

双曲线练习

一、单选题

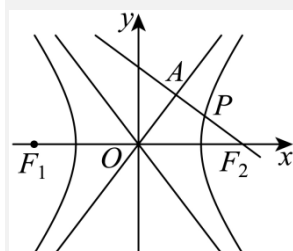
1. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点依次为 F_1 、 F_2 ，坐标原点为 O ，过右焦点 F_2 作双曲线 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 A ，该垂线交双曲线 C 的右支于点 P ，若点 P 恰好为线段 AF_2 的中点，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

【答案】A

【分析】由双曲线的渐近线的方程求出直线 AF_2 的斜率，再联立直线 AF_2 与渐近线的方程求解出点 A 的坐标，然后利用中点坐标公式求解出点 P 的坐标，然后再将点 P 坐标代入双曲线的方程中，从而解得双曲线的离心率.

【详解】



由题意可知渐近线 $OA: y = \frac{b}{a}x$,

则直线 $AF_2: y = -\frac{a}{b}(x-c)$,

联立直线 $OA: y = \frac{b}{a}x$, 和直线 $AF_2: y = -\frac{a}{b}(x-c)$, 可解得点 $A\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$,

则线段 AF_2 的中点为 $P\left(\frac{a^2+c^2}{2c}, \frac{ab}{2c}\right)$, 又因为中点 P 在抛物线上, 将点 P 的坐标代入双曲线的

方程化简得: $c^2 = 2a^2$, 即 $e = \sqrt{2}$.

故选: A.

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A , 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\angle MAN = 60^\circ$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

【答案】A

【详解】因为 $A(a, 0)$ ，双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，取 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，因为 $\angle MAN = 60^\circ$ ，且圆 A 的半径为 b ，则 $A(a, 0)$ 到 $bx - ay = 0$ 的距离为 $d = b \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ，所以 $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ，结合 $c^2 = b^2 + a^2$ ，整理得到 $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，即 C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

3. 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点依次为 F_1, F_2 ，以点 F_2 为焦点的抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线为 l ， l 交双曲线的两条渐近线于点 M, N ，过点 F_2 作 x 轴的垂线与抛物线交于第一象限的点 A ，若 $\angle MAN = 90^\circ$ ，则双曲线 C_1 的离心率为 ()

A. 2

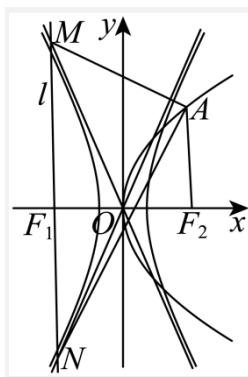
B. $\sqrt{5}$

C. $2\sqrt{2}$

D. 3

【答案】D

【分析】利用向量垂直的条件构建等式，找出双曲线中 a, b, c 的关系，从而得离心率。【详解】对于双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，右焦点为 $F_2(c, 0)$ ，其中 $c^2 = a^2 + b^2$ ，离心率 $e = \frac{c}{a}$ ，渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，因为抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ 以 F_2 为焦点，故 $\frac{p}{2} = c$ ，即 $p = 2c$ 。又因为准线 l 交渐近线于 M, N ，将 $x = -c$ 代入渐近线方程得： $M(-c, \frac{bc}{a}), N(-c, -\frac{bc}{a})$ ，过 F_2 作 x 轴的垂线 $x = c$ ，交抛物线于第一象限的点 $A(c, 2c)$ ，因为 $\angle MAN = 90^\circ$ ，即向量 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ ，又因为 $\overrightarrow{AM} = (-c - c, \frac{bc}{a} - 2c) = (-2c, c(\frac{b}{a} - 2))$ ， $\overrightarrow{AN} = (-c - c, -\frac{bc}{a} - 2c) = (-2c, -c(\frac{b}{a} + 2))$ ，所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (-2c) \cdot (-2c) + [c(\frac{b}{a} - 2)] \cdot [-c(\frac{b}{a} + 2)] = 0$ ，整理得： $\frac{b^2}{a^2} = 8$ ，所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + 8} = 3$ 。



4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过坐标原点 O 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点. 若 A 在第一象限，且 $\angle F_1AF_2 = 120^\circ, |AF_1| = 4|BF_1|$ ，则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

【答案】D

【详解】由双曲线对称性可得 $|BF_1| = |AF_2|$ ，

又 A 是双曲线 C 上的点，且 A 在第一象限，

所以 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$ ，又 $|AF_1| = 4|BF_1|$ ，

