

综合练 3

一、单选题

1. 下列说法中正确的是 ()

A. 具有线性相关关系的变量 x, y , 其线性回归方程为 $y = 0.2x - m$, 若样本的中心 $(m, 3.2)$, 则 $m = 4$

B. 数据 3, 4, 2, 8, 1, 5, 8, 6 的中位数为 5

C. 将一组数据中的每一个数据加上同一个正数后, 方差变大

D. 若甲、乙两组数据的相关系数分别为 -0.91 和 0.89 , 则甲组数据的线性相关性更强

2. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$, 则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ ()

A. -2

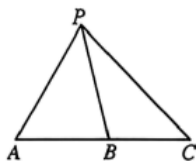
B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

3. 如图, 在 $\triangle PAC$ 中, B 是边 AC 上的点, 其中 $A = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{4}$, $\angle PBA = \frac{5\pi}{12}$, $BC = 8\sqrt{2}$,

则 $AB =$ ()



A. $6\sqrt{2}$

B. $6\sqrt{6}$

C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{16\sqrt{6}}{3}$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{2x-4} - 1}{e^{x-2}} + x - 1$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[m, M]$. 若 $a + b = 4$, 则 $m + M$ 的值为 ()

A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则“ $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+2} > a_n$,”是“ $\{a_n\}$ 是递增数列”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. $S_n = -n^2 + 8n$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 ()

A. 112

B. 48

C. 80

D. 64

7. 某校共有学生 2000 名, 各年级男、女生人数如右表. 已知在全校学生中随机抽取 1 名, 抽到二年级女生的概率是 0.19. 现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生, 则应在三年级

抽取的女学生人数为

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	250

- A. 24 B. 16 C. 12 D. 8

8. 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若数列 $\{S_n + a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列，则 $a_3 =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{5}{8}$

9. 已知一组数据 1, 2, 3, 4, x 的下四分位数是 x ，则 x 的可能取值为 ()

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

10. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 ，若 $d_1 = \frac{1}{4}d_2$ ，

则点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离为 ()

- A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

11. 若直线 $y = 2x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 无公共点，则双曲线的离心率的取值范围为 ()

- A. $(1, \sqrt{5})$ B. $(1, \sqrt{5}]$ C. $(\sqrt{5}, +\infty)$ D. $[\sqrt{5}, +\infty)$

12. “ $a < b + e$ ”是“ $\ln(a - b) < 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

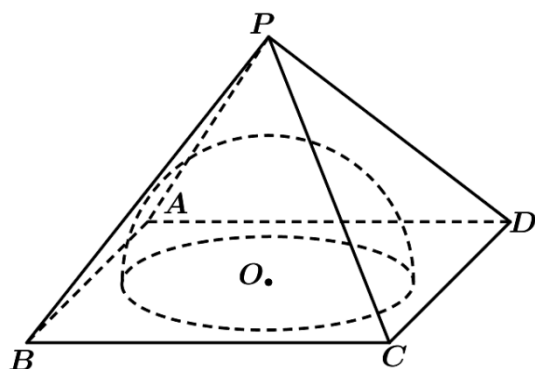
13. 下列说法正确的是 ()

- A. 一组数据的标准差为 0，则这组数据中的数均相等
B. 两组数据的标准差相等，则这两组数据的平均数相等
C. 若两个变量的相关系数越接近于 0，则这两个变量的相关性越强
D. 已知变量 X, Y ，由它们的样本数据计算得到 K^2 的观测值 $k \approx 5.527$ ， K^2 的部分临界值如下表：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.1	0.05	0.025	0.01
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

则在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为变量 X, Y 没有关系

14. 如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 的每个顶点都在球 M 的球面上, 侧面 PAB 是等边三角形. 若半球 O 的球心为四棱锥的底面中心, 且半球与四个侧面均相切, 则半球 O 的体积与球 M 的体积的比值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{18}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{15}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{14}$
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$, 其前 n 项和为 S_n , 则数列 $\{(-1)^n \cdot S_n\}$ 的前 2025 项和为 ()
- A. $\frac{2024 \times 2025}{2}$ B. $-\frac{2024 \times 2025}{2}$ C. $\frac{2025 \times 2026}{2}$ D. $-\frac{2025 \times 2026}{2}$
16. 已知 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 过点 F 作垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 S, T 两点, A_1, A_2 分别为双曲线的左、右顶点, 连接 A_1S 交 y 轴于点 R , 连接 RA_2 并延长交 ST 于点 H , 且 $4\overline{FH} = \overline{FT}$, 则双曲线的离心率为 ()
- A. $\frac{7}{2}$ B. 3 C. 2 D. $\frac{5}{3}$
17. 已知 α 是锐角, $\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{11}$, 则 $\sin\alpha =$ ()
- A. $\frac{\sqrt{77}}{11}$ B. $\frac{\sqrt{33}}{11}$ C. $\frac{\sqrt{55}}{11}$ D. $\frac{\sqrt{11}}{11}$
18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 前 n 项积是 T_n , 若 $S_6 = 3$, $S_3 = 6$, 则 ()
- A. S_n 无最大值, T_n 无最小值 B. S_n 有最大值, T_n 无最小值

- C. S_n 无最大值, T_n 有最小值 D. S_n 有最大值, T_n 有最小值

19. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $x - \sin x < 0$ ”是“ $x < 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

20. 已知球 O 半径为 $3\sqrt{2}$, 设 S, A, B, C 是球面上四个点, 其中 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 4\sqrt{2}$, 则棱锥 $S-ABC$ 的体积的最大值为 ()

- A. $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{64\sqrt{2}}{9}$ C. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{32\sqrt{2}}{9}$

21. 已知 a 为正数, 则“ $a > 3$ ”是“ $a^a > a^3$ ”的 () .

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分也非必要条件

22. 设 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 过 F 作双曲线的一条渐近线的垂线, 垂足为 H , 若 $\triangle FOH$ 的内切圆与 x 轴切于点 B , 且 $\overline{BF} = 3\overline{OB}$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$ B. $\frac{3+2\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ D. $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$

二、填空题

23. 已知函数 $y = \log_2(x^2 - 2ax + 8)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为_____.

24. 已知两个单位向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, 若 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$, $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| =$ _____; $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| + |\vec{e}_1 - \lambda \vec{e}_2|$ 的最小值是_____.

25. 若展开式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^n$ 中只有第 5 项的二项式系数最大, 则其展开式中常数项为_____.

26. $\left(\frac{x}{y} + m\right)(x-y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 -15 , 则 $m =$ _____.

27. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_5 =$ _____.

28. 已知 $(2x+1)^n$ 的展开式中, 各项系数之和为 81, 则二项式系数之和为_____.

29. 若曲线 $y = x^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点横坐标为 x_n , 则

$$\log_{2025} x_1 + \log_{2025} x_2 + \cdots + \log_{2025} x_{2024} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题

30. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) - 2x + 1$, 若 $g(x) \leq 0$ 在其定义域内恒成立, 求实数 a 的最小值;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = x^2$ 恰有两个相异的实根 x_1, x_2 , 求实数 a 的取值范围, 并证明

$$x_1 x_2 > 1.$$