

双曲线（教师版）

未命名

一、单选题

1. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 抛物线的准线交双曲线于 A, B 两点. 若 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则双曲线 C 的焦距为 ()

A. 2

B. 4

C. $2\sqrt{5}$

D. $\frac{4}{3}\sqrt{5}$

【答案】D

【难度】0.65

【来源】天津市河北区 2024 届高三上学期期末质量检测数学试题

【知识点】求双曲线的焦距、根据抛物线方程求焦点或准线、根据 a 、 b 、 c 求双曲线的标准方程、根据离心率求双曲线的标准方程

【分析】由题可得 $A\left(-1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, 代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$, 即可得解.

【详解】抛物线的准线交双曲线于 A, B 两点. 设 $A(-1, y_0)$, $B(-1, -y_0)$, $y_0 > 0$,

$\because C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \frac{c}{a} = 2, \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1, F$ 到准线距离为 2,

$\because \triangle ABF$ 为等边三角形, $\therefore 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times |AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2y_0, \therefore y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$, 可得 $\frac{1}{a^2} - \frac{4}{3 \times 3a^2} = 1$,

解得 $a^2 = \frac{5}{9}, \therefore c^2 = 4a^2 = \frac{20}{9}, \therefore c = \frac{2\sqrt{5}}{3}, 2c = \frac{4\sqrt{5}}{3}$,

故选: D.

2. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 A 在 C 上, 若

$|F_1A| = 2|F_2A|$, $\angle AF_1F_2 = 30^\circ$, $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{9} = 1$

D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

【答案】B

【难度】0.65

【来源】天津市和平区耀华中学 2024 届高三上学期期末数学试题

【知识点】利用定义解决双曲线中焦点三角形问题、根据 a 、 b 、 c 求双曲线的标准方程

【分析】先根据双曲线的定义求出 $|F_2A|, |F_1A|$ ，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，利用正弦定理求出 AF_2F_1 ，再根据三角形的面积公式求出 a^2 ，利用勾股定理可求得 c^2 ，进而可求出答案.

【详解】因为 $|F_1A| = 2|F_2A|$ ，所以 $|F_1A| > |F_2A|$ ，

又因为点 A 在 C 上，所以 $|F_1A| - |F_2A| = 2a$ ，

即 $2|F_2A| - |F_2A| = 2a$ ，所以 $|F_2A| = 2a, |F_1A| = 4a$ ，

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由正弦定理得 $\frac{|AF_2|}{\sin \angle AF_1F_2} = \frac{|AF_1|}{\sin \angle AF_2F_1}$ ，

所以 $\sin \angle AF_2F_1 = \frac{|AF_1| \sin 30^\circ}{|AF_2|} = 1$ ，

又 $0^\circ < \angle AF_2F_1 < 180^\circ$ ，所以 $\angle AF_2F_1 = 90^\circ$ ，故 $\angle F_1AF_2 = 60^\circ$ ，

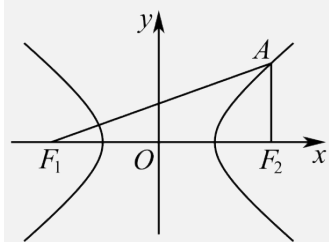
则 $S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}|AF_1||AF_2|\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}$ ，所以 $a^2 = 3$ ，

则 $|F_1F_2|^2 = (2c)^2 = |AF_1|^2 - |AF_2|^2 = 16a^2 - 4a^2 = 12a^2 = 36$ ，所以 $c^2 = 9$ ，

所以 $b^2 = c^2 - a^2 = 6$ ，

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$.

故选：B.



3. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点，抛物线的准线与双曲线的渐近线交于 A, B 两点. 若 $\triangle ABF$ 是等边三角形，则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$

【答案】C

【难度】0.65

【来源】天津市河西区新华中学 2024 届高三上学期统练数学试题（二）

【知识点】已知方程求双曲线的渐近线、根据抛物线方程求焦点或准线、根据 a 、 b 、 c 求双曲线的标准方程

【分析】求出抛物线的焦点、准线方程，由已知求出点 A 的坐标，进而求出 $\frac{b}{a}$ 即可求解得答案.

【详解】依题意，抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1,0)$ ，准线方程为 $x = -1$ ，即直线 $AB: x = -1$ ，不妨令点 A 在第二象限，

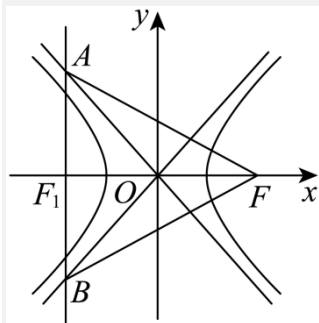
由 $\triangle ABF$ 是等边三角形，得直线 AF 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ ，于是点 $A(-1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，

显然点 A 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线 $y = -\frac{b}{a}x$ 上，则 $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

又 $a^2 + b^2 = 1$ ，解得 $a^2 = \frac{3}{7}$ ， $b^2 = \frac{4}{7}$ ，

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{\frac{3}{7}} - \frac{y^2}{\frac{4}{7}} = 1$.

