

直线与圆练习

一、填空题

1. 已知点 $A(-1,0)$ 在圆 $x^2 + y^2 + 2x + 3y + m = 0$ 外, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(1, \frac{13}{4}\right)$

【分析】由题可知方程 $x^2 + y^2 + 2x + 3y + m = 0$ 表示圆的方程, 且点 A 在圆外列不等式, 即可得实数 m 的取值范围.

【详解】由 $x^2 + y^2 + 2x + 3y + m = 0$ 得: $(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} - m$, 故 $m < \frac{13}{4}$

因为点 $A(-1,0)$ 在圆 $x^2 + y^2 + 2x + 3y + m = 0$ 外, 所以 $(-1)^2 + 0^2 + 2 \times (-1) + 3 \times 0 + m > 0$, 所以 $m > 1$.

所以实数 m 的取值范围是: $\left(1, \frac{13}{4}\right)$.

所以答案为: $\left(1, \frac{13}{4}\right)$.

2. 过点 $A(-1,-1)$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ 相切的直线方程为_____.

【答案】 $x+1=0$ 或 $3x-4y-1=0$

【分析】直接分两类: 一类切线斜率存在时待定系数法可得, 二类斜率不存在时验证直线是不是切线即可.

【详解】易知圆心 $C(1,3)$, 半径 $r=2$, 且点 A 在圆 C 外,

当直线斜率存在时, 设切线方程为 $y+1=k(x+1)$, 即 $kx-y+k-1=0$,

则 $\frac{|k \cdot 1 - 3 + k - 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 2$, 即 $|k-2| = \sqrt{k^2+1}$, 解得 $k = \frac{3}{4}$, 故切线方程为 $3x-4y-1=0$.

当直线斜率不存在时, 且过 $A(-1,-1)$, 此时直线为 $x+1=0$, 圆心 $C(1,3)$ 到直线的距离

$d = |1 - (-1)| = 2$, 所以直线 $x+1=0$ 与圆 C 相切.

故所求切线方程为 $x+1=0$ 或 $3x-4y-1=0$.

故答案为: $x+1=0$ 或 $3x-4y-1=0$.

3. 已知过点 $M(-3, -3)$ 的直线 l 被圆 $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{5}$, 则直线 l 的方程为_____

【答案】 $x + 2y + 9 = 0$ 或 $2x - y + 3 = 0$

【分析】 根据圆中的弦长公式求出弦心距, 再根据点到直线的距离公式求出直线的斜率, 可得直线方程.

【详解】 圆的方程写成标准形式得 $x^2 + (y + 2)^2 = 25$, 可知圆心的坐标为 $(0, -2)$, 半径为 $r = 5$,

因为直线 l 被圆所截得的弦长为 $4\sqrt{5}$, 则圆心到直线 l 的距离为 $d = \sqrt{5^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$,

因为直线 l 过点 $M(-3, -3)$,

若直线 l 的斜率不存在, 则直线 l 的方程为 $x = -3$, 则圆心到直线 l 的距离为 $3 \neq \sqrt{5}$, 不合题意;

所以所求直线 l 的斜率存在, 可设直线 l 的方程为 $y + 3 = k(x + 3)$, 即 $kx - y + 3k - 3 = 0$,

则 $d = \frac{|2 + 3k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$, 整理得 $2k^2 - 3k - 2 = 0$, 解得 $k = -\frac{1}{2}$ 或 $k = 2$,

所以所求直线 l 的方程分别为: $x + 2y + 9 = 0$ 或 $2x - y + 3 = 0$.

故答案为: $x + 2y + 9 = 0$ 或 $2x - y + 3 = 0$.

4. 已知点 $A(2, 1)$, $B(4, -5)$, 则以线段 AB 为直径的圆的标准方程为_____.

【答案】 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 10$

【分析】 先确定圆心坐标, 再求出半径, 写出圆的标准方程即可.

【详解】 $\because A(2, 1)$, $B(4, -5)$,

$\therefore AB$ 的中点即为圆心, 坐标为 $(3, -2)$,

半径 $r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 4)^2 + (1 + 5)^2} = \sqrt{10}$,

则以线段 AB 为直径的圆的方程为 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 10$.

故答案为: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 10$.

5. 若直线 $l: x + y - m = 0 (m > 0)$ 被圆 $C: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ 截得的弦长为 2, 则 $m =$ _____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【分析】先根据弦长求出圆心到直线 $x+y-m=0$ 的距离，结合点到直线的距离公式，即可得出 m 的值.

【详解】圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 的圆心为 $(1,-1)$ ，半径为 $r=2$ ，

由垂径定理，得点到直线距离为 $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ，

根据点到直线距离公式，知圆心 $(1,-1)$ 到直线 $x+y-m=0$ 的距离 $d=\frac{|1-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{3}$ ，

化简可得 $|m|=\sqrt{6}$ ，又 $m>0$ ，所以 $m=\sqrt{6}$.

故答案为： $\sqrt{6}$

6. 已知过点 $P(4,-3)$ 的直线与圆 $C:x^2+(y+5)^2=r^2(r>0)$ 相切，且在 x 轴、 y 轴上的截距相等，则实数 r 的值为_____.