所以 $|AF_1| = 4|AF_2|$ ，所以 $|AF_1| = \frac{8a}{3}, |AF_2| = \frac{2a}{3}$ 。

在 $\triangle F_1AF_2$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|AF_1| \cdot |AF_2|}$ ，

又因为 $\angle F_1AF_2 = 120^\circ$ ，所以 $\frac{\left(\frac{8a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - (2c)^2}{2 \times \frac{8a}{3} \times \frac{2a}{3}} = -\frac{1}{2}$ ，

整理得 $84a^2 = 36c^2$ ，所以 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{21}{9}$ ，所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ，

所以该双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$ 。

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ ， AB 是过右焦点 F 且垂直于 x 轴的弦，若点 A, B 到该双曲线的同一条渐近线的距离之和为 2，则其离心率为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. 2

【答案】B

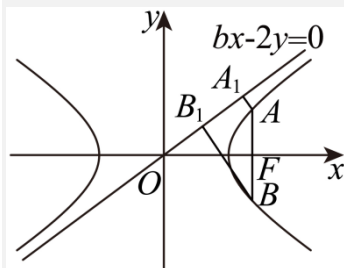
【分析】先求出 A, B 的坐标，渐近线的方程，再根据点到直线的距离公式列方程解得半焦距

c ，进而可求得离心率.

【详解】由双曲线的方程 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 知渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{2}x$,

设 $F(c, 0) (c > 0)$ ，因为 AB 是过右焦点 F 且垂直于 x 轴的弦，所以 $A\left(c, \frac{b^2}{2}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{2}\right)$,

过 A, B 分别作渐近线 $y = \frac{b}{2}x$ ，即 $bx - 2y = 0$ 的垂线，垂足分别为 A_1, B_1 ，如图：



$$\text{则 } |AA_1| = \frac{|bc - b^2|}{\sqrt{b^2 + 4}}, |BB_1| = \frac{|bc + b^2|}{\sqrt{b^2 + 4}}.$$

又点 A, B 到该双曲线的同一条渐近线的距离之和为 2，

$$\text{所以 } |AA_1| + |BB_1| = 2, \text{ 即 } \frac{|bc - b^2|}{\sqrt{b^2 + 4}} + \frac{|bc + b^2|}{\sqrt{b^2 + 4}} = \frac{(bc - b^2) + (bc + b^2)}{\sqrt{b^2 + 4}} = \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + 4}} = 2, \text{ 整理得}$$

$$b^2 + 4 = b^2 c^2.$$

将 $b^2 = c^2 - 4$ 代入上式得 $c^2 - 4 + 4 = (c^2 - 4)c^2$ ，解得 $c^2 = 5$ ，所以 $c = \sqrt{5}$ ，

$$\text{所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

6. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点重合，抛物线的准线

与 x 轴的交点为 E ，点 A 在抛物线上，且 $|AE| = \sqrt{2}|AF|$ ，则 $\triangle AEF$ 的面积为 ()

A. 32

B. 16

C. 8

D. 4

【答案】A

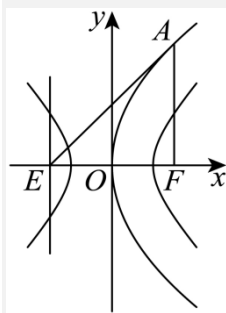
【分析】先根据双曲线的性质求出抛物线的参数 p ，进而得到抛物线方程，再利用抛物线的定义和已知条件求出点 A 的坐标，最后计算 $\triangle AEF$ 的面积.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点为 $(4, 0)$ ，即为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点，

所以 $\frac{p}{2} = 4$ ，解得 $p = 8$ ，抛物线方程为 $y^2 = 16x$ ，其准线方程为 $x = -\frac{p}{2} = -4$ ，

因此准线与 x 轴的交点 E 的坐标为 $(-4, 0)$ ；焦点 F 的坐标为 $(4, 0)$ ，

设点 $A(x_0, y_0)$ ，因为 A 在抛物线上，所以 $y_0^2 = 16x_0$ ，



则 $|AF| = x_0 + \frac{p}{2} = x_0 + 4$ ，又 $|AE| = \sqrt{(x_0 + 4)^2 + y_0^2}$ ，且 $|AE| = \sqrt{2}|AF|$ ，