故选：C



4. 抛物线 $y^2 = 2ax(a > 0)$ 上的点 $M(x_0, 3)$ 到其焦点的距离是 M 到 y 轴距离的 2 倍，过双曲线

$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的左右顶点 A 、 B 作 C 的同一条渐近线的垂线，垂足分别为

P 、 Q ， $|PQ| = 4$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{11}}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】D

【难度】0.65

【来源】天津市滨海新区塘沽第一中学 2024 届高三毕业班八校联考数学模拟试题

【知识点】抛物线的焦半径公式、求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】由抛物线焦半径的公式可得 $|MF| = x_0 + \frac{a}{2}$ ，再结合已知条件列出等式，求出 $a = 3$ ，由点到直线的距离公式求出 $|BP|$ ，再由 $|BP|^2 = |OB|^2 - |OP|^2$ 得 $b^2 = \frac{45}{4}$ ，从而可得双曲线的离心率.

【详解】设抛物线的焦点为 F ，由已知得 $|MF| = x_0 + \frac{a}{2} = 2x_0$ ，所以 $x_0 = \frac{a}{2}$ ，

又因为 $M(x_0, 3)$ 在抛物线 $y^2 = 2ax (a > 0)$ 上，所以 $9 = 2ax_0$ ，解得 $a = 3$.

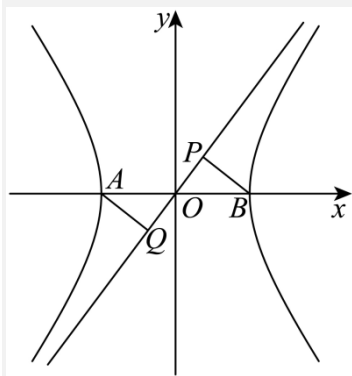
因为双曲线的一条渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - 3y = 0$ ，

所以 $B(3, 0)$ 到渐近线的距离为 $|BP| = \frac{|3b|}{\sqrt{b^2 + 9}}$

又因为 $|OP| = \frac{1}{2}|PQ| = 2$ ，所以 $|BP| = \frac{|3b|}{\sqrt{b^2 + 9}} = \sqrt{5}$ ， $b^2 = \frac{45}{4}$ ，

双曲线的离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{2}$.

故选：D.



5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点恰好是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F ，且 M 为抛物线的准线与 x 轴的交点， N 为抛物线上的一点，且满足 $|NF| = \frac{\sqrt{3}}{2}|MN|$ ，则点 F 到直线 MN 的距离为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】D

【难度】0.65

【来源】天津市滨海新区塘沽第一中学 2024 届高三上学期第一次月考数学复习卷 4

【知识点】根据焦点或准线写出抛物线的标准方程、求双曲线的焦点坐标、抛物线定义的原理

解、求点到直线的距离

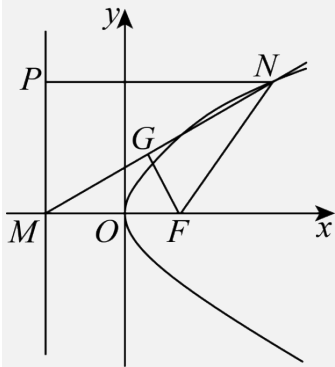
【分析】由已知双曲线方程求得抛物线的焦点坐标及 M 的坐标，设 $N(a, 2\sqrt{2a})$ ，表示出 $|NF|, |NP|, |MN|, |PM|$ ，在 $\text{Rt}\triangle MPN$ 中，利用勾股定理求得 a ，再由点到直线的距离公式求点 F 到直线 MN 的距离。

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点坐标为 $F(2, 0)$ ，

则抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(2, 0)$ ，准线与 x 轴的交点为 $M(-2, 0)$ ，

由 $\frac{p}{2} = 2$ ，得 $p = 4$ ，抛物线方程为 $y^2 = 8x$ ，

过 N 作准线的垂线，与准线交于点 P ，



设 $N(a, 2\sqrt{2a})$ ，则 $|NF| = |NP| = a + 2$ ，

由 $|NF| = \frac{\sqrt{3}}{2} |MN|$ ，得 $|MN| = \frac{2\sqrt{3}}{3} |NF| = \frac{2\sqrt{3}}{3} (a + 2)$ ， $|PM| = 2\sqrt{2a}$ ，

直线 MN 的方程为： $y = \frac{2\sqrt{2a}}{a+2}(x+2)$ ，即 $2\sqrt{2a}x - (a+2)y + 4\sqrt{2a} = 0$ ，

则点 F 到 MN 的距离 $d = \frac{|4\sqrt{2a} + 4\sqrt{2a}|}{\sqrt{8a + (a+2)^2}} = \frac{8\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2 + 12a + 4}}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle MPN$ 中， $PM^2 + PN^2 = MN^2$ ，即 $8a + (a+2)^2 = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}(a+2)\right]^2$ ，

