

综合练 2

一、单选题

1. 下列条件中, 使 $a > b$ 成立的必要而不充分条件是 ()

A. $a - 1 > b$

B. $a + 1 > b$

C. $|a| > |b|$

D. $a^3 > b^3$

【答案】B

【知识点】由已知条件判断所给不等式是否正确、判断命题的必要不充分条件

【解析】根据不等式的性质和必要不充分条件的定义判断.

【详解】 $a > b \Rightarrow a - 1 > b$ 是假命题, 不是必要而不充分条件;

$a > b \Rightarrow a + 1 > b$ 是正确的, 但 $a + 1 > b$ 不能得出 $a > b$, 是必要而不充分条件;

$a > b$ 与 $|a| > |b|$ 之间不能相互推出, 不是必要而不充分条件, 也不充分;

$a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$, 是充要条件.

故选: B.

2. 中国雕刻技艺举世闻名, 雕刻技艺的代表作“鬼工球”, 取鬼斧神工的意思, 制作相当繁复, 成品美轮美奂. 1966 年, 玉石雕刻大师吴公炎将这一雕刻技艺应用到玉雕之中, 他把玉石镂成多层圆球, 层次重叠, 每层都可灵活自如的转动, 是中国玉雕工艺的一个重大突破. 今一雕刻大师在棱长为 12 的整块正方体玉石内部套雕出一个可以任意转动的球, 在球内部又套雕出一个正四面体 (所有棱长均相等的三棱锥), 若不计各层厚度和损失, 则最内层正四面体的棱长最长为 ()



A. $4\sqrt{6}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{6}$

D. 6

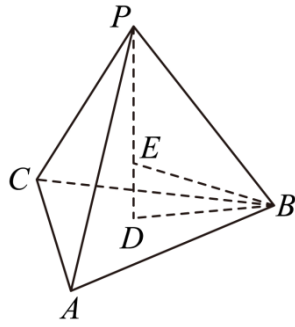
【答案】A

【知识点】正棱锥及其有关计算、多面体与球体内切外接问题、球的体积的有关计算

【分析】根据题意, 求正方体的内切球半径, 易知该球为所求正四面体的外接球, 根据正四面体的性质, 可求得棱长.

【详解】由题意, 球是正方体的内切球, 且该球为正四面体的外接球时, 四面体的棱长最大,

则该球半径 $r = 6$ ，如图：



可知 E 为外接球球心， $EP = EB = r$ ， $PD \perp$ 平面 ABC ， D 为底面等

边 $\triangle ABC$ 的中心，

设正四面体的棱长为 d ，则 $BD = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} d = \frac{\sqrt{3}}{3} d$ ， $PD = \sqrt{d^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3} d)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} d$ ，

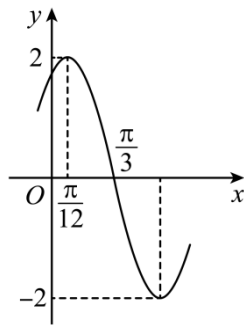
在 $\text{Rt}\triangle EDB$ 中，则 $EB^2 = ED^2 + DB^2$ ，即 $r^2 = (\frac{\sqrt{3}}{3} d)^2 + (\frac{\sqrt{6}}{3} d - r)^2$ ，

解得 $d = \frac{2\sqrt{6}}{3} r$ ，即 $d = 4\sqrt{6}$ 。

故选：A

3. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ ， $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，关于该

函数有下列四个说法：



① $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 对称；

② $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称；

③ $f(x)$ 的图象可由 $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到；

④ 若方程 $g(x) = f(tx)$ ($t > 0$) 在 $(0, \frac{5\pi}{6})$ 上有且只有两个极值点，则 t 的最大值为 $\frac{13}{10}$ 。

以上四个说法中，正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【知识点】由 $\cos x$ (型) 函数的值域 (最值) 求参数、由图象确定正 (余) 弦型函数解析

式、求 $\cos x$ (型) 函数的对称轴及对称中心、求图象变化前 (后) 的解析式

【分析】根据函数图象及五点作图法求出函数解析式, 再根据余弦函数的性质一一判断即可.

【详解】依题意可得 $A=2$, $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$, $\therefore \omega=2$,

再根据五点法作图可得 $2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi = 0$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(2 \times \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{5\pi}{2} = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 故①正确;

因为 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cos\left(-2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos(-\pi) = -2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称, 故②正确;

将 $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到

$$y = 2 \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6} + \pi\right) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

故③错误;

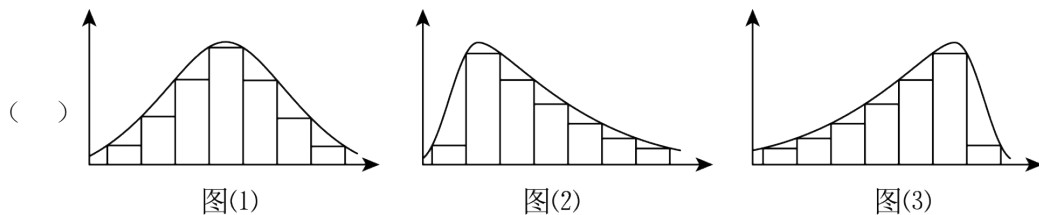
因为 $g(x) = f(tx) = 2 \cos\left(2tx - \frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时且 $t > 0$, $2tx - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$,

