

构造函数

一、单选题

1. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时,

$xf'(x)-f(x)<0$, 则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(0,1) \cup (1,+\infty)$ B. $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ C. $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ D. $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

【答案】C

【解析】构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 分析出函数 $g(x)$ 为偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上为减函数, 由

$f(x)>0$ 可得出 $\begin{cases} g(x)>0 \\ x>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} g(x)<0 \\ x<0 \end{cases}$, 解这两个不等式组即可得解.

【详解】构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 该函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$,

由于函数 $f(x)$ 为奇函数, 则 $g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$,

所以, 函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 为偶函数.

当 $x>0$ 时, $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$, 所以, 函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,

由于函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 为偶函数, 则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数.

$\because f(-1)=0$, 则 $f(1)=0$ 且 $f(0)=0$, 所以, $g(-1)=g(1)=0$.

不等式 $f(x)>0$ 等价于 $\begin{cases} g(x)>0=g(1) \\ x>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} g(x)<0=g(-1) \\ x<0 \end{cases}$, 解得 $x<-1$ 或 $0<x<1$.

因此, 不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1) \cup (0,1)$.

故选: C.

【点睛】方法点睛: 利用函数的奇偶性与单调性求解抽象函数不等式, 要设法将隐性划归为显性的不等式来求解, 方法是:

(1) 把不等式转化为 $f[g(x)]>f[h(x)]$;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 再根据函数的单调性把不等式的函数符号“ f ”脱掉, 得到具体的不等式(组), 但要注意函数奇偶性的区别.

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $xf'(x) + f(x) \geq 0$, 则 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

【答案】B

【分析】依题意构造函数 $g(x) = xf(x)$ 判断出其单调性和奇偶性, 再结合 $g(x) \geq g(0) = 0$ 判断出函数 $f(x)$ 的符号, 对不等式分类讨论即可求得其解集.

【详解】构造函数 $g(x) = xf(x)$, 可得 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$,

又因为当 $x \geq 0$ 时, $xf'(x) + f(x) \geq 0$, 可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数可得 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$, 即可得 $g(x)$ 为偶函数,

因此 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 即可知 $g(x) \geq g(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 由 $xf(x) > 0$ 可得 $f(x) < 0$,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由 $xf(x) > 0$ 可得 $f(x) > 0$;

不等式 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 等价于 $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$;

解得 $x > 1$ 或 $-1 < x < 0$;

所以不等式 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

故选: B.

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(1) = 0$, 当 $x < 0$ 时,

$f'(x) < \frac{f(x)}{x}$, 则不等式 $(x-1) \cdot f(x) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-1, 0)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

【答案】A

【分析】由复合函数 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'>0$ 和函数的奇偶性得到 $g(x)$ 的单调性，再分 x 的范围解不等式即可；

【详解】 $x<0$ 时， $\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0$ 即 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\>0$ ，

$\therefore g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单增，

又 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 为偶函数，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减，

$g(1)=f(1)=0$ ，故 $g(-1)=g(1)=0$ ，

所以 $x<-1$ 或 $x>1$ 时 $g(x)<0$ ，当 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$ 时 $g(x)>0$ ，

当 $x>1$ 时， $(x-1)\cdot f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow g(x)>0$ ， $x\in\emptyset$ ；

当 $x<1$ 时， $(x-1)\cdot f(x)>0\Leftrightarrow f(x)<0$ ，若 $0<x<1$ 则 $g(x)<0$ ， $x\in\emptyset$ ，

若 $x<0$ 则 $g(x)>0$ ， $-1<x<0$ ，

若 $x=0$ 则 $f(0)=0$ ， $(x-1)f(x)=0$ ，不符合题意；

综上， $x\in(-1,0)$ ，

故选：A.