化简得 $a^2 + 4 = 20a$ ，

所以点 F 到 MN 的距离 $d = \frac{8\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2 + 12a + 4}} = \frac{8\sqrt{2a}}{\sqrt{32a}} = \frac{8\sqrt{2a}}{4\sqrt{2a}} = 2$ 。

故选：D。

6. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 作直线 F_1P 与圆

$x^2 + y^2 = a^2$ 切于点 E ，与双曲线右支交于点 P ，且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，则双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

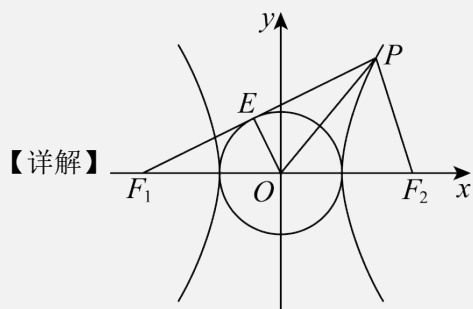
【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市第一百中学 2023-2024 学年高三上学期期中数学试题

【知识点】根据直线与双曲线的位置关系求参数或范围、双曲线定义的理解、求双曲线的离心率或离心率的取值范围、利用定义解决双曲线中焦点三角形问题

【分析】由题意首先根据 $\triangle OF_1E \sim \triangle F_2F_1P$ 、双曲线的定义得出 $|PF_2| = 2a, |PF_1| = 4a$ ，再结合 $\angle F_2PF_1 = \frac{\pi}{2}, |F_1F_2| = 2c, e = \frac{c}{a}$ 即可列出等式求解.



由题意过点 F_1 作直线 F_1P 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 切于点 E ，且 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ ，

所以 $\angle OEF_1 = \angle F_2PF_1 = \frac{\pi}{2}, |OE| = a$ ，

又 $\angle OF_1E = \angle F_2F_1P$ ，

所以 $\triangle OF_1E \sim \triangle F_2F_1P$ ，

所以 $\frac{|PF_2|}{|OE|} = \frac{|F_1F_2|}{|F_1O|} = \frac{2c}{a} = 2$ ，

所以 $|PF_2| = 2|OE| = 2a$ ，

由双曲线的定义可知 $|PF_1| = |PF_2| + 2a = 2a + 2a = 4a$ ，

而 $|F_1F_2| = 2c$ ，

所以在 $\text{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，由勾股定理有 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，即 $(4a)^2 + (2a)^2 = (2c)^2$ ，

解得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$ ，即双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$ 。

故选：A.

7. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 与双曲线的一条渐近

线平行的直线交双曲线于点 P ，若 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. 3

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】C

【难度】0.65

【来源】天津市静海区第一中学 2024 届高三上学期 12 月月考数学试题

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】设过 F_2 与双曲线的一条渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 平行的直线交双曲线于点 P ，运用双曲线的定义和条件可得 $|PF_1| = 3a$ ， $|PF_2| = a$ ， $|F_1F_2| = 2c$ ，再由渐近线的斜率和余弦定理，结合离心率公式，计算即可得到所求值.

【详解】设过 F_2 与双曲线的一条渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 平行的直线交双曲线于点 P ，
由双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，
由 $|PF_1| = 3|PF_2|$ ，可得 $|PF_1| = 3a$ ， $|PF_2| = a$ ， $|F_1F_2| = 2c$ ，

由 $\tan \angle F_1F_2P = \frac{b}{a}$ 可得 $\cos \angle F_1F_2P = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{c}$ ，

在三角形 PF_1F_2 中，由余弦定理可得：

$$|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF_2| \cdot |F_1F_2| \cos \angle F_1F_2P，$$

即有 $9a^2 = a^2 + 4c^2 - 2a \times 2c \times \frac{a}{c}$ ，化简可得 $c^2 = 3a^2$ ，

所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ．

故选：C．

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ， B 为虚轴上端点 M 是 BF 中点， O 为坐标原点， OM 交双曲线右支于 N ，若 FN 垂直于 x 轴，则双曲线 C 的离心率为（ ）

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市和平区天津一中 2024 届高三上学期第三次月考数学试题

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】由图，可得点 M, N 坐标，后由 $\overrightarrow{OM} // \overrightarrow{ON}$ 可得 $a = b$ ，即可得答案.

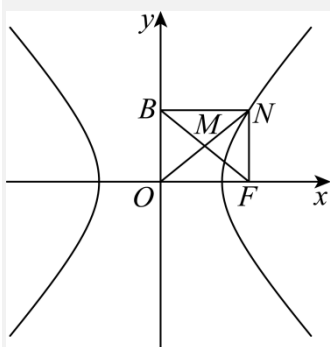
【详解】如图，由题意可知 $F(c, 0), B(0, b)$.

注意到 $\frac{x_N^2}{a^2} - \frac{y_N^2}{b^2} = 1$ ，又由题， $x_N = c, y_N > 0$ ，则 $y_N = \frac{b^2}{a} \Rightarrow N\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$.