【答案】 $3\sqrt{2}$ 或4

【分析】确定直线的方程，根据直线和圆相切可得圆心到直线的距离等于半径，列式求解，即得答案.

【详解】因为过点 $P(4,-3)$ 的直线在 x 轴、 y 轴上的截距相等，所以该直线的斜率存在，

故设该直线方程为 $y+3=k(x-4)$ ，令 $x=0$ ，则 $y=-4k-3$ ，

令 $y=0$ ，则 $x=\frac{3}{k}+4$ ，所以 $-4k-3=\frac{3}{k}+4$ ，解得 $k=-1$ 或 $k=-\frac{3}{4}$ ，

所以直线方程为： $x+y-1=0$ 或 $4y+3x=0$ ，

又圆心 C 为 $(0,-5)$ ，所以点 C 到直线的距离为 $d=\frac{|0-5-1|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ ，或 $d=\frac{|20|}{\sqrt{25}}=4$ ，

由于该直线与圆 C 相切，所以 $r=3\sqrt{2}$ 或 $r=4$ ，

故答案为： $r=3\sqrt{2}$ 或 $r=4$.

【点睛】

7. 过点 $P(1,3)$ 作圆 $C:(x-2)^2+y^2=10$ 的切线，则切线方程为_____.

【答案】 $x-3y+8=0$

【分析】易得点 $P(1,3)$ 在圆 C 上，则切线必垂直于切点与圆心的连线，进而求解即可.

【详解】因为 $(1-2)^2+3^2=10$ ，所以点 $P(1,3)$ 在圆 C 上，

故切线必垂直于切点与圆心的连线，

由 $(x-2)^2 + y^2 = 10$ ，则圆心为 $(2,0)$ ，

则切点与圆心连线的斜率为 $\frac{3-0}{1-2} = -3$ ，即切线的斜率为 $\frac{1}{3}$ ，

所以切线方程为 $y-3 = \frac{1}{3}(x-1)$ ，即 $x-3y+8=0$ 。

故答案为： $x-3y+8=0$ 。

8. 直线 $l: y = x+1$ 与圆 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 相交所得的弦长为_____。

【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】首先确定圆心和半径，应用点线距离公式求圆心到直线的距离，再利用几何法求相交弦长即可。

【详解】由 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ，可知圆心为 $C(2,1)$ ，半径为 $r = \sqrt{5}$ ，

所以 $C(2,1)$ 到 $l: y = x+1$ 的距离 $d = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

则直线与圆相交所得的弦长为 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{3}$ 。

故答案为： $2\sqrt{3}$ 。

9. 以点 $(-3,1)$ 为圆心，且与 y 轴相切的圆的方程是_____。

【答案】 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$

【分析】先求半径，利用圆的标准方程即可求解。

【详解】以点 $(-3,1)$ 为圆心，且与 y 轴相切的圆的半径为 3，

所以圆的方程为 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ ，

故答案为： $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ 。

10. 两圆 $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ 与 $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$ 的公共弦长等于_____。

【答案】 $4\sqrt{2}$

【分析】由圆的方程求公共弦的方程，得到圆 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$ 的圆心在公共弦上即可求解。

【详解】由题意，两圆的标准方程为 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$ ， $(x+1)^2 + y^2 = 13$ ，

两圆方程相减可得公共弦方程为： $x-2y+6=0$ ，

因为 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$ 圆心为 $(-2,2)$ ，半径为 $2\sqrt{2}$ ，

该圆的圆心在公共弦上，所以公共弦长为该圆的直径 $4\sqrt{2}$ 。

故答案为： $4\sqrt{2}$

11. 若直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 交于 A, B 两点，则 $|AB|$ = _____。

【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】由圆的方程求出圆心坐标与半径，再由点到直线的距离公式求圆心到直线的距离，再由垂径定理求弦长。

【详解】由圆 $x^2+y^2-2y=0$ ，得 $x^2+(y-1)^2=1$ ，

则圆心坐标为 $(0,1)$ ，半径为 $r=1$ 。

圆心到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore |AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ 。

故答案为： $\sqrt{2}$ 。

12. 过点 $(-2,-1)$ 且与圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相切的直线方程为_____。

【答案】 $x=-2$ 或 $y=-1$

【分析】分斜率存在和不存在两种情况，结合圆心到切线的距离等于半径即可求得。

【详解】圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $(0,1)$ ，半径 $r=2$ ，

当切线的斜率不存在时，直线方程为 $x=-2$ ，

此时圆心到直线的距离为2（等于半径），所以 $x=-2$ 是切线的方程；

当斜率存在时，设切线方程为 $y+1=k(x+2)$ ，即 $kx-y+2k-1=0$ ，

此时圆心到直线距离等于半径，即 $\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$ ，解得 $k=0$ ，

所以切线方程为 $y=-1$ 。

综上，过点 $(-2,-1)$ 且与圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 相切的直线方程为 $x=-2$ 或 $y=-1$ 。

故答案为： $x=-2$ 或 $y=-1$ 。