代入得： $\sqrt{(x_0 + 4)^2 + y_0^2} = \sqrt{2}(x_0 + 4)$ ，化简得 $y_0^2 = (x_0 + 4)^2$ ，

结合 $y_0^2 = 16x_0$ ，代入展开并整理： $x_0^2 - 8x_0 + 16 = 0 \Rightarrow (x_0 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 4$ ，

将 $x_0 = 4$ 代入 $y_0^2 = 16x_0$ ，得 $y_0 = \pm 8$ ，因此 A 点坐标为 $(4, 8)$ 或 $(4, -8)$ ，

则 $|EF| = 4 - (-4) = 8$ ， A 点到 x 轴（ EF 所在直线）的距离为 $|\pm 8| = 8$ ，

则 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$ 。

7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F ，半焦距为 c 。过 F 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 H ，且 $\triangle OHF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{8}c^2$ ，则 C 的离心率为 ()

A. 2

B. 2 或 $\sqrt{3}$

C. 2 或 $\sqrt{5}$

D. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【分析】利用点到直线距离可求出 $|FH| = b$ ，再根据 $\triangle OHF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{8}c^2$ 列出相应等式，即可求解。

【详解】由题可得双曲线的渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，这里不妨取 $y = \frac{b}{a}x$ ，即 $bx - ay = 0$ ，

点 $F(c, 0)$ 到直线 $bx - ay = 0$ 的距离 $|FH| = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{bc}{c} = b$ ，

在 $\triangle OHF$ 中 $|OH| = \sqrt{|OF|^2 - |FH|^2} = \sqrt{c^2 - b^2} = a$ ，

所以 $S_{\triangle OHF} = \frac{1}{2}|OH||HF| = \frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2$ ，则 $4ab = \sqrt{3}c^2$ ，

又因 $b^2 = c^2 - a^2$ ，所以 $4a\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}c^2$ ，

化简可得 $16a^2c^2 - 16a^4 = 3c^4$ ，等式两边同时除以 a^4 ，可得 $16e^2 - 16 = 3e^4$ ，

即 $3e^4 - 16e^2 + 16 = 0$ ，解得 $e^2 = \frac{4}{3}$ 或 $e^2 = 4$ ，

因 $e > 1$ ，所以 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $e = 2$ 。

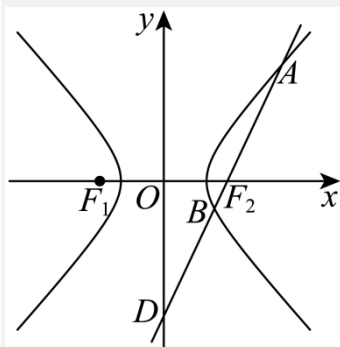
8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 F_2 的直线 l 与 C 在第一、四象限的交点分别为 A, B ，与 y 轴交点为 D ， $|AF_2| = |DF_2| = \frac{\sqrt{6}}{3}|F_1F_2|$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】B

【分析】利用线段长度关系可求得点 A 的坐标，代入双曲线方程化简整理可求得离心率。

【详解】如下图：



易知 $|F_1F_2| = 2c$ ，所以 $|AF_2| = |DF_2| = \frac{\sqrt{6}}{3}|F_1F_2| = \frac{2\sqrt{6}}{3}c$ ，且 F_2 为 AD 的中点，

又 $|OF_2| = c$ ，所以 $|OD| = \frac{\sqrt{15}}{3}c$ ，因此可得 $A\left(2c, \frac{\sqrt{15}}{3}c\right)$ ，

代入双曲线方程可得 $\frac{4c^2}{a^2} - \frac{\frac{15c^2}{9}}{b^2} = 1$ ，整理并化简可得 $12e^4 - 20e^2 + 3 = 0$ ，即

$$(2e^2 - 3)(6e^2 - 1) = 0,$$

解得 $e^2 = \frac{3}{2}$ 或 $e^2 = \frac{1}{6}$ (舍)；

因为双曲线离心率 $e > 1$ ，所以 $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，左、右顶点分别为 A_1, A_2 ， M 为 C 上

一点，且 $MF \perp x$ 轴，点 N 在线段 MF 上，直线 A_1N, A_2N 分别交 y 轴于 H, G 两点， O 为坐标

原点, 若 $|OG|=3|OH|$, 则 C 的离心率为 ()

A. 2

B. 3

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】不妨设点 M 在第一象限, 求出点 H, G 的方程, 再根据 $|OG|=3|OH|$ 即可求出.