因 M 是 BF 中点，则 $M\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ，则 $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right), \overrightarrow{ON} = \left(c, \frac{b^2}{a}\right)$.

由题， $\overrightarrow{OM} // \overrightarrow{ON}$ ，则 $\frac{bc}{2} = \frac{cb^2}{2a} \Rightarrow a = b$ ，故 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{2}$.

故选：A.



9. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，以 F_1 为圆心， $|F_1F_2|$ 为半径的圆与 C 的左支的一个公共点为 P ，若原点 O 到直线 PF_2 的距离等于实半轴的长，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】A

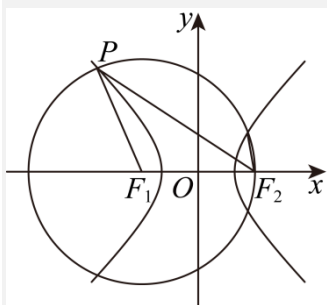
【难度】0.65

【来源】天津市北辰区 2023-2024 学年高三上学期第一次联考（期中）数学试题

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围、双曲线定义的理解

【分析】运用双曲线的定义和直角三角形的勾股定理，化简整理得出关于 a, c 的齐次方程，即可解得双曲线的离心率 e 的值.

【详解】作图如下：



∴原点 O 到直线 PF_2 的距离等于实半轴的长，

∴ F_1 到直线 PF_2 的距离为 $2a$ ，

又∵以 F_1 为圆心， $|F_1F_2|$ 为半径的圆与 C 的左支的一个公共点为 P ，

∴ $|PF_1| = |F_1F_2| = 2c$ ，

由双曲线定义的 $|PF_2| = 2a + 2c$ ，

∴ F_1 到直线 PF_2 的距离为 $\sqrt{(2c)^2 - \left(\frac{2a+2c}{2}\right)^2}$ ，

故 $\sqrt{(2c)^2 - \left(\frac{2a+2c}{2}\right)^2} = 2a$ ，即 $3c^2 - 2ac - 5a^2 = 0$ ，

∴ $3e^2 - 2e - 5 = 0$ ，解得 $e = -1$ （舍去）或 $e = \frac{5}{3}$ 。

故选：A.

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 2，

则双曲线的离心率为（ ）

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{10}$

【答案】B

【难度】0.65

【来源】天津市滨海新区塘沽第一中学 2023-2024 学年高三上学期第一次月考数学试题

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】由题可以算出圆心到双曲线其中一条渐近线的距离，设出渐近线方程 $y = kx + b$ 再结合点到直线之间的距离公式即可列出方程解出 k ，进一步即可求出离心率。

【详解】一方面：设双曲线渐近线被圆所截得的弦长为 l ，圆的半径为 r ，圆心到渐近线的距离为 d ，

又根据题意有 $l=2, r=\sqrt{4}=2$ ，因此根据垂径定理可得 $d=\sqrt{r^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ ，

另一方面：不妨设渐近线方程为 $kx-y=0$ （其中 $k^2=\frac{b^2}{a^2}$ ），又圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 的圆心坐标为圆 $(2,0)$ ，

因此根据点到直线之间的距离公式有圆 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}$ 。

结合以上两方面有 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$ ，解得 $k^2=3$ ，又 $k^2=\frac{b^2}{a^2}$ ，

所以双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+k^2}=\sqrt{1+3}=2$ 。

故选：B。

11. 已知 F_1 、 F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(a>0, b>0)$ 的左、右焦点， P 为双曲线右支上一点，若 $\angle F_1PF_2=60^\circ$ ， $S_{\triangle F_1PF_2}=\sqrt{3}ac$ ，则双曲线的离心率为（ ）

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市第四十五中学 2023-2024 学年高三上学期第一次月考数学试题

【知识点】余弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用、求双曲线的离心率或离心率的取值范围

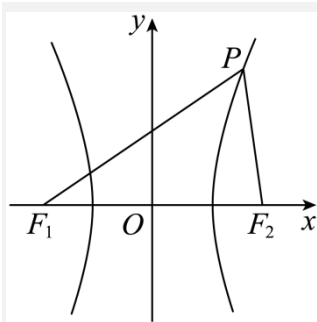
【分析】根据双曲线定义得到 $|PF_1|-|PF_2|=2a$ ，由三角形面积公式和余弦定理求出 $c^2-ac-a^2=0$ ，两边同除以 a^2 得到 $e^2-e-1=0$ ，求出离心率。

【详解】 $\because F_1$ 、 F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=(a>0, b>0)$ 的左、右焦点，

