2 的方程，得到 H 点坐标，利用 $4\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FT}$ ，构造出关于 a, b, c 的方程，结合双曲线中 $c^2 = a^2 + b^2$ ，得到离心率的方程，解出离心率.

【详解】根据题意，画出示意图，如图所示，则 S, F, H, T 的横坐标都为 c ，

$$\text{代入双曲线方程得 } y = \pm \frac{b^2}{a}, \therefore S\left(c, \frac{b^2}{a}\right), T\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

$$\text{而 } A_1(-a, 0), \text{ 所以直线 } SA_1 \text{ 方程为 } y = \frac{b^2}{a(c+a)}(x+a),$$

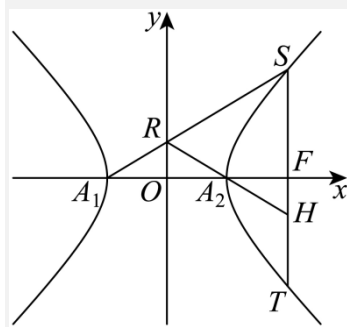
$$\text{令 } x=0, \text{ 得 } y_R = \frac{ab^2}{a(c+a)} = \frac{b^2}{c+a}, \therefore R\left(0, \frac{b^2}{c+a}\right)$$

$$\text{所以直线 } RA_2: y = -\frac{b^2}{a(c+a)}(x-a), \text{ 令 } x=c \text{ 得, } y_H = -\frac{b^2(c-a)}{a(c+a)},$$

因为 $4\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FT}$ ，所以可得

$$4 \times \left(-\frac{b^2(c-a)}{a(c+a)} \right) = -\frac{b^2}{a}, \text{ 整理得 } 3c = 5a, \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}.$$

故选：D.



17. 已知 α 是锐角， $\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{11}$ ，则 $\sin\alpha = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{77}}{11}$

B. $\frac{\sqrt{33}}{11}$

C. $\frac{\sqrt{55}}{11}$

D. $\frac{\sqrt{11}}{11}$

【答案】B

【知识点】由条件等式求正、余弦

【分析】由 $\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{11}$ 联立 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 可得.

【详解】由 $\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{11}$ 得 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin\alpha$,

由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 得 $\sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin\alpha\right)^2 = 1$,

化简得 $(\sqrt{11}\sin\alpha - \sqrt{3})^2 = 0$, 得 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$

故选: B.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 前 n 项积是 T_n , 若 $S_6 = 3$, $S_3 = 6$, 则 ()

- A. S_n 无最大值, T_n 无最小值 B. S_n 有最大值, T_n 无最小值
C. S_n 无最大值, T_n 有最小值 D. S_n 有最大值, T_n 有最小值

【答案】D

【知识点】利用定义求等差数列通项公式、等差数列通项公式的基本量计算、等差数列前 n 项和的基本量计算、求等差数列前 n 项和的最值

【分析】根据等差数列前 n 项和公式求基本量, 进而确定 $a_n = 4 - n$ 且 $S_n = -\frac{1}{2}(n - \frac{7}{2})^2 + \frac{49}{8}$, 讨论 n 判断 T_n 的值, 即可得答案.

【详解】令数列公差为 d , 则 $\begin{cases} S_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = 6 \\ S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a_1 + a_3 = 4 \\ a_1 + a_6 = 1 \end{cases}$, 作差可得 $3d = -3$,

所以 $d = -1$, 则 $a_1 = 3$, 故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 - (n-1) = 4 - n$,

当 $a_n > 0$ 得 $1 \leq n < 4$, 当 $a_n = 0$ 得 $n = 4$, 当 $a_n < 0$ 得 $n > 4$,

显然, 当 $1 \leq n < 4$ 时 $T_n > 0$, $n \geq 4$ 时 $T_n = 0$, 所以 T_n 有最小值,

且 $S_n = \frac{n(7-n)}{2} = -\frac{1}{2}(n - \frac{7}{2})^2 + \frac{49}{8}$, 当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 有最大值.