【详解】不妨设点 M 在第一象限,

由题意得, $F(c, 0), M\left(c, \frac{b^2}{a}\right), A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$,

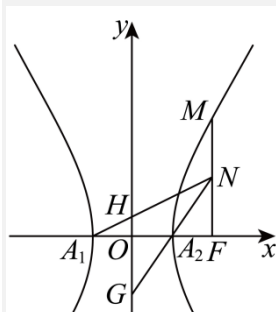
设 $N(c, y_0), y_0 \in \left[0, \frac{b^2}{a}\right]$, 则 $k_{A_1N} = \frac{y_0}{c+a}, k_{A_2N} = \frac{y_0}{c-a}$,

故直线 A_1N 的方程为 $y = \frac{y_0}{c+a}(x+a)$, 令 $x=0$, 则 $y = \frac{ay_0}{c+a}$, 故 $H\left(0, \frac{ay_0}{c+a}\right)$;

直线 NA_2 的方程为 $y = \frac{y_0}{c-a}(x-a)$, 令 $x=0$, 则 $y = \frac{-ay_0}{c-a}$, 故 $G\left(0, \frac{-ay_0}{c-a}\right)$,

因为 $|OG|=3|OH|$, 则 $\frac{ay_0}{c-a} = 3\frac{ay_0}{c+a}$, 得 $c=2a$,

则 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = 2$.



故选: A

10. 已知 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点, P 为圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上一点, 直线 PF 的倾斜角是 30° , 直线 PF 与双曲线的两条渐近线交于 M, N 两点, 且 P 恰为 MN 的中点, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

【答案】A

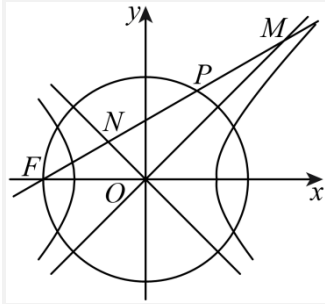
【分析】根据倾斜角求出直线 PF 斜率, 进而得到直线方程, 联立圆的方程求出点 P 坐标; 直线方程与渐近线方程联立求出点 M, N 坐标, 结合点 P 为中点得到 a 与 b 的关系, 代入

离心率公式计算即可.

【详解】双曲线 C 的左焦点 $F(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$.

圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 的半径为 c , 点 P 在圆上, 所以 $|OP| = c$.

直线 PF 的倾斜角是 30° , 直线 PF 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + c)$.



$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + c) \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}, \text{整理得 } 2x^2 + cx - c^2 = 0, \text{ 即 } (2x - c)(x + c) = 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{c}{2} \text{ 或 } x = -c \text{ (对应 } F \text{ 点)}, y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{c}{2} + c\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \text{ 所以 } P\left(\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right).$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + c) \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}ac}{3b - \sqrt{3}a} \\ y = \frac{\sqrt{3}bc}{3b - \sqrt{3}a} \end{cases}, \text{ 即 } M\left(\frac{\sqrt{3}ac}{3b - \sqrt{3}a}, \frac{\sqrt{3}bc}{3b - \sqrt{3}a}\right).$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + c) \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}ac}{3b + \sqrt{3}a} \\ y = \frac{\sqrt{3}bc}{3b + \sqrt{3}a} \end{cases}, \text{ 即 } N\left(\frac{-\sqrt{3}ac}{3b + \sqrt{3}a}, \frac{\sqrt{3}bc}{3b + \sqrt{3}a}\right).$$

$$\text{因为 } P \text{ 恰为 } MN \text{ 的中点, 所以 } \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}ac}{3b - \sqrt{3}a} + \frac{-\sqrt{3}ac}{3b + \sqrt{3}a}\right) = \frac{c}{2}, \text{ 整理得, } a^2 = b^2,$$

$$\text{所以 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

故选: A.

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线互相垂直, 且一个焦点在抛物线 $x = \frac{y^2}{16}$

的准线上, 则双曲线的标准方程为 ()

A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】B

【分析】根据渐近线垂直可得 $b = a$ ，结合题中条件求解结果.

【详解】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

因为两条渐近线互相垂直, 则 $\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$, 化简得 $b^2 = a^2$, 故 $b = a$,

此时双曲线方程可表示为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, 据此排除 A,D.