P 为双曲线右支上一点，

$$\therefore |PF_1|-|PF_2|=2a, \quad |F_1F_2|=2c,$$

又 $\because$ 在 $\triangle F_1PF_2$ 中， $\angle F_1PF_2=60^\circ$ ，



$$\because S_{\triangle F_1PF_2} = \sqrt{3}ac,$$

$$\therefore S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \sin 60^\circ = \sqrt{3}ac, \text{ 则 } |PF_1| \cdot |PF_2| = 4ac,$$

$$\text{又 } \cos 60^\circ = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{(|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| - 4c^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{4a^2 + 2 \times 4ac - 4c^2}{2 \times 4ac} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } c^2 - ac - a^2 = 0, \text{ 故 } e^2 - e - 1 = 0, \text{ 解得: } e = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\because e > 1,$$

$$\therefore e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

故选: A

12. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过原点 O 的直线 l

与 E 交于 A, B 两点 (点 A 在第一象限), 延长 AF_2 交 E 于点 C , 若 $|BF_2| = |AC|$,

$\angle F_1BF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线 E 的离心率为 ()

A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{7}$

【答案】A

【难度】0.65

【来源】天津市滨海新区塘沽第一中学 2024 届高三上学期第一次月考数学复习卷 5

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】根据已知条件以及双曲线的定义求得 $|AF_2|$, 进而求得双曲线的离心率.

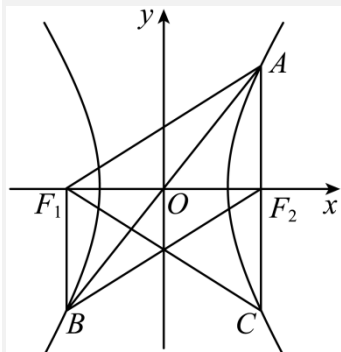
【详解】结合双曲线的对称性可知, $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$, $|AF_1| = |AC|$,

所以 $\triangle ACF_1$ 为等边三角形, 则 $|AF_1| = |CF_1|$, 则 $AC \perp F_1F_2$.

由双曲线的定义, 得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 所以 $|AF_1| = 4a$, $|AF_2| = 2a$,

$$\text{则 } \frac{|F_1F_2|}{|AF_2|} = \frac{2c}{2a} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

故选：A



【点睛】方法点睛：求解双曲线的离心率，方向有三种，一个是求得 a 和 c ，从而求得双曲线的离心率；一种是求得 a, c 的等量关系式，化简可求得双曲线的离心率；还有一种是求得 a, b 的等量关系式，先求得 $\frac{b}{a}$ ，再求得双曲线的离心率.

13. 已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点，点 E 是该双曲线的右顶点，过 F 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点，若 $\triangle ABE$ 是锐角三角形，则该双曲线的离心率 e 的取值范围是 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $(1, 2)$

C. $(2, 1 + \sqrt{2})$

D. $(1, 1 + \sqrt{2})$

【答案】B

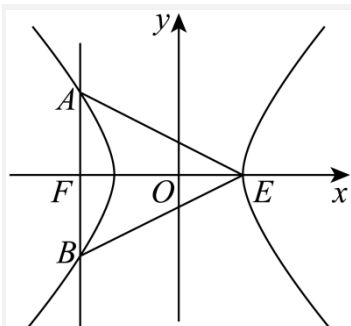
【难度】0.65

【来源】2013 届天津市天津一中高三第四次月考文科数学试卷

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】根据双曲线的对称性结合题意可得 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，由此可得 $|AF| < |FE|$ ，进而得到关于 a, b, c 的齐次式，即可求解离心率.

【详解】由题意可知 $AE = BE$ 即 $\triangle ABE$ 为等腰三角形，



故 $\triangle ABE$ 是锐角三角形，只需 $\angle AEF < 45^\circ$ ，

将 $x = -c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$ ，

故在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中， $|AF| = \frac{b^2}{a}$ ， $|FE| = a + c$ ，

则 $|AF| < |FE|$ ， $\therefore \frac{b^2}{a} < a + c$ ，化简整理，得 $2a^2 - c^2 + ac > 0$ ，

$\therefore e^2 - e - 2 < 0$ ， $\therefore -1 < e < 2$ ，

又 $e > 1$ ， $\therefore 1 < e < 2$ ，

故选：B.

14. 已知 O 为坐标原点，双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的右焦点为 F ，以 OF 为直径的圆与 C 的两条渐近线分别交于与原点不重合的两点 A, B ，若 $|OA| + |OB| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|$ ，则四边形 $OAFB$ 的面积为 ()

A. 6

B. $4\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

【答案】B

【难度】0.65

【来源】天津市武清区杨村第一中学 2023 届高三下学期第一次热身练数学试题

【知识点】求双曲线中三角形（四边形）的面积问题、已知方程求双曲线的渐近线

【分析】结合双曲线图像对称性，可得 $AB \perp x$ 轴，根据圆的性质和双曲线 a, b, c 的关系可计算出 $|OA|$ ， $|AF|$ ， $|AD|$ ， $|OF|$ 的长度，进而求出四边形 $OAFB$ 的面积.