故选: D

19. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $x - \sin x < 0$ ”是“ $x < 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【知识点】充要条件的证明、用导数判断或证明已知函数的单调性、比较函数值的大小关系

【分析】利用导数研究 $f(x) = x - \sin x$ 的单调性，结合 $f(x) = x - \sin x < f(0) = 0$ 及充分、必要性定义即可得答案.

【详解】对应 $f(x) = x - \sin x$ ，有 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ，故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，

若 $f(x) = x - \sin x < f(0) = 0$ ，即 $x < 0$ ，

所以“ $x - \sin x < 0$ ”是“ $x < 0$ ”的充要条件.

故选：C

20. 已知球 O 半径为 $3\sqrt{2}$ ，设 S 、 A 、 B 、 C 是球面上四个点，其中 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC = 4\sqrt{2}$ ，

则棱锥 $S-ABC$ 的体积的最大值为（ ）

A. $\frac{64\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{64\sqrt{2}}{9}$

C. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{32\sqrt{2}}{9}$

【答案】A

【知识点】多面体与球体内切外接问题、锥体体积的有关计算

【分析】结合图像，根据题意可知，棱锥 $S-ABC$ 的底面积 $S_{\triangle ABC}$ 是定值，故其高 h 最大时，体积最大，显然如图时高 h 最大，进而利用勾股定理求出 h ，再利用锥体的体积公式即可得解.

【详解】根据题意得， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16$ ， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 8$ ，

结合图像，可知棱锥 $S-ABC$ 的底面积 $S_{\triangle ABC}$ 是定值，故其高 h 最大时，体积最大，

由 $\text{Rt}\triangle ABC$ 易知， AC 是 $\triangle ABC$ 所在小圆的直径，不妨设其中点为 Q ，即 $\triangle ABC$ 所在小圆的圆心为 Q ，显然，当 SQ 与面 ABC 垂直时，棱锥高 $h = SQ$ 最大，即体积最大，

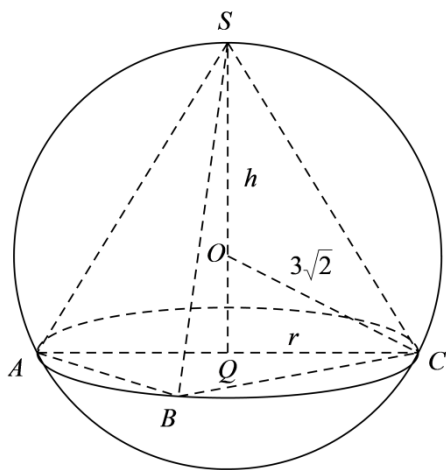
此时，设球心为 O ，半径为 R ，

则在直角 $\text{Rt}\triangle CQO$ 中， $OC^2 = CQ^2 + OQ^2$ ，即 $R^2 = \left(\frac{1}{2} AC\right)^2 + (h - R)^2$ ，即

$(3\sqrt{2})^2 = 4^2 + (h - 3\sqrt{2})^2$ ，解得 $h = 4\sqrt{2}$ 或 $h = 2\sqrt{2}$ （舍去），

故棱锥 $S-ABC$ 的体积最大值为 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \times h = \frac{1}{3} \times 16 \times 4\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{2}}{3}$.

故选：A.



【点睛】本题考查的知识点是球内接多面体，其中分析出何时四面体 $SABC$ 的体积取得最大值，是解答的关键.

21. 已知 a 为正数，则“ $a > 3$ ”是“ $a^a > a^3$ ”的 ().

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

【答案】A

【知识点】判断命题的充分不必要条件、判断指数函数的单调性

【分析】根据给定条件，当 $a > 3$ 时，利用指数函数的单调性即可判断，当 $a^a > a^3$ 时，分类讨论，最后利用充分条件、必要条件的定义判断作答.