由抛物线 $x = \frac{y^2}{16}$ 可得 $y^2 = 16x$, 其准线方程为 $x = -4$,

因为双曲线的焦点 $(\pm c, 0)$ 在抛物线的准线上, 可知 $-c = -4 \therefore c = 4$,

又 $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, 即 $16 = 2a^2$, 解得 $a^2 = 8$,

则双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$,

故选: B.

12. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于 M, N 两点, 且直线 MN 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 若 $|F_2M| = |F_2N|$, 则双曲线 C 的离心率是 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

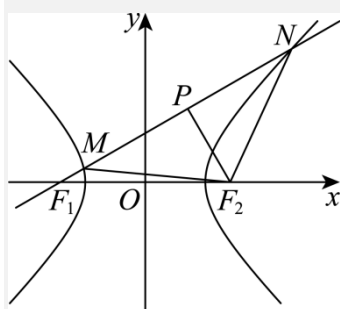
【答案】A

【分析】过点 F_2 作 $PF_2 \perp MN$, 垂足为 P , 则 $|MP| = |NP|$, 设 $|F_2M| = |F_2N| = m$, 则

$|NF_1| = 2a + m, |MF_1| = m - 2a$, 由直线 MN 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 得出 $\angle PF_1F_2 = \frac{\pi}{6}$, 根据三角函数定

义得出 $m = \sqrt{3}c$, 在 $\triangle MF_1F_2$ 中由余弦定理即可求解.

【详解】过点 F_2 作 $PF_2 \perp MN$, 垂足为 P , 如图所示: 则



因为 $|F_2M|=|F_2N|$ ，所以 $|MP|=|NP|$ ，

设 $|F_2M|=|F_2N|=m$ ，根据双曲线的定义得：

$$\text{则 } |NF_1|-|NF_2|=2a, |MF_2|-|MF_1|=2a,$$

$$|NF_1|=2a+m, |MF_1|=m-2a,$$

$$\text{所以 } |MN|=|NF_1|-|MF_1|=2a+m-(m-2a)=4a,$$

$$\text{所以 } |MP|=|NP|=2a,$$

$$\text{则 } |PF_1|=|MF_1|+|PM|=m-2a+2a=m,$$

因为直线 MN 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ ，所以 $\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$ ，

$$\text{所以 } \cos \angle PF_1F_2 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PF_1F_2 \text{ 中, } \cos \angle PF_1F_2 = \frac{|PF_1|}{|F_1F_2|} = \frac{|PF_1|}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |PF_1|=m=\sqrt{3}c,$$

$$\text{在 } \triangle MF_1F_2 \text{ 中, } |MF_1|=m-2a=\sqrt{3}c-2a, |MF_2|=\sqrt{3}c, |F_1F_2|=2c,$$

$$\text{由余弦定理得: } \cos \angle PF_1F_2 = \frac{|MF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - |MF_2|^2}{2|MF_1||F_1F_2|}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}c-2a)^2 + (2c)^2 - (\sqrt{3}c)^2}{2 \times (\sqrt{3}c-2a) \times 2c} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{整理得, } \frac{c^2}{a^2} = 2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{2},$$

故选：A.

13. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $l: y = \sqrt{3}x$ ，直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 与 E 交于 M, N 两点，分别过点 M, N 作 l 的垂线，垂足为 P, Q ．若四边形 $MPNQ$ 的面积为 $3\sqrt{3}$ ，则 E 的虚轴长为（ ）

A. 2

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $4\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】根据对称性易得四边形 $MPNQ$ 是平行四边形，再根据其面积得出 $|OM|=\sqrt{6}$ ，进而计算点 M 的坐标，将其代入双曲线方程中，并结合渐近线方程可求.