【详解】设 AB 与 x 轴交于点 D ，由双曲线的对称性可知 $AB \perp x$ 轴， $|OA| = |OB|$ ， $|AB| = 2|AD|$ ，

又因为 $|OA| + |OB| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AB|$ ，所以 $|OA| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|AD|$ ，即 $\frac{|AD|}{|OA|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

所以 $\angle AOF = 60^\circ$ ，因为点 A 在以 OF 为直径的圆上，所以 $OA \perp AF$ ， OA 所在的渐近线方程

为 $y = \frac{b}{a}x$,

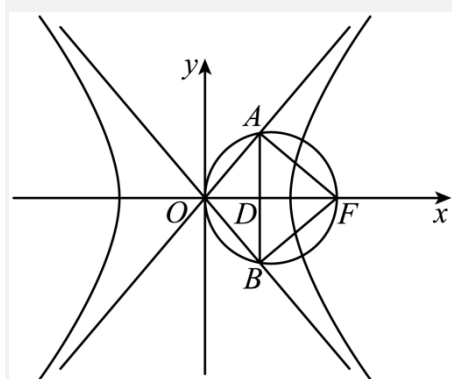
点 $F(c, 0)$ 到渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 距离为 $|AF| = \frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} = b$,

所以 $|OA| = \sqrt{|OF|^2 - |AF|^2} = a = 2$,

所以 $|AF| = |OA| \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$, $|AD| = |OA| \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, 则 $|OF| = \frac{|OA|}{\cos 60^\circ} = 4$,

所以 $S_{\triangle OAFB} = \frac{1}{2}|OF| \times |AB| = |OF| \times |AD| = \sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$,

故选: B



15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 . 过 F_2 向一条渐近线作垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_2| = 2$, 直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则双曲线的方程为 ()

A. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$

D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】D

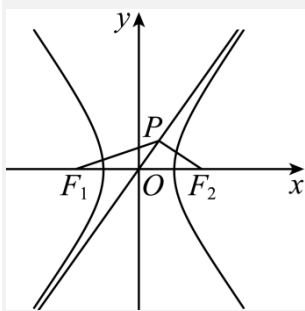
【难度】0.65

【来源】2023 年天津高考数学真题

【知识点】根据 a 、 b 、 c 求双曲线的标准方程、求点到直线的距离、根据双曲线的渐近线求标准方程

【分析】先由点到直线的距离公式求出 b , 设 $\angle POF_2 = \theta$, 由 $\tan \theta = \frac{b}{|OP|} = \frac{b}{a}$ 得到 $|OP| = a$, $|OF_2| = c$. 再由三角形的面积公式得到 y_P , 从而得到 x_P , 则可得到 $\frac{a}{a^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 解出 a , 代入双曲线的方程即可得到答案.

【详解】如图,



因为 $F_2(c, 0)$ ，不妨设渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

$$\text{所以 } |PF_2| = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{c} = b,$$

所以 $b = 2$ 。

设 $\angle POF_2 = \theta$ ，则 $\tan \theta = \frac{|PF_2|}{|OP|} = \frac{b}{a} = \frac{2}{a}$ ，所以 $|OP| = a$ ，所以 $|OF_2| = c$ 。

因为 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c \cdot y_P$ ，所以 $y_P = \frac{ab}{c}$ ，所以 $\tan \theta = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{ab}{c}}{x_P} = \frac{b}{a}$ ，所以 $x_P = \frac{a^2}{c}$ ，

$$\text{所以 } P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right),$$

因为 $F_1(-c, 0)$ ，

$$\text{所以 } k_{PF_1} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c} + c} = \frac{ab}{a^2 + c^2} = \frac{2a}{a^2 + a^2 + 4} = \frac{a}{a^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } \sqrt{2}(a^2 + 2) = 4a, \text{ 解得 } a = \sqrt{2},$$

$$\text{所以双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$$

故选：D

16. 设 F_1 、 F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的左、右焦点.若在双曲线右支上存在点 P ，满足 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，且 F_2 到直线 PF_1 的距离等于双曲线的实轴长，则该双曲线的渐近线与抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线围成三角形的面积为 ()

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

【答案】B

【难度】0.65

【来源】天津市北辰区 2023 届高三三模数学试题

【知识点】根据抛物线方程求焦点或准线、双曲线定义的理解、根据 a, b, c 齐次式关系求渐近线方程

【分析】由题意首先求得渐近线方程，然后结合渐近线方程确定其与准线方程的交点坐标，最后求解三角形的面积即可.

【详解】依题意 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，可知 $\triangle PF_2F_1$ 是一个等腰三角形，