因为函数 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有且只有两个极值点,

所以 $\pi < \frac{5\pi t}{3} - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi$, 解得 $\frac{7}{10} < t \leq \frac{13}{10}$, 即 t 的最大值为 $\frac{13}{10}$, 故④正确;

故选: C

4. 如图所示, 下列频率分布直方图显示了三种不同的形态. 图 (1) 形成对称形态, 图 (2) 形成“右拖尾”形态, 图 (3) 形成“左拖尾”形态, 根据所给图做出以下判断, 不正确的是



- A. 图 (1) 的平均数=中位数=众数 B. 图 (2) 的众数<中位数<平均数
C. 图 (2) 的平均数<众数<中位数 D. 图 (3) 的平均数<中位数<众数

【答案】C

【知识点】由频率分布直方图估计中位数、由频率分布直方图估计平均数、根据频率分布直方图计算众数

【分析】根据平均数、中位数、众数的概念, 结合图形分析即可求解.

【详解】图（1）的分布直方图是对称的，所以平均数=中位数=众数，故 A 正确；

图（2）中众数最小，右拖尾平均数大于中位数，故 B 正确，C 错误；

图（3）左拖尾众数最大，平均数小于中位数，故 D 正确。

故选：C

5. 若 $0 < b < 1$ ，则“ $a > b^3$ ”是“ $a > b$ ”的（ ）

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

【答案】B

【知识点】判断命题的必要不充分条件、充分条件、必要条件

【分析】利用充分条件与必要条件直接判断即可。

【详解】当 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$ ，则 $a > b^3$ 成立，但 $a > b$ 不成立，

所以充分性不成立；

因为 $0 < b < 1$ ，所以 $b > b^3$ ，

又因为 $a > b$ ，所以 $a > b > b^3$ ，即 $a > b^3$ ，

所以必要性成立；

所以“ $a > b^3$ ”是“ $a > b$ ”的必要不充分条件，

故选：B.

6. 根据最小二乘法由一组样本点 (x_i, y_i) （其中 $i = 1, 2, \dots, 300$ ），求得的回归方程是

$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. 至少有一个样本点落在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上

B. 若所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上，则变量间的相关系数为 1

C. 当 $\hat{b} = -2$ 时， x 增加 1 个单位时， y 平均增加 2 个单位

D. 若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$ ，则变量 x 与 y 正相关

【答案】D

【知识点】解释回归直线方程的意义、根据回归方程进行数据估计

【分析】根据线性回归的思想、回归直线的特点及性质进行分析即可。

【详解】回归直线必过样本数据中心点，但样本点可能全部不在回归直线上，故 A 错误；

所有样本点都在回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 上，则变量间的相关系数为 ± 1 ，故 B 错误；

当 $\hat{b} = -2$ 时， x 增加 1 个单位时， y 平均减少 2 个单位，故 C 错误；

若回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率 $\hat{b} > 0$ ，样本点分布应从左到右是上升的，则变量 x 与 y 正相关，故 D 正确。

故选：D.

7. 记函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T . 若 $\pi < T < 2\pi$ ，且 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$ ，关于该函数有下列四个说法：

① $2 < \omega < 3$ ；

② $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ；

③ $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增；

④ 为了得到 $g(x) = \sin \omega x$ 的图象，只需将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.

以上四个说法中，正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【知识点】求正弦（型）函数的最小正周期、由正（余）弦函数的性质确定图象（解析式）、求图象变化前（后）的解析式、求 $\sin x$ 型三角函数的单调性

【分析】利用周期公式求出 ω 的范围可判断①；由 $x = \frac{\pi}{6}$ 为一条对称轴得

$\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，结合 ω 的范围可求得 ω ，从而得出 $f(x)$ 的解析式，求值 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 可判断②；利用正弦函数的单调性可判断③；利用三角函数图象平移的规律可判断④.

【详解】由 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 且 $\pi < T < 2\pi$ ，故 $1 < \omega < 2$ ，故①错误；

因为 $x = \frac{\pi}{6}$ 为一条对称轴，故 $\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ， $\omega = 6\left(k + \frac{1}{4}\right)$. 由于 $1 < \omega < 2$ ，故

$\omega = \frac{3}{2}$ ，则 $f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \pi = 0$ ，故②正确；

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时， $\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，故③正确；

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得 $y = \sin\left[\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$ 的图象，而

$g(x) = \sin \frac{3}{2}x$, 故④错误.

所以, 正确的有②③, 共 2 个.

故选: B.

8. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作一条渐近线的垂线, 垂足为 A , 延长 F_2A 与另一条渐近线交于点 B , 若 $S_{\triangle BOF_1} = 3S_{\triangle AOB}$ (O 为坐标原点), 则双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{6}$

【答案】D

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围、求点到直线的距离

【分析】利用已知条件求出 A 点坐标, 求出点 $F_1(-c, 0)$ 到渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 的距离 d , 结合 $S_{\triangle BOF_1} = 3S_{\triangle AOB}$ 可以得到点 A 到渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 的距离为 $\frac{d}{3}$, 进而利用点到直线的距离公式求出 a 与 c 的关系, 然后求解双曲线的离心率.