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-5,0)\cup(0,5)$ 的偶函数，当 $x>0$ 时， $xf'(x)-2f(x)<0$ ，且

$f(2)=0$ ，则 $(x-1)f(x)>0$ 的解集为（ ）

A. $(-5,-2)\cup(1,2)$

B. $(-2,-1)\cup(2,5)$

C. $(-5,-2)\cup(2,5)$

D. $(-2,0)\cup(0,2)$

【答案】A

【分析】构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ ，利用导数，结合题目所给条件可得 $g(x)$ 单调性及其奇偶性，

再利用 $f(2)=0$ ，可得 $g(2)=0$ ，则可得 $f(x)<0$ 及 $f(x)>0$ 时的 x 的取值范围，再分

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x-1 > 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} f(x) < 0 \\ x-1 < 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases} \text{ 计算即可得解.}$$

【详解】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x^2 - f(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$ ，

由 $x > 0$ 时， $xf'(x) - 2f(x) < 0$ ，故 $g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} < 0$ ，

即 $g(x)$ 在 $(0, 5)$ 上单调递减，又 $f(x)$ 为偶函数，则 $g(-x) = \frac{f(-x)}{(-x)^2} = \frac{f(x)}{x^2} = g(x)$ ，

则 $g(x)$ 也是定义在 $(-5, 0) \cup (0, 5)$ 的偶函数，

由 $f(2) = 0$ ，则 $g(2) = \frac{f(2)}{4} = 0$ ，

则当 $x \in (-5, -2) \cup (2, 5)$ 时， $g(x) < 0$ ，且 $f(x) < 0$ ，

当 $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ 时， $g(x) > 0$ ，且 $f(x) > 0$ ，

令 $(x-1)f(x) > 0$ ，则有 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ x-1 > 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ x-1 < 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ ，

对 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ x-1 > 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ ，解得 $1 < x < 2$ ；对 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ x-1 < 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ ，解得 $-5 < x < -2$ ，

故 $(x-1)f(x) > 0$ 的解集为 $(-5, -2) \cup (1, 2)$ 。

故选：A.

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ， $f(1) = -1$ ，其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) - 2f(x) > 0$ ，则

不等式 $f(x+2026) + (x+2026)^2 < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -2025)$ B. $(0, 2025)$ C. $(-2026, +\infty)$ D. $(-2026, -2025)$

【答案】D

【分析】构造函数根据导数判断单调性，结合单调性求解不等式即可。

【详解】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ($x > 0$)，则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} > 0$ ，所以 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

则原不等式等价于 $\frac{f(x+2026)}{(x+2026)^2} < -1$ ，因为 $f(1) = -1$ ，所以 $g(1) = \frac{f(1)}{1^2} = -1$ ，

故 $g(x+2026) = \frac{f(x+2026)}{(x+2026)^2} < -1 = g(1)$, 所以 $0 < x+2026 < 1$,

解得 $-2026 < x < -2025$, 所以不等式 $f(x+2026) + (x+2026)^2 < 0$ 的解集为 $(-2026, -2025)$.

故选: D

6. 奇函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, 其导函数是 $f'(x)$. 当 $0 < x < \pi$ 时, 有

$f'(x)\sin x - f(x)\cos x < 0$, 则关于 x 的不等式 $f(x) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$ 的解集为 ()

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

B. $\left(-\pi, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

C. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

D. $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

【答案】D

【分析】根据题意构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, 进而根据导数研究函数单调性, 利用单调性求解不等式即可.

【详解】解: 令 $F(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$, 因为当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $f'(x)\sin x - f(x)\cos x < 0$,

所以, 当 $0 < x < \pi$ 时, $F'(x) = \frac{f'(x)\sin x - f(x)\cos x}{\sin^2 x} < 0$,

所以, 函数 $F(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ 在 $(0, \pi)$ 内为单调递减函数,

所以, 当 $0 < x < \pi$ 时, 关于 x 的不等式 $f(x) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$ 可化为 $\frac{f(x)}{\sin x} < \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}}$, 即

$$F(x) < F\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

所以 $\pi > x > \frac{\pi}{4}$;