【详解】当 $a > 3$ 时，所以 $y = a^x$ 为增函数，所以 $a^a > a^3$,

当 $a^a > a^3$ 时，当 $a > 1$ 时，则 $a > 3$ ，当 $0 < a < 1$ 时，则 $a < 3$ ，此时 $0 < a < 1$;

所以“ $a > 3$ ”是“ $a^a > a^3$ ”的充分非必要条件.

故选：A.

22. 设 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点， O 为坐标原点，过 F 作双曲线的一条渐近线的垂线，垂足为 H ，若 $\triangle FOH$ 的内切圆与 x 轴切于点 B ，且 $\overline{BF} = 3\overline{OB}$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$ B. $\frac{3+2\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ D. $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$

【答案】A

【知识点】切线长、已知方程求双曲线的渐近线、求双曲线的离心率或离心率的取值范围

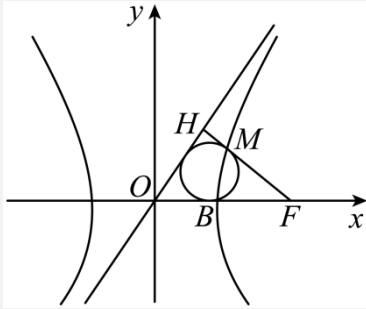
【分析】首先求出 $r = \frac{a+b-c}{2}$ ，由 $\overline{BF} = 3\overline{OB}$ ，通过运算得到 $2b = 2a + c$ ，再利用 a, b, c, e 之

间的关系得到关于 e 的方程，解出 e 即可.

【详解】 $\because$ 双曲线的渐近线方程为: $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即 $bx \pm ay = 0$,

$\therefore F(c, 0)$ 到渐近线的距离为 $|FH| = \frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b$,

$\therefore |OH| = \sqrt{c^2 - b^2} = a$, 则直角三角形 FOH 的内切圆的半径 $r = \frac{a+b-c}{2}$,



如图, 设三角形的内切圆与 FH 切于 M , 则 $|MH| = r = \frac{a+b-c}{2}$, $\overline{BF} = 3\overline{OB}$,

可得 $|FM| = |BF| = \frac{3}{4}c$, $\therefore |BF| + |MH| = \frac{3}{4}c + \frac{a+b-c}{2} = |FH| = b$,

即 $2b = 2a + c$, 则 $4b^2 = 4c^2 - 4a^2 = c^2 + 4ac + 4a^2$,

所以 $8a^2 + 4ac - 3c^2 = 0$,

由 $e = \frac{c}{a}$, $\therefore 3e^2 - 4e - 8 = 0$, $\because e > 1$, $\therefore e = \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

故选: A.

【点睛】关键点点睛: 直角三角形内切圆的半径 $r = \frac{a+b-c}{2}$.

二、填空题

23. 已知函数 $y = \log_2(x^2 - 2ax + 8)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $[2, 3]$

【知识点】对数型复合函数的单调性、已知二次函数单调区间求参数值或范围、由对数(型)的单调性求参数

【分析】由复合函数单调性可知, $y = x^2 - 2ax + 8$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 且 $x^2 - 2ax + 8 > 0$ 恒成立, 再通过对称轴和函数的最值的限定, 列出不等式求解.

【详解】因为函数 $y = \log_2(x^2 - 2ax + 8)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $y = x^2 - 2ax + 8$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 且 $x^2 - 2ax + 8 > 0$ 恒成立,

$$\text{即 } \begin{cases} a \geq 2 \\ 4 - 4a + 8 \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a \in [2, 3].$$

故答案为: $[2, 3]$.