【详解】由题意知, 双曲线 E 的两条渐近线方程分别为 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$,
过点 F_2 且与渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 垂直的直线方程为 $y = -\frac{a}{b}(x - c)$,

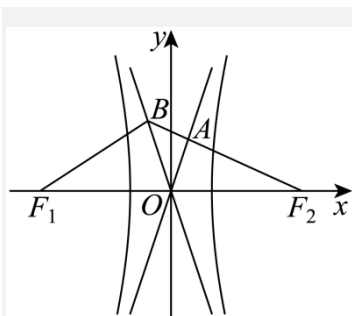
$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{a}{b}(x - c) \end{cases}, \text{可解得 } A\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

$$\text{点 } F_1(-c, 0) \text{ 到渐近线 } y = -\frac{b}{a}x \text{ 的距离 } d = \frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}} = b,$$

因为 $S_{\triangle BOF_1} = 3S_{\triangle AOB}$, 所以点 A 到渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 的距离为 $\frac{b}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{\frac{b \cdot \frac{a^2}{c} + \frac{ab}{c}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2}}}{\frac{b}{3}} = \frac{b}{3}, \text{ 即 } c^2 = 6a^2, \text{ 所以 } \frac{c}{a} = \sqrt{6}, \text{ 即双曲线的离心率为 } \sqrt{6}.$$

故选: D



9. “ $a > b$ ”是“ $a > |b| + 1$ ”的 ()

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 既不

充分也不必要条件

【答案】A

【知识点】判断命题的必要不充分条件

【分析】利用不等式性质，及充分条件、必要条件的定义判断即得.

【详解】取 $a = -1, b = -2$ ，满足 $a > b$ ，而 $a < |b| + 1$ ，

反之， $a > |b| + 1$ ，则 $a > |b| \geq b$ ，

所以“ $a > b$ ”是“ $a > |b| + 1$ ”的必要不充分条件.

故选：A

10. 按从小到大顺序排列的两组数据：甲组：7，11，14， m ，22；乙组：5，10， n ，18，20，若这两组数据的第 50 百分位数、第 80 百分位数分别对应相等，则 $m + n =$ ()

A. 28

B. 29

C. 30

D. 32

【答案】C

【知识点】总体百分位数的估计

【分析】分别求出两组数据的第 50 百分位数、第 80 百分位数，求出 m, n 即可得解.

【详解】依题意，甲组数据的第 50 百分位数为 14，乙组数据的第 50 百分位数为 n ，则 $n = 14$ ，

由 $5 \times 80\% = 4$ ，得甲组数据的第 80 百分位数为 $\frac{m+22}{2}$ ，乙组数据的第 80 百分位数为

$\frac{18+20}{2} = 19$ ，

因此 $\frac{m+22}{2} = 19$ ，解得 $m = 16$ ，所以 $m + n = 30$.

故选：C

11. 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 " $x < |y|$ " 是 " $x^2 < y^2$ " 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【知识点】判断命题的必要不充分条件

【分析】利用充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】当 $x < 0$, 且 $|x| > |y|$ 时, $x^2 < y^2$ 不成立, 所以是不充分条件;

当 $x^2 < y^2$ 时, 即 $|x| < |y|$, 即必有 $x < |y|$, 所以是必要条件.

故选: B.

12. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 " $x = 0$ " 是 " $\sin 2x = 0$ " 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【知识点】判断命题的充分不必要条件、特殊角的三角函数值

【分析】通过判断是否能相互推出, 由充分条件与必要条件的定义可得.

【详解】由 $x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin 0 = 0$, 则 " $x = 0$ " 是 " $\sin 2x = 0$ " 的充分条件;

又当 $x = \pi$ 时, $\sin 2x = \sin 2\pi = 0$, 可知 $\sin 2x = 0 \nRightarrow x = 0$,

故 " $x = 0$ " 不是 " $\sin 2x = 0$ " 的必要条件,

综上所述, " $x = 0$ " 是 " $\sin 2x = 0$ " 的充分不必要条件.

故选: A.

13. 下列说法中错误的是 ()

- A. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$
- B. 若 $X \sim N(1, 2^2)$, $Y \sim N(2, 2^2)$, 则 $P(X < 1) < P(Y < 2)$
- C. $|r|$ 越接近 1, 相关性越强
- D. $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱

【答案】B

【知识点】相关系数的意义及辨析、特殊区间的概率、指定区间的概率

【分析】根据正态分布以及相关系数的概念直接判断即可.

【详解】对于 A, 根据正态分布对称性可知, $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$, A 说法正确;

对于 B, 根据正态分布对称性可知, $P(X < 1) = P(Y < 2) = 0.5$, B 说法错误;

对于 C 和 D, 相关系数 $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱, 越接近 1, 相关性越强, 故 C 和 D 说法正确.

故选: B

14. $S_n = -n^2 + 8n$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 ()

A. 112

B. 48

C. 80

D. 64

【答案】C

【知识点】含绝对值的等差数列前 n 项和、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项

【分析】先由题设结合 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 再结合数列 $\{a_n\}$ 各项正负情况即可求解.

【详解】因为 $S_n = -n^2 + 8n$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1^2 + 8 \times 1 = 7$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [-(n-1)^2 + 8(n-1)] = -2n + 9$,

经检验, $a_1 = 7$ 满足上式,

所以 $a_n = -2n + 9 (n \in \mathbb{N}^*)$, 令 $a_n = -2n + 9 \geq 0 \Rightarrow n \leq 4$, $a_n = -2n + 9 \leq 0 \Rightarrow n \geq 5$,

设数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 4 项和为 $T_4 = S_4 = -4^2 + 8 \times 4 = 16$

数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为

$$T_{12} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{12}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5 - a_6 - \cdots - a_{12}$$

$$= 2S_4 - S_{12} = 2 \times 16 - (-12^2 + 8 \times 12) = 80.$$

故选: C

15. 函数 $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$ 的零点所在区间是 ()

A. (0,0.3)

B. (0.3,0.5)

C. (0.5,1)

D. (1,2)

【答案】B

【知识点】判断零点所在的区间、比较指数幂的大小、由幂函数的单调性比较大小

【分析】利用指数函数与幂函数的单调性结合零点存在性定理计算即可.