【详解】记坐标原点为 O ，不妨设 M 在第一象限，显然 MN 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ ， l 的倾斜角为

$\frac{\pi}{3}$ ，故 $\angle POM = \frac{\pi}{6}$ ，

而 $PQ \perp PM$ ， $PQ \perp NQ$ ，由对称性易得四边形 $MPNQ$ 是平行四边形，

故其面积 $S = |PQ| \cdot |PM| = 2|OP| \cdot |PM| = 2|OM|^2 \cos \angle POM \sin \angle POM = \frac{\sqrt{3}}{2} |OM|^2 = 3\sqrt{3}$ ，可得

$|OM| = \sqrt{6}$ ，

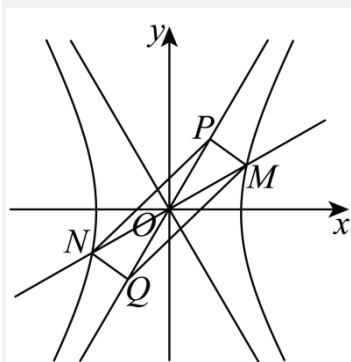
设 $M(m, n)$ ，由 MN 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ ，得 $m = \sqrt{6} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ， $n = \sqrt{6} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

于是由 $\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = 1$ ，得 $\frac{9}{2a^2} - \frac{3}{2b^2} = 1$ ，

又 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，则 $a^2 = 4, b^2 = 12$ ，解得 $b = 2\sqrt{3}$ ，

故 E 的虚轴长为 $2b = 4\sqrt{3}$ 。

故选：D。



14. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 的直线与 C 的右支

相交于 A, B 两点，若 $|AB| = 4a, \angle F_1AB = 90^\circ$ ，则 C 的离心率为 ()

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. 2

D. 3

【答案】A

【分析】设 $|AF_1| = x$ ， $|BF_1| = y$ ，由已知和双曲线的定义得出 $|AF_2| = x - 2a$ ， $|BF_2| = y - 2a$ ，

$|AF_2| + |BF_2| = x - 2a + y - 2a = 4a$ ，再在直角三角形 F_1AB 和 AF_1F_2 中，利用勾股定理可求得 a

和 c 的关系，从而可求双曲线的离心率。

【详解】如图，设 $|AF_1| = x$ ， $|BF_1| = y$ ，

由双曲线定义可知： $|AF_2| = x - 2a$ ， $|BF_2| = y - 2a$ ，

$\therefore |AB| = 4a$, $\therefore |AF_2| + |BF_2| = x - 2a + y - 2a = 4a$, 即 $y = 8a - x$;

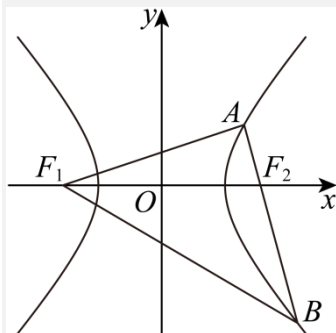
在直角 $\triangle F_1AB$ 中, $|BF_1|^2 = |AF_1|^2 + |AB|^2$, 即 $(8a - x)^2 = x^2 + (4a)^2$,

解得: $x = 3a$, 则 $|AF_1| = 3a$, $|AF_2| = 3a - 2a = a$;

在直角 $\triangle AF_1F_2$ 中, $|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2$, 即 $(2c)^2 = (3a)^2 + a^2$,

即 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{2}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选: A.



15. 设 F_1 , F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的左右焦点, 过 F_2 的直线交双曲线右支于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = |AB|$, 则双曲线的离心率可以是 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】A

【分析】 $|AF_2| = m$, 结合条件, 利用双曲线的定义可得 $|BF_2| = 2a$, $|BF_1| = 4a$, 由构成三角形的条件可得 $4a + 2a > 2c$, 即可求解.

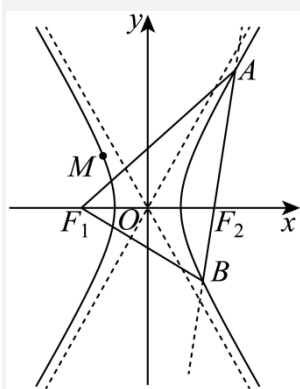
【详解】如图, 设 $|AF_2| = m$,

由双曲线的定义知 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 所以 $|AF_1| = m + 2a$, 又 $|F_1A| = |AB|$, 所以 $|BF_2| = 2a$

又, $|BF_1| - |BF_2| = 2a$, 则 $|BF_1| = 4a$, 在 $\triangle BF_1F_2$ 中, $|BF_1| = 4a, |BF_2| = 2a, |F_1F_2| = 2c$,

由 $4a + 2a > 2c$, 得到 $e = \frac{c}{a} < 3$, 又 $e > 1$, 所以 $1 < e < 3$,

结合各个选项, A 正确, B、C、D 错误,



故选：A.

16. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于 A , B 两点, 抛物线的准线 l 与坐标轴交于点 M , 若 $\triangle ABM$ 为直角三角形, 则双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{17}$

【答案】C

【分析】写出双曲线的渐近线方程, 联立抛物线方程求得 A , B 两点的坐标, 根据抛物线及双曲线渐近线的对称性及 $\triangle ABM$ 为直角三角形, 求得 a, b 的关系, 从而得到双曲线的离心率.

【详解】由题可知, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

记抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与 $y = \frac{b}{a}x$ 的交点为 A , 与 $y = -\frac{b}{a}x$ 的交点为 B .

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \text{ 得, } A\left(\frac{2a^2p}{b^2}, \frac{2ap}{b}\right); \text{ 由 } \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases} \text{ 得, } B\left(\frac{2a^2p}{b^2}, -\frac{2ap}{b}\right).$$

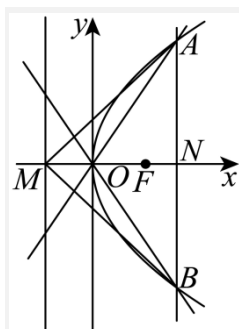
由抛物线及双曲线渐近线的对称性知, $|MA| = |MB|$, 且 AB 垂直于 x 轴, 记垂足为 N .

因为 $\triangle ABM$ 为直角三角形, 所以 $|MN| = |AN|$.

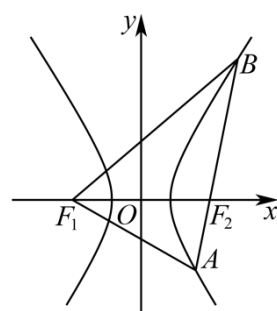
所以 $\frac{2a^2p}{b^2} + \frac{p}{2} = \frac{2ap}{b}$, 化简得 $4a^2 - 4ab + b^2 = 0$, 即 $(2a - b)^2 = 0$, 所以 $b = 2a$.

所以双曲线的离心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{5}$.

故选：C.



17. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 过右焦点 F_2 作直线 l , 交右支于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆过 F_1 , 若 $\overrightarrow{BF_2} = \frac{10}{3} \overrightarrow{F_2A}$, 则双曲线 C 的离心率的平方为 ()



- A. $\frac{73}{13}$ B. $\frac{87}{13}$ C. $\frac{123}{26}$ D. $\frac{129}{26}$

【答案】A

【分析】结合题意与双曲线定义得到 $|AF_1| = 5a$, $|AF_2| = 3a$, 再结合余弦定理建立齐次方程求解离心率即可.

【详解】因为 $\overrightarrow{BF_2} = \frac{10}{3} \overrightarrow{F_2A}$, 所以 $|\overrightarrow{BF_2}| = \frac{10}{3} |\overrightarrow{F_2A}|$, 即 $BF_2 = \frac{10}{3} F_2A$,

令 $|AF_2| = 3t$, 得到 $|BF_2| = 10t$, $|AB| = 13t$,

由双曲线定义得 $|AF_1| = |AF_2| + 2a = 3t + 2a$, $|BF_1| = |BF_2| + 2a = 10t + 2a$,

因为以 AB 为直径的圆过 F_1 , 所以 $BF_1 \perp AF_1$,

故 $|AF_1|^2 + |BF_1|^2 = |AB|^2$, 得到 $(3t + 2a)^2 + (10t + 2a)^2 = (13t)^2$,

整理得 $15t^2 - 13at - 2a^2 = (15t + 2a)(t - a) = 0$, 解得 $t = a$,

则 $|AF_1| = 5a$, $|AF_2| = 3a$,

在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cos \angle F_1AB = |F_1F_2|^2$,

得 $(5a)^2 + (3a)^2 - 2 \times 5a \times 3a \times \frac{5}{13} = (2c)^2$,

整理得 $73a^2 = 13c^2$ ，则 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{73}{13}$ ，故 A 正确.

故选：A

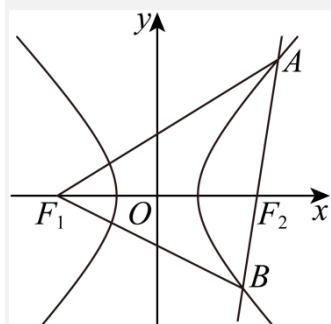
18. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 F_2 作斜率为 $\sqrt{15}$ 的直线 l 交双曲线 C 的右支于 A, B 两点，其中点 A 在第一象限，若 $|AB| = |AF_1|$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

【答案】C

【分析】利用双曲线的定义式，结合题设条件，推得 $|BF_2| = 2a$ ， $|BF_1| = 4a$ ，设 $\angle F_1F_2B = \theta$ ，在 $\triangle BF_1F_2$ 中，利用余弦定理可得关于 a, c 的齐次方程，解之即得离心率.