24. 已知两个单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, 若 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = \underline{\hspace{2cm}}$; $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| + |\vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_2|$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

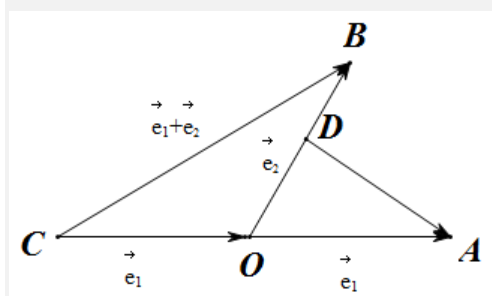
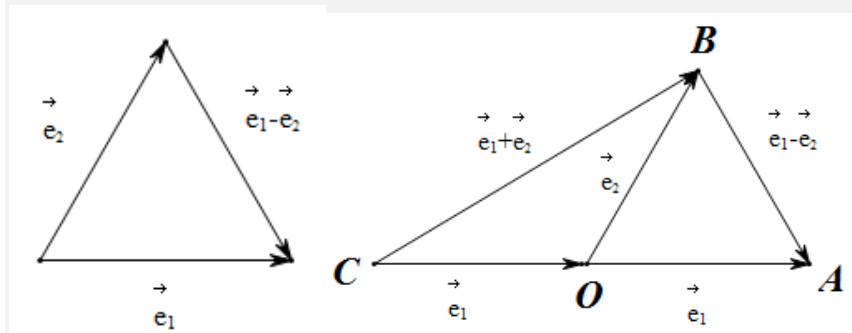
【答案】 $1 \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}$

【知识点】已知模求参数、向量与几何最值、用向量解决线段的长度问题、已知数量积求模

【分析】利用单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为临边构造等边三角形, 则 $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|$ 为等边三角形的第三边, 向左平移 $\vec{e}_1$, 使 $\vec{e}_1$ 的终点与 $\vec{e}_2$ 的起点重合, 即可构造出 $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, 在直线 OB 上取一点 D , 连接 AD , 即可构造出向量 $\vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_2$, 后看图计算可得.

【详解】由数量积的定义得 $|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cos \theta = \frac{1}{2}$, $\theta = 60^\circ$,

如下图所示, 得到一个正三角形, $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ 就是 $\overrightarrow{BA}$, 故 $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = 1$,



故答题空 1 答案为 1;

平移 $\vec{e}_1$, 可得 $\overrightarrow{CB} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, 且 $\angle BOA = \angle A = 60^\circ$, $\angle BCA = 30^\circ$, 所以 $\angle CBA = 90^\circ$, 故

$|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = \sqrt{3}$, 由上图可知, 设 $\overrightarrow{OD} = \lambda \vec{e}_2$, 则 $\overrightarrow{DA} = \vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_2$, 易知当 $AD \perp OD$ 时, 有 $|\vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_2|$

的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| + |\vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_2|$ 的最小值是 $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

【点睛】此题考向量的运算，合理的构造图形，可以有效减少计算量，属于简单题。

25. 若展开式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^n$ 中只有第 5 项的二项式系数最大，则其展开式中常数项为_____。

【答案】7

【知识点】求二项展开式的第 k 项

【分析】由展开式中只有第 5 项最大，得 $n=8$ ，写出展开式的通项，求常数项。

【详解】由题意 $n=8$ ，所以展开式第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_8^r \cdot (\sqrt[3]{x})^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = C_8^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{\frac{8-4r}{3}}$ ，

令 $\frac{8-4r}{3} = 0$ ，得 $r=2$ ，故常数项为 $C_8^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 7$ 。

故答案为：7。

26. $\left(\frac{x}{y} + m\right)(x-y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 -15，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】2

【知识点】两个二项式乘积展开式的系数问题

【分析】根据题意，结合二项展开式的性质，得到 $C_5^1(-1)^4 + m \cdot C_5^2(-1)^3 = -15$ ，求得 m 的值，即可得到答案。

【详解】由多项式 $\left(\frac{x}{y} + m\right)(x-y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 -15，

可得 $C_5^1(-1)^4 + m \cdot C_5^2(-1)^3 = -15$ ，即 $5 - 10m = -15$ ，解得 $m = 2$ 。

故答案为：2。

27. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则 $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\sqrt{5} - 2$