【详解】由指数函数、幂函数的单调性可知： $y=0.3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减， $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)=0.3^x-\sqrt{x}$ 在定义域上单调递减，

显然 $f(0)=1>0$, $f(0.3)=0.3^{0.3}-0.3^{0.5}>0$, $f(0.5)=0.3^{0.5}-0.5^{0.5}<0$,

所以根据零点存在性定理可知 $f(x)$ 的零点位于 $(0.3,0.5)$.

故选：B

16. 若 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是平面上两个非零的向量，则“ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【知识点】判断命题的充分不必要条件、数量积的运算律、平行向量（共线向量）

【分析】由 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ，两边平方化简可得 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1$ ，即 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同向，可判断充分性成立，

由 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ，可得 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\pm 1$ ，即 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线，可举反例 $\vec{a}=-\vec{b}$ ，判断必要性不成立.

【详解】因为 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ，所以 $(|\vec{a}+\vec{b}|)^2=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$ ，

即 $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ，

由于 $\vec{a},\vec{b}$ 是平面上两个非零的向量，所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1$ ，所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同向，

所以有 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ，故充分性成立；

因为 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ，则 $|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|=1$ ，即 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\pm 1$ ，

由于 $\vec{a},\vec{b}$ 是平面上两个非零的向量，所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 共线.

不妨取 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，此时 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 共线，但 $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$ ， $|\vec{a}| + |\vec{b}| = 2|\vec{b}| \neq 0$ ，

故必要性不成立，

所以“ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ”是“ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ ”的充分不必要条件.

故选：A

17. 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若数列 $\{S_n + a_n\}$ 是首项为 1 的等差数列，则 $a_3 =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{5}{8}$

【答案】C

【知识点】等差中项的应用、等比数列通项公式的基本量计算

【分析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，根据题意可得 $2b_2 = b_1 + b_3$ ，即 $2(S_2 + a_2) = 2a_1 + S_3 + a_3$ ，

化简整理得 $2q^2 - 3q + 1 = 0$ ，求得 a_1, q 得解.

【详解】令 $b_n = S_n + a_n$ ， $b_1 = S_1 + a_1 = 2a_1 = 1$ ， $\therefore a_1 = \frac{1}{2}$ ，

又 $2b_2 = b_1 + b_3$ ，即 $2(S_2 + a_2) = 2a_1 + S_3 + a_3$ ，即 $2(a_1 + 2a_2) = 3a_1 + a_2 + 2a_3$ ，

整理得 $3a_2 - a_1 - 2a_3 = 0$ ，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $3a_1q - a_1 - 2a_1q^2 = 0$ ，即

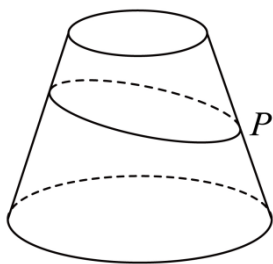
$$2q^2 - 3q + 1 = 0,$$

解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 1，又 $q \neq 1$ ，所以 $q = \frac{1}{2}$ ，

$$\text{所以 } a_3 = a_1 \cdot q^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

故选：C.

18. 圆台的上底面半径为 1，下底面半径为 2，母线长为 4. 已知 P 为该圆台某条母线的中点，若一质点从点 P 出发，绕着该圆台的侧面运动一圈后又回到点 P ，则该质点运动的最短路径长为 ()



A. $6\sqrt{2}$

B. 6

C. 6π

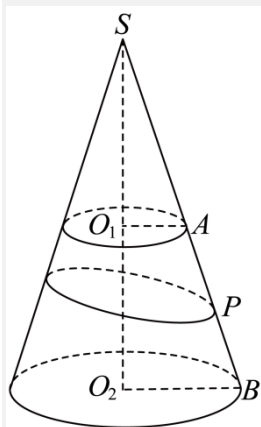
D. 3π

【答案】A

【知识点】圆锥的展开图及最短距离问题、圆台的结构特征辨析、圆台的展开图

【分析】利用侧面展开结合图形求解最短距离.

【详解】 P 为圆台母线 AB 的中点, O_1, O_2 分别为上下底面的圆心, 把圆台扩成圆锥, 如图所示,

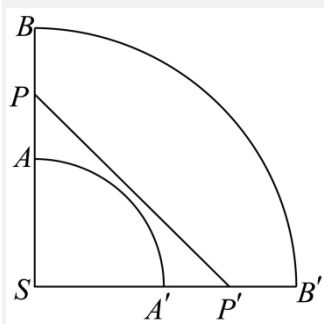


则 $O_1A=1$, $O_2B=2$, $AB=4$,

由 $O_1A \parallel O_2B$, 有 $SA=4$, $SB=8$, $SP=6$,

圆锥底面半径 $O_2B=2$, 底面圆的周长为 4π , 母线长 $SB=8$,

所以侧面展开图的扇形的圆心角为 $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\angle BSB' = \frac{\pi}{2}$, 如图所示,