【详解】



如图，根据双曲线的定义得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$ ， $|BF_1| - |BF_2| = 2a$ ，

由于 $|AB| = |AF_1|$ ， $|AB| = |AF_2| + |BF_2|$ ，则 $|AF_2| + |BF_2| = |AF_1|$ ，

所以 $|BF_2| = 2a$ ， $|BF_1| = 4a$ 。设 $\angle F_1F_2B = \theta$ ，由题可得 $\tan \theta = \sqrt{15}$ ，则 $\cos \theta = \frac{1}{4}$ ，

在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理，可得 $\cos \theta = \frac{4c^2 + 4a^2 - 16a^2}{2 \times 2c \times 2a} = \frac{1}{4}$ ，整理得 $2c^2 - ac - 6a^2 = 0$ ，

即 $2e^2 - e - 6 = 0$ ，因 $e > 1$ ，则可得 $e = 2$ 。

故选：C.

19. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ， O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与双曲线的两条渐近线分别交于 (除原点外) A, B 两点，若 $|AB| = b$ ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. 4 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】根据题意写出以 OF 为直径的圆的方程，与双曲线的渐近线方程联立求得点 A, B 的纵坐标，再根据 $|AB| = b$ 即可求得.

【详解】由题意，双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

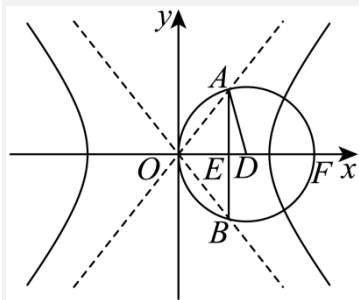
如图，设双曲线 C 的焦距为 $2c$ ，以 OF 为直径的圆的方程为： $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$,

$$\text{即 } x^2 - cx + y^2 = 0, \text{ 联立 } \begin{cases} x^2 - cx + y^2 = 0 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases},$$

解得 $y = \frac{ab}{c}$ ，即 $y_A = \frac{ab}{c}$ 由对称性可得， $y_B = -\frac{ab}{c}$ ，且 $x_A = x_B$ ，

则 $|AB| = y_A - y_B = \frac{2ab}{c} = b$ ，可得 $c = 2a$ ，故离心率 $e = 2$.

故选：B



20. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(4, 0)$ ，设 A, B 为双曲线上关于原点对称的两点， AF 的中点为 M ， BF 的中点为 N ，若原点 O 在以线段 MN 为直径的圆上，直线 AB 的斜率为 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ，则双曲线的离心率为 ()

A. $2\sqrt{2}$

B. 2

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】B

【分析】设 $A(m, n) (m > 0, n > 0)$, $B(-m, -n)$ ，运用中点坐标公式表示点 M, N ，由 $OM \perp ON$ ，以及斜率公式解方程组可得 m, n ，将点 A 的坐标代入双曲线的方程，结合 a, b, c 的关系，求得 a, b ，即可得离心率.

【详解】由题意， $c^2 = a^2 + b^2 = 16$ ，设 $A(m, n) (m > 0, n > 0)$, $B(-m, -n)$ ，

$$\text{则 } M\left(\frac{4+m}{2}, \frac{n}{2}\right), N\left(\frac{4-m}{2}, -\frac{n}{2}\right),$$

因为原点 O 在以线段 MN 为直径的圆上，可得 $OM \perp ON$ ，

所以 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \frac{4-m}{2} \cdot \frac{4+m}{2} - \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = 0$ ，即 $m^2 + n^2 = 16$ ①，

又直线 AB 的斜率 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ，可得 $\frac{n}{m} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ ②，

联立①②可得 $m = \sqrt{7}, n = 3$ ，即 $A(\sqrt{7}, 3)$ ，

又点 A 在双曲线上，可得 $\frac{7}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ ，

又 $a^2 + b^2 = 16$ ，解得 $a = 2, b = 2\sqrt{3}$ ，所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ 。

故选：B.