【知识点】根据数列递推公式写出数列的项、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项

【分析】通过题给条件逐项计算发现规律，即可写出 a_5 的值。

【详解】由题知 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，即 $2a_1 = a_1 + \frac{1}{a_1}$ ，因为 $a_1 > 0$ ，解得 $a_1 = 1$ ，

$n=2$ 时, $2(a_1+a_2)=a_2+\frac{1}{a_2}$, 即 $a_2-\frac{1}{a_2}=-2$, 因为 $a_2>0$, 解得 $a_2=\sqrt{2}-1$,

$n=3$ 时, $2(a_1+a_2+a_3)=a_3+\frac{1}{a_3}$, 即 $2(1+\sqrt{2}-1+a_3)=a_3+\frac{1}{a_3}$, 即 $a_3-\frac{1}{a_3}=-2\sqrt{2}$, 因为 $a_3>0$, 解得 $a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,

同理可得 $a_4=2-\sqrt{3}$, $a_5=\sqrt{5}-2$.

故答案为: $\sqrt{5}-2$.

28. 已知 $(2x+1)^n$ 的展开式中, 各项系数之和为 81, 则二项式系数之和为_____.

【答案】16

【知识点】二项式的系数和、二项展开式各项的系数和

【分析】令 $x=1$, 结合二项式 $(2x+1)^n$ 各项系数和可求得 n 的值, 进而可求得该二项式系数之和.

【详解】因为 $(2x+1)^n$ 的展开式中, 各项系数之和为 81, 令 $x=1$, 可得 $3^n=81$, 解得 $n=4$, 因此, 二项式系数之和为 $2^4=16$.

故答案为: 16.

29. 若曲线 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点横坐标为 x_n , 则

$\log_{2025} x_1 + \log_{2025} x_2 + \cdots + \log_{2025} x_{2024} =$ _____.

【答案】-1

【知识点】对数的运算、求在曲线上一点处的切线方程(斜率)、数列求和的其他方法

【分析】利用导数求切线方程, 然后求与 x 轴的交点横坐标, 再代入求值计算即可.

【详解】求导得: $y'=(n+1)x^n$,

则曲线 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线为 $y-1=(n+1)(x-1)$,

令 $y=0$ 得: 切线与 x 轴的交点横坐标为 $x_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, ($n\in\mathbf{N}^*$)

故 $\log_{2025} x_1 + \log_{2025} x_2 + \cdots + \log_{2025} x_{2024} = \log_{2025} x_1 x_2 \cdots x_{2024} = \log_{2025} \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2024}{2025}$
 $= \log_{2025} \frac{1}{2025} = -1$,

故答案为: -1.

三、解答题

30. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) - 2x + 1$, 若 $g(x) \leq 0$ 在其定义域内恒成立, 求实数 a 的最小值;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = x^2$ 恰有两个相异的实根 x_1, x_2 , 求实数 a 的取值范围, 并证明 $x_1 x_2 > 1$.

【答案】(1) 极大值为 $\ln 2 - 1$, 无极小值

(2) -1

(3) $(-\infty, -1)$, 证明见解析

【知识点】利用导数研究双变量问题、利用导数研究方程的根、利用导数研究不等式恒成立问题、求已知函数的极值

【分析】(1) 首先求出函数的导函数, 即可得到 x 、 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系, 从而求出函数的极值;

(2) 依题意参变分离即可得到 $a + 2 \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x} (x > 0)$, 利用导数说明函数的单调性, 求出函数的最大值, 即可求出参数的取值范围, 即可得解;

(3) 由 $f(x) = x^2$, 即可得到 $\frac{\ln x}{x} - x - a = 0$, 令 $m(x) = \frac{\ln x}{x} - x - a (x > 0)$, 利用导数说明函数的单调性, 即可求出函数的最小值, 依题意可得 $-1 - a > 0$, 即可求出参数 a 的取值范围,

再证 $x_1 x_2 > 1$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 x_2 > 1 \Leftrightarrow x_1 > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow m(x_1) > m\left(\frac{1}{x_2}\right)$, 则