质点从点 P 出发, 绕着该圆台的侧面运动一圈后又回到点 P , 则运动的最短路径为展开图弦

PP' ,

$$\angle PSP' = \frac{\pi}{2}, \quad SP = SP' = 6, \quad \text{有 } PP' = 6\sqrt{2}.$$

故选: A

19. 下列结论中, 错误的是 ()

- A. 数据 4, 1, 6, 2, 9, 5, 8 的第 60 百分位数为 6
- B. 若随机变量 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$, $P(\xi \leq -2) = 0.21$, 则 $P(\xi \leq 4) = 0.79$
- C. 已知经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 1.8$, 且 $\bar{x} = 2, \bar{y} = 20$, 则 $\hat{b} = 9.1$
- D. 根据分类变量 X 与 Y 成对样本数据, 计算得到 $\chi^2 = 9.632$, 依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的 χ^2 独立性检验 ($x_{0.001} = 10.828$), 可判断 X 与 Y 有关联, 此推断犯错误的概率不大于 0.001

【答案】D

【知识点】独立性检验的概念及辨析、总体百分位数的估计、指定区间的概率、根据样本中心点求参数

【分析】A 选项, 将数据排序后, 根据百分位数的定义得到答案; B 选项, 由正态分布的对称性得到答案; C 选项, 将样本中心点代入回归方程, 求出 $\hat{b} = 9.1$; D 选项, 由 $\chi^2 = 9.632 < 10.828$ 得到 D 错误.

【详解】A 选项, 数据 4, 1, 6, 2, 9, 5, 8 排序后得到 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, $7 \times 60\% = 4.2$, 故选取第 5 个数据作为第 60 百分位数, 即为 6, A 正确;

B 选项, 因为 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$, 根据对称性可知 $P(\xi \geq 4) = P(\xi \leq -2) = 0.21$, 故 $P(\xi \leq 4) = 1 - 0.21 = 0.79$, B 正确;

C 选项, 已知经验回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 1.8$, 且 $\bar{x} = 2, \bar{y} = 20$, 则 $2\hat{b} + 1.8 = 20$, 解得 $\hat{b} = 9.1$, C 正确;

D 选项, $\chi^2 = 9.632 < 10.828$, 故不能得到此结论, D 错误

故选: D

20. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 上的点 P 到 C 的两条渐近线的距离分别为 d_1, d_2 , 若 $d_1 = \frac{1}{4}d_2$,

则点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离为()

- A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【答案】B

【知识点】求点到直线的距离、已知方程求双曲线的渐近线

【分析】双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow C$ 的渐近线方程为 $2x \pm y = 0$ 利用点到直线的距离公式可得 $d_1 d_2 = \frac{4}{5}$ ，进而求得 $d_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $d_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，可求点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离.

【详解】设 $P(m, n)$ ，则 $m^2 - \frac{n^2}{4} = 1$ ，即 $4m^2 - n^2 = 4$ ， C 的渐近线方程为 $2x \pm y = 0$ ，由点到直线的距离公式可得 $d_1 d_2 = \frac{|2m+n|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{|2m-n|}{\sqrt{5}} = \frac{|4m^2-n^2|}{5} = \frac{4}{5}$ ，
因为 $d_1 = \frac{1}{4} d_2$ ，所以 $d_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $d_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. 易知双曲线 C 的右焦点为 $(\sqrt{5}, 0)$ ，
所以点 (d_1, d_2) 到 C 的右焦点的距离为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

故选：B.

21. 若 $a \in \mathbf{R}$ ，直线 $l_1: x + 2ay - 1 = 0$ ，直线 $l_2: (3a-1)x - ay - 1 = 0$ ，则“ $a=0$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【知识点】判断命题的充分不必要条件、已知直线平行求参数、判断命题的必要不充分条件、既不充分也不必要条件

【分析】根据两直线的位置关系，结合充分条件、必要条件的概念即可求解.

【详解】当 $a=0$ 时， $l_1: x-1=0, l_2: -x-1=0$ ，则 $l_1 // l_2$ ；

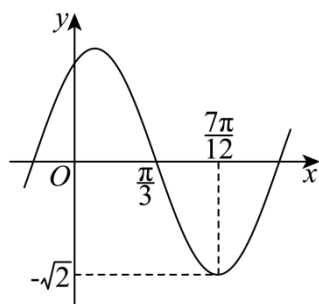
若 $l_1 // l_2$ ，则 $1 \times (-a) = 2a(3a-1)$ ，解得 $a=0$ 或 $\frac{1}{6}$.

所以“ $a=0$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的充分不必要条件.

故选：A

22. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ ， $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \pi$)的部分图象如图所示，要得到

$y = \sqrt{2} \sin x$ 的图象，只需将函数 $f(x)$ 的图象上所有的点（ ）



- A. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- B. 横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度
- C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
- D. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），再向左平行移动 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

【答案】A

【知识点】由图象确定正（余）弦型函数解析式、结合三角函数的图象变换求三角函数的性质、描述正（余）弦型函数图象的变换过程、求图象变化前（后）的解析式

【分析】由图象，根据正弦函数的图象与性质求得 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，结合三角函数图象的平移伸缩变换即可求解.

【详解】由图可知， $A = \sqrt{2}$, $\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}$ ，得 $T = \pi$ ，

又 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ ，由 $\omega > 0$ 解得 $\omega = 2$ ；

将点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 代入 $f(x)$ ，得 $0 = \sqrt{2} \sin(2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi)$ ，

$(\frac{\pi}{3}, 0)$ 在函数单调减区间上，则 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi + 2k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

解得 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ ，又 $|\varphi| < \pi$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ，.