F_2 在直线 PF_1 的投影是其中点 D ，由勾股定理可知 $|PF_1| = 2\sqrt{4c^2 - 4a^2} = 4b$

根据双曲定义可知 $4b - 2c = 2a$ ，整理得 $c = 2b - a$ ，

代入 $c^2 = a^2 + b^2$ 整理得 $3b^2 - 4ab = 0$ ，

所以 $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

所以双曲线渐近线方程为 $y = \pm \frac{4}{3}x$ ，即 $4x \pm 3y = 0$ ，

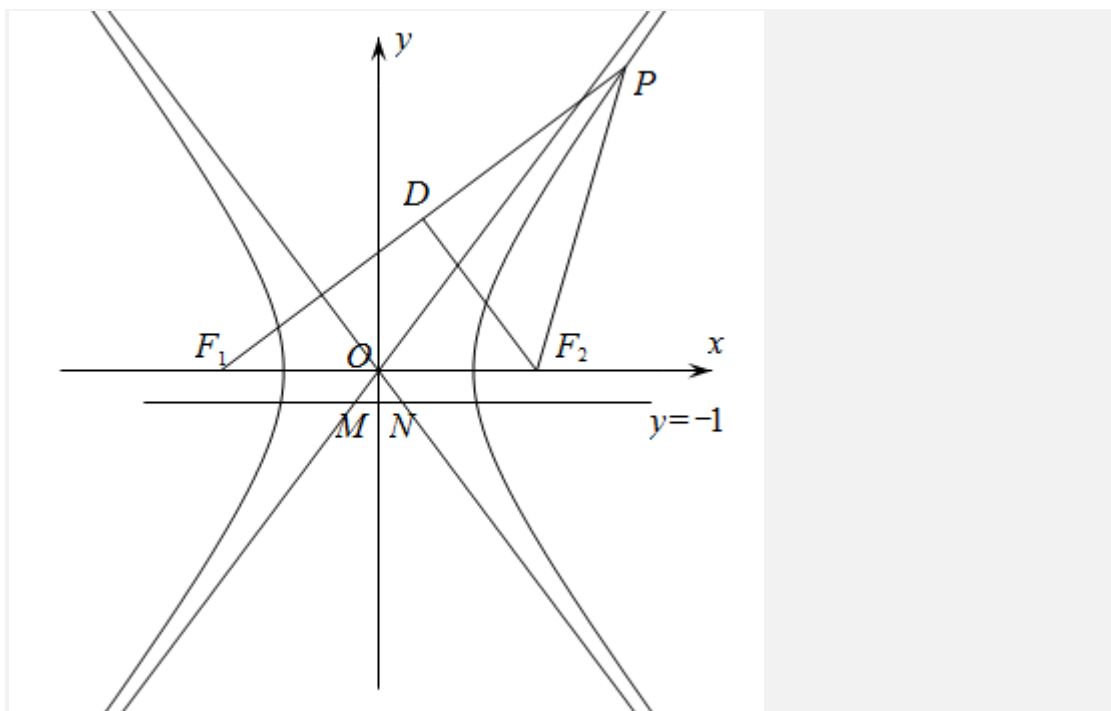
抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线方程为 $y = -1$ ，

渐近线与抛物线的准线 $y = -1$ 的交点坐标为： $M\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$ ， $N\left(\frac{3}{4}, -1\right)$ ，

$\triangle OMN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

所以双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线与抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线围成三角形的面积为 $\frac{3}{4}$.

故选：B.



17. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 抛物线 E 与双曲线 C 的一条渐近线的交点为 P , 且 P 在第一象限, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 Q , 若直线 QF 的倾斜角为 120° , 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. 2

【答案】B

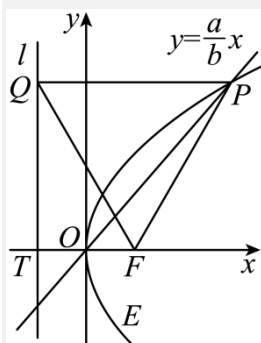
【难度】0.65

【来源】天津市滨海新区 2023 届高三三模数学试题

【知识点】求双曲线的离心率或离心率的取值范围、已知方程求双曲线的渐近线、抛物线定义的理解、根据抛物线方程求焦点或准线

【分析】根据给定条件, 结合抛物线的定义求出点 P 的坐标, 进而求出 $\frac{b}{a}$ 即可求解作答.

【详解】抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 准线为 $l: x = -1$, 令 l 交 x 于点 T , 即有 $|FT| = 2$,



由 $PQ \perp l$ ，直线 QF 的倾斜角为 120° ，得 $\angle PQF = \angle QFT = 60^\circ$ ，则 $|QF| = 2|FT| = 4$ ，

$$|QT| = 2\sqrt{3},$$

又 $|PF| = |PQ|$ ，则 $\triangle PQF$ 为正三角形， $|PQ| = 4$ ，因此点 $P(3, 2\sqrt{3})$ ，

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 P 的渐近线为 $y = \frac{b}{a}x$ ，于是 $2\sqrt{3} = 3 \cdot \frac{b}{a}$ ，解得 $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的离心率 } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

故选：B

18. 抛物线 $y^2 = 2ax (a > 0)$ 上的点 $M(x_0, 3)$ 到其焦点的距离是 M 到 y 轴距离的 2 倍，过双曲

线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右顶点 A, B 作 C 的同一条渐近线的垂线，垂足分别为 P, Q ， $|PQ| = 4$ ，则双曲线的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】D