$m(x_1) - m\left(\frac{1}{x_2}\right) = \left(\frac{1}{x_2} + x_2\right) \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2}$, 再令 $\varphi(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right) \ln x - x + \frac{1}{x} (x > 1)$, 利用导数说

明函数的单调性, 即可求出函数的最小值, 即可得证;

【详解】(1) 解: 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x$, $x \in (0, +\infty)$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 2$,

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	$\ln 2 - 1$	单调递减

所以 $f(x)$ 的极大值为 $\ln 2 - 1$ ，无极小值。

(2) 解：由题意得 $g(x) = \ln x - (a+2)x + 1 \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，

因为 $x > 0$ ，所以 $a+2 \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立。

设 $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x} (x > 0)$ ，则 $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ ，

令 $h'(x) = 0$ ，解得 $x = 1$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $h'(x) > 0$ ，函数 $h(x)$ 单调递增；

当 $x > 1$ 时， $h'(x) < 0$ ，函数 $h(x)$ 单调递减。

因此 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$ ，所以 $a+2 \geq 1$ ，即 $a \geq -1$ 。

所以实数 a 的最小值 -1 。

(3) 解：由 $f(x) = x^2$ 即 $\ln x - ax = x^2$ 得 $\frac{\ln x}{x} - x - a = 0$ ，

令 $m(x) = \frac{\ln x}{x} - x - a (x > 0)$ ，则 $m'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2}$ ，

设 $t(x) = 1 - x^2 - \ln x$ ，则 $t'(x) = -2x - \frac{1}{x}$ ，

因为 $x > 0$ ，所以 $t'(x) < 0$ 恒成立，函数 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，

而 $t(1) = 0$ ，故在 $(0, 1)$ 上 $t(x) > 0$ ， $m'(x) > 0$ ， $m(x)$ 单调递增，

在 $(1, +\infty)$ 上 $t(x) < 0$ ， $m'(x) < 0$ ， $m(x)$ 单调递减，

所以 $m(x)_{\max} = m(1) = -1 - a$ 。

故方程 $f(x) = x^2$ 恰有两个相异的实根只需 $-1 - a > 0$ 。

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1)$ 。

下证： $x_1x_2 > 1$ ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，则 $0 < x_1 < 1 < x_2$ ， $0 < \frac{1}{x_2} < 1$ ，

$$\text{所以 } x_1x_2 > 1 \Leftrightarrow x_1 > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow m(x_1) > m\left(\frac{1}{x_2}\right).$$

因为 $m(x_1) = m(x_2) = 0$ ，

$$\text{所以 } m(x_1) - m\left(\frac{1}{x_2}\right) = m(x_2) - m\left(\frac{1}{x_2}\right) = \left(\frac{\ln x_2}{x_2} - x_2 - a\right) - \left(\frac{\ln \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_2}} - \frac{1}{x_2} - a\right)$$

$$= \frac{\ln x_2}{x_2} - x_2 - \frac{\ln \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_2}} + \frac{1}{x_2} = \frac{\ln x_2}{x_2} - x_2 + x_2 \ln x_2 + \frac{1}{x_2} = \left(\frac{1}{x_2} + x_2\right) \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2}$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \left(\frac{1}{x} + x\right) \ln x - x + \frac{1}{x} \quad (x > 1), \text{ 则 } \varphi'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x > 0,$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

$$\text{所以当 } x > 1 \text{ 时, } \varphi(x) > \varphi(1) = 0, \text{ 即 } \left(\frac{1}{x_2} + x_2\right) \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} > 0,$$

$$\text{所以 } m(x_1) > m\left(\frac{1}{x_2}\right), \text{ 所以 } x_1x_2 > 1.$$

【点睛】导函数中常用的两种常用的转化方法：一是利用导数研究含参函数的单调性，常化为不等式恒成立问题．注意分类讨论与数形结合思想的应用；二是函数的零点、不等式证明常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理．