得 $f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

将 $f(x)$ 的图象上所有的点横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，

得 $y = \sqrt{2} \sin x$ 的图象.

故选：A

二、填空题

23. 在 $(x^2 - x - 2)^3$ 的展开式中 x^5 的系数是_____. (用数字作答)

【答案】 -3

【知识点】 求指定项的系数、三项展开式的系数问题

【详解】 试题分析：由题意得 $(x^2 - x - 2)^3 = (x - 2)^3 (x + 1)^3$,

所以展开式中 x^5 为 $C_3^0 x^3 \cdot C_3^1 x^2 + C_3^1 x^2 (-2)^1 \cdot C_3^0 x^3 = -3x^5$,

所以展开式中 x^5 的系数是 -3.

故答案为：-3.

24. 在 $(2x + a)(x + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中, x^2 的系数为 -160, 则实数 a 为_____.

【答案】 $-\frac{8}{3} / -2\frac{2}{3}$

【知识点】 由项的系数确定参数、两个二项式乘积展开式的系数问题

【分析】 根据给定条件, 求出二项式 $(x + \frac{2}{x})^6$ 展开式的通项, 再求出 x^2 的系数即可得解.

【详解】 二项式 $(x + \frac{2}{x})^6$ 展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} (\frac{2}{x})^r = 2^r C_6^r x^{6-2r}, r \leq 6, r \in \mathbb{N}$,

显然 $6-2r$ 是偶数, 由 $6-2r=2$, 解得 $r=2$, 则有 x^2 的项为 $a \cdot 2^2 C_6^2 x^2 = 60ax^2$,

因此 $60a = -160$, 所以 $a = -\frac{8}{3}$.

故答案为: $-\frac{8}{3}$

25. 在 $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^n$ 的二项式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.

【答案】 112

【知识点】 二项式定理的展开式、项的系数

【详解】 由题意可得: $2^n = 256, \therefore n = 8$,

结合二项式展开式通项公式可得: $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt[3]{x})^{8-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_8^r x^{\frac{8-4r}{3}}$,

令 $\frac{8-4r}{3} = 0$ 可得: $r = 2$, 则常数项为: $(-2)^2 C_8^2 = 4 \times 28 = 112$.

26. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x + c (x \in \mathbb{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{1}{c} + \frac{4}{a}$ 的最小值为_____.

【答案】4

【知识点】基本不等式求和的最小值、根据二次函数的最值或值域求参数、求二次函数的值域或最值

【分析】利用二次函数的性质得到 $c = \frac{1}{a}$ ，消去变量后利用基本不等式求解最值即可.

【详解】因为二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x + c (x \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 的最小值是 0，且 $a > 0$ ，由二次函数性质得对称轴为 $x = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(-\frac{1}{a}) = a(-\frac{1}{a})^2 - 2 \times \frac{1}{a} + c = c - \frac{1}{a}$,

所以 $c - \frac{1}{a} = 0$ ，即 $c = \frac{1}{a}$ ，而 $\frac{1}{c} + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 2 \times 2 = 4$ ，

当且仅当 $a = \frac{4}{a}$ 时取等，此时 $a = 2, c = \frac{1}{2}$.

故答案为：4

27. 小桐操场跑圈，一周 2 次，一次 5 圈或 6 圈. 第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5，若第一次跑 5 圈，则第二次跑 5 圈的概率为 0.4，6 圈的概率为 0.6；若第一次跑 6 圈，则第二次跑 5 圈的概率为 0.6，6 圈的概率为 0.4. 小桐一周跑 11 圈的概率为_____；若一周至少跑 11 圈为运动量达标，则连续跑 4 周，记合格周数为 X ，则期望 $E(X) =$ _____

【答案】 0.6 3.2

【知识点】二项分布的均值、利用全概率公式求概率、计算条件概率

【分析】先根据全概率公式计算求解空一，再求出概率根据二项分布数学期望公式计算求解.

【详解】设小桐一周跑 11 圈为事件 A ，设第一次跑 5 圈为事件 B ，设第二次跑 5 圈为事件 C ，

则 $P(A) = P(B)P(\bar{C}|B) + P(\bar{B})P(C|\bar{B}) = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 = 0.6$ ；

设运动量达标为事件 D ， $P(D) = P(A) + P(\bar{B})P(\bar{C}|\bar{B}) = 0.6 + 0.5 \times 0.4 = 0.8$ ，

所以 $X \sim B(4, 0.8)$ ， $E(X) = 4 \times 0.8 = 3.2$ ；

故答案为：0.6；3.2

三、解答题

28. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(1)求椭圆 C 的离心率和长轴长;

(2)已知直线 $y=kx+2$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 A, B , P 为 x 轴上一点.是否存在实数 k , 使得 $\triangle PAB$ 是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求出 k 的值及点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1)椭圆 C 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4

(2)存在, 当 $k=-1$ 时, P 点坐标为 $(\frac{2}{3}, 0)$; 当 $k=1$ 时, P 点坐标为 $(-\frac{2}{3}, 0)$

【知识点】求椭圆的离心率或离心率的取值范围、椭圆中存在定点满足某条件问题

【分析】(1) 根据椭圆的基本量关系求解即可;

(2) 联立直线与椭圆的方程, 设 AB 中点 $G(x_0, y_0)$, 得出韦达定理, 根据各点的坐标关系, 表达出 $k_{PG} \cdot k_{AB} = -1$, 结合 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 进而结合韦达定理化简求解即可.