【难度】0.65

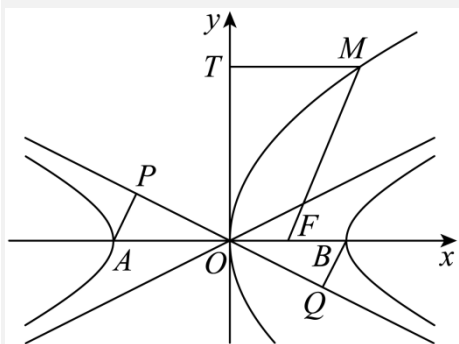
【来源】天津市十二区重点学校 2023 届高三下学期毕业班联考（二）数学试题

【知识点】抛物线上的点到定点的距离及最值、已知方程求双曲线的渐近线、求双曲线的离心率或离心率的取值范围

【分析】由抛物线定义及点在抛物线上求得 $\begin{cases} a = 3 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$ ，进而可得 $A(-3, 0), B(3, 0)$ ，结合双曲线

渐近线性质及 $|PQ| = 4$ 列方程求双曲线参数 c ，即可得离心率.

【详解】由题设， $\begin{cases} x_0 + \frac{a}{2} = 2x_0 \\ 2ax_0 = 9 \end{cases}$ ，可得 $\begin{cases} a = 3 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$ ，故 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，



所以 $A(-3,0), B(3,0)$ ，渐近线为 $y = \pm \frac{b}{3}x$ ，不妨令 P, Q 在 $y = -\frac{b}{3}x$ 上，

若 $\tan \theta = -\frac{b}{3}$ （ θ 为 $y = -\frac{b}{3}x$ 倾斜角），则 $|OP| = |OQ| = -3 \cos \theta = \frac{9}{\sqrt{b^2 + 9}}$ ，

所以 $|PQ| = \frac{18}{\sqrt{b^2 + 9}} = \frac{18}{c} = 4$ ，则 $c = \frac{9}{2}$ ，故 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ 。

故选：D

19. 已知抛物线 $y^2 = 16x$ 上一点 $A(m, n)$ 到准线的距离为5, F 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左焦点，

P 是双曲线右支上的一动点，则 $|PF| + |PA|$ 的最小值为（ ）

A. 12

B. 11

C. 10

D. 9

【答案】D

【难度】0.65

【来源】天津市南开区 2023 届高三一模数学试题

【知识点】利用定义求双曲线中线段和、差的最值、抛物线定义的理解

【分析】先根据题意求出点 A 的坐标，设 F_1 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点，根据双曲线的定义可得 $|PF| + |PA| = |PA| + |PF_1| + 2a \geq |AF_1| + 2a$ ，从而可得出答案。

【详解】抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线为 $x = -4$ ，

则点 $A(m, n)$ 到准线的距离为 $m + 4 = 5$ ，所以 $m = 1$ ，

则 $n = \pm 4$ ，故 $A(1, \pm 4)$ ，

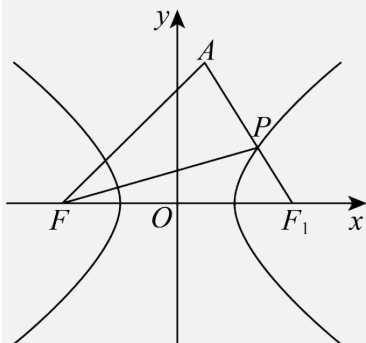
设 F_1 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的右焦点， $F_1(4, 0)$

则 $|PF| - |PF_1| = 2a = 4$ ，则 $|PF| = |PF_1| + 4$ ，

故 $|PF| + |PA| = |PA| + |PF_1| + 4 \geq |AF_1| + 4 = \sqrt{9+16} + 4 = 9$,

当且仅当 A, P, F_1 三点共线时取等号,

所以 $|PF| + |PA|$ 的最小值为 9.



故选: D.

20. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 以 C 的右顶点 A 为圆心, b 为半径作圆 A , 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 则 $\angle MAN =$ ()

A. 30°

B. 150°

C. 60°

D. 120°

【答案】C

【难度】0.65

【来源】天津市南开区南大奥宇学校 2022-2023 学年高三上学期第四次月考数学试题

【知识点】求直线与圆交点的坐标、由圆心(或半径)求圆的方程、根据离心率求双曲线的标准方程、已知方程求双曲线的渐近线

【分析】由离心率求得 $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 求出渐近线方程, 写出圆 A 方程后, 两方程联立求得交点坐标后, 由直线的倾斜角可得结论.

【详解】由已知 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $c = \frac{2}{\sqrt{3}}a$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 即为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

圆 A 方程为 $(x-a)^2 + y^2 = b^2$, 即 $(x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{3}a^2$,

取渐近线方程 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$,

由 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ (x-a)^2 + y^2 = \frac{1}{3}a^2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = a \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}a \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{6}a \end{cases}$, 不妨设 $M(a, \frac{\sqrt{3}}{3}a)$, $N(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}a)$,

显然 $MA \perp x$ 轴, 又 $k_{NA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{a}{2} - a} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 NA 的倾斜角为 150° , 从而 $\angle MAN = 60^\circ$.

故选: C.