【详解】(1) 由题意: $a^2 = 4$, $b^2 = 2$, 所以 $a = 2$.

$\because a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore c^2 = 2$, $c = \sqrt{2}$.

所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以椭圆 C 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 长轴长为 4.

(2) 联立 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消 y 整理得: $(2k^2 + 1)x^2 + 8kx + 4 = 0$.

因为直线与椭圆交于 A, B 两点, 故 $\Delta > 0$, 解得 $k^2 > \frac{1}{2}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-8k}{2k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = \frac{4}{2k^2 + 1}$.

设 AB 中点 $G(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4k}{2k^2 + 1}$, $y_0 = kx_0 + 2 = \frac{2}{2k^2 + 1}$, 故 $G(\frac{-4k}{2k^2 + 1}, \frac{2}{2k^2 + 1})$.

假设存在 k 和点 $P(m, 0)$, 使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形, 则 $PG \perp AB$, 故

$k_{PG} \cdot k_{AB} = -1$, 所以 $\frac{\frac{2}{2k^2 + 1}}{\frac{-4k}{2k^2 + 1} - m} \times k = -1$,

解得 $m = \frac{-2k}{2k^2 + 1}$, 故 $P(\frac{-2k}{2k^2 + 1}, 0)$.

又因为 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

所以 $(x_1 - m, y_1) \cdot (x_2 - m, y_2) = 0$, 即 $(x_1 - m)(x_2 - m) + y_1 y_2 = 0$.

整理得 $(k^2 + 1)x_1 x_2 + (2k - m)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0$.

$$\text{所以 } (k^2+1) \cdot \frac{4}{2k^2+1} - (2k-m) \cdot \frac{8k}{2k^2+1} + m^2 + 4 = 0,$$

$$\text{代入 } m = \frac{-2k}{2k^2+1}, \text{ 整理得 } k^4 = 1, \text{ 即 } k^2 = 1.$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } P \text{ 点坐标为 } (\frac{2}{3}, 0); \text{ 当 } k = 1 \text{ 时, } P \text{ 点坐标为 } (-\frac{2}{3}, 0).$$

此时, $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形.

【点睛】本题主要考查了根据直线与椭圆的位置关系, 求解点坐标与斜率的问题. 需要根据题意联立直线与椭圆的方程, 设点的坐标, 结合韦达定理, 利用向量或者斜率关系列式, 代入化简求解. 属于难题.

29. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列. $a_1 = 1$, 且

$$a_3 - b_1 = 1, a_4 - b_1 = b_3 - a_6.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

$$(2) \text{ 若 } c_k = \begin{cases} \left(a_k - \frac{1}{a_k}\right)b_k, & k \text{ 为奇数,} \\ \left(a_{2n+1-k} + \frac{1}{a_{2n+1-k}}\right)b_{2n+1-k}, & k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

① 当 k 为奇数, 求 $c_k + c_{2n+1-k}$;

$$\text{② 求 } \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

【答案】(1) $a_n = n, b_n = 2^n$

$$(2) \text{① } k \cdot 2^{k+1}; \text{ ② } \frac{20}{9} + \frac{12n-10}{9} \times 2^{2n+1}$$

【知识点】倒序相加法求和、错位相减法求和、等差数列通项公式的基本量计算、等比数列通项公式的基本量计算

【分析】(1) 利用等差等比数列的通项公式列方程求解;

(2) ① 利用条件直接求解; ② 求出当 k 为偶数时 $c_k + c_{2n+1-k}$, 然后利用倒序相加以及错位相减法求和即可.

【详解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\because \{b_n\}$ 的公比为 2, $a_1 = 1$,

$$\text{由已知可得 } \begin{cases} 1+2d-b_1=1 \\ 1+3d-b_1=4b_1-(1+5d) \end{cases}, \text{ 得 } b_1=2, d=1,$$

$$\therefore a_n = n, \quad b_n = 2^n;$$

(2) ① $\because k$ 为奇数, $\therefore 2n+1-k$ 为偶数.

$$\therefore c_k + c_{2n+1-k} = \left(a_k - \frac{1}{a_k}\right)b_k + \left(a_{2n+1-(2n+1-k)} + \frac{1}{a_{2n+1-(2n+1-k)}}\right) \cdot b_{2n+1-(2n+1-k)}$$

$$= \left(a_k - \frac{1}{a_k}\right)b_k + \left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)b_k = 2a_k b_k = 2k \cdot 2^k = k \cdot 2^{k+1};$$

② 当 k 为偶数, $2n+1-k$ 为奇数,

$$c_k + c_{2n+1-k} = \left(a_{2n+1-k} + \frac{1}{a_{2n+1-k}}\right)b_{2n+1-k} + \left(a_{2n+1-k} - \frac{1}{a_{2n+1-k}}\right)b_{2n+1-k} = 2a_{2n+1-k}b_{2n+1-k}$$

$$= 2(2n+1-k) \cdot 2^{2n+1-k} = (2n+1-k) \cdot 2^{2n+2-k}$$

$$\text{令 } S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} c_k,$$

$$\therefore S_{2n} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n-1} + c_{2n},$$

$$\text{即 } S_{2n} = c_{2n} + c_{2n-1} + \cdots + c_2 + c_1,$$

$$\therefore 2S_{2n} = (c_1 + c_{2n}) + (c_2 + c_{2n-1}) + \cdots + (c_{2n-1} + c_2) + (c_{2n} + c_1),$$

$$2S_{2n} = (c_1 + c_{2n}) + (c_3 + c_{2n-2}) + \cdots + (c_{2n-1} + c_2) + (c_2 + c_{2n-1}) + (c_4 + c_{2n-3}) + \cdots + (c_{2n} + c_1)$$

$$= 1 \times 2^2 + 3 \times 2^4 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{2n} + (2n-1) \cdot 2^{2n} + (2n-3) \cdot 2^{2n-2} + \cdots + 1 \times 2^2$$

$$\text{所以 } S_{2n} = 1 \times 2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{2n-1} + (2n-1) \cdot 2^{2n-1} + (2n-3) \cdot 2^{2n-3} + \cdots + 1 \times 2$$

$$\text{所以 } 4S_{2n} = 1 \times 2^3 + 3 \times 2^5 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + (2n-3) \cdot 2^{2n-1} + \cdots + 1 \times 2^3$$

所以

$$-3S_{2n} = 2 + 2(2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n-1}) - (2n-1) \cdot 2^{2n+1} - (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + 2(2^{2n-1} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^3) + 2$$

$$= 2 + 2 \times \frac{2^3 - 2^{2n-1} \times 4}{1-4} - (2n-1) \cdot 2^{2n+1} - (2n-1) \cdot 2^{2n+1} + 2 \times \frac{2^3 - 2^{2n-1} \times 4}{1-4} + 2$$

$$= -\frac{20}{3} + \frac{10-12n}{3} \times 2^{2n+1}$$

$$\text{所以 } S_{2n} = \frac{20}{9} + \frac{12n-10}{9} \times 2^{2n+1}.$$

30. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上、下顶点与一个焦点是等腰直角三角形的三个顶点，且点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上.

(1) 求椭圆 C 的离心率及标准方程;

(2) 过点 $P(0, 1)$ 且斜率存在的动直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点，问在 y 轴上是否存在与点 P

不同的定点 Q ，使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}}$ 恒成立？若存在，求出定点 Q 的坐标；若不存在，请说

明理由.

【答案】(1) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) 存在， $Q(0, 2)$.

【知识点】根据椭圆过的点求标准方程、椭圆中存在定点满足某条件问题

【分析】(1) 根据已知有 $b = c$ ，即 $a^2 = 2c^2$ ，再将已知点代入方程求参数值，即可得标准方程和离心率；

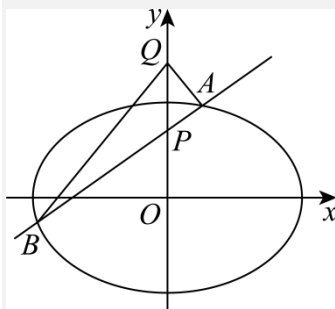
(2) 先假设点存在，并设 $Q(0, m), m \neq 1$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，直线 $l: y = kx + 1$ ，联立椭圆并应用韦达定理得到 $x_1 + x_2 = -\frac{4k}{1+2k^2}$ ， $x_1 x_2 = -\frac{2}{1+2k^2}$ ，根据已知方程恒成立得到 $k_{QA} = -k_{QB}$ ，即 $\frac{y_1 - m}{x_1} = -\frac{y_2 - m}{x_2}$ ，整理化简求参数 m ，即可得.

【详解】(1) 由上下顶点与一个焦点是等腰直角三角形的三个顶点，所以 $b = c$ ，则 $a^2 = 2c^2$ ，

所以 $C: \frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ ，且 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，又 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上，则 $\frac{1}{2c^2} + \frac{3}{2c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 2$ ，

所以标准方程为 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

(2) 假设在 y 轴上存在与点 P 不同的定点 Q ，使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}}$ 恒成立，



设 $Q(0, m)$, $m \neq 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 $l: y = kx + 1$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kx - 2 = 0, \text{ 显然 } \Delta > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4k}{1 + 2k^2}, \quad x_1 x_2 = -\frac{2}{1 + 2k^2},$$

$$\text{由 } \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}} = \frac{\frac{1}{2}|QP||QA|\sin \angle PQA}{\frac{1}{2}|QP||QB|\sin \angle PQB} = \frac{|QA|\sin \angle PQA}{|QB|\sin \angle PQB}, \text{ 而 } \frac{|QA|}{|QB|} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}},$$

所以 $\sin \angle PQA = \sin \angle PQB$, 即 $\angle PQA = \angle PQB$, 则 $k_{QA} = -k_{QB}$,

$$\text{所以 } \frac{y_1 - m}{x_1} = -\frac{y_2 - m}{x_2}, \text{ 即 } x_2(kx_1 + 1 - m) = -x_1(kx_2 + 1 - m), \text{ 则 } 2kx_1x_2 = (m - 1)(x_1 + x_2),$$

$$\text{所以 } -\frac{4k}{1 + 2k^2} = -\frac{4k(m - 1)}{1 + 2k^2}, \text{ 则不论 } k \text{ 为何值, } \frac{4k(m - 2)}{1 + 2k^2} = 0 \text{ 恒成立,}$$

所以 $m = 2$, 即 $Q(0, 2)$, 使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle BPQ}}$ 恒成立.