当 $-\pi < x < 0$ 时, $0 < -x < \pi$, 则关于 x 的不等式 $f(x) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$ 可化为 $\frac{f(x)}{\sin x} > \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}}$,

$$\text{即 } \frac{-f(x)}{\sin(-x)} > \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

因为函数 $f(x)$ 为奇函数, 故 $\frac{f(-x)}{\sin(-x)} > \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin \frac{\pi}{4}}$, 也即 $F(-x) > F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

所以 $-x < \frac{\pi}{4}$, 即 $x > -\frac{\pi}{4}$,

所以, $-\frac{\pi}{4} < x < 0$.

综上, 原不等式的解集 $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (\frac{\pi}{4}, \pi)$.

故选: D.

7. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$, 且

$f(2) = -3$, 则不等式 $f(2x-1) < \frac{-6}{2x-1}$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ B. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ D. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

【答案】A

【分析】根据 $f'(x) + \frac{f(x)}{x} < 0$ 可变形为 $\frac{xf'(x) + f(x)}{x} < 0$, 构造函数 $F(x) = xf(x)$, 判断其奇偶性、单调性, 结合函数性质解不等式即可.

【详解】当 $x > 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{xf'(x) + f(x)}{x} < 0$,

所以当 $x > 0$ 时, $xf'(x) + f(x) < 0$,

令 $F(x) = xf(x)$, 则当 $x > 0$ 时, $F'(x) = xf'(x) + f(x) < 0$,

故 $F(x) = xf(x)$ 在 $x > 0$ 时, 单调递减,

又因为 $y = f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为偶函数, 所以 $F(x) = xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为奇函数,

故 $F(x) = xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 因为 $f(2) = -3$, 所以 $F(2) = 2f(2) = -6$,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(2x-1) < \frac{-6}{2x-1}$ 可变形为 $(2x-1)f(2x-1) < -6$, 即 $F(2x-1) < F(2)$,

因为 $F(x) = xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 所以 $2x-1 > 2$ 且 $x > \frac{1}{2}$, 得 $x > \frac{3}{2}$;

当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $f(2x-1) < \frac{-6}{2x-1}$ 可变形为 $(2x-1)f(2x-1) > -6$, 即 $F(2x-1) > F(2)$,

因为 $F(x) = xf(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 所以 $2x-1 < 2$ 且 $x < \frac{1}{2}$, 得 $x < \frac{1}{2}$;

综上: 不等式 $f(2x-1) < \frac{-6}{2x-1}$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$.

故选: A.

8. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 当 $x \leq 0$ 时, 满足

$(x^2+3)f'(x)+2xf(-x)>0$ ，则不等式 $\frac{f(x)}{x^2+3} \geq \frac{f(2x+1)}{4(x^2+x+1)}$ 的解集为 ()

A. $[1, +\infty)$

B. $(-\infty, 0)$

C. $(-\infty, -1]$

D. $(0, +\infty)$

【答案】C

【分析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+3}$ ，易得函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，根据已知可得函数 $g(x)$

在 $(-\infty, 0]$ 上的单调性，进而得出函数在 $\mathbf{R}$ 的单调性，从而可得出答案.

【详解】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+3}$ ，

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$ ，

$$\text{则 } g(-x) = \frac{f(-x)}{x^2+3} = -\frac{f(x)}{x^2+3} = -g(x),$$

所以函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

当 $x \leq 0$ 时， $(x^2+3)f'(x)+2xf(-x)>0$ ，即 $(x^2+3)f'(x)-2xf(x)>0$ ，

$$\text{则 } g'(x) = \frac{(x^2+3)f'(x)-2xf(x)}{(x^2+3)^2} > 0,$$

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，

又因为函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

$$\text{则不等式 } \frac{f(x)}{x^2+3} \geq \frac{f(2x+1)}{4(x^2+x+1)} = \frac{f(2x+1)}{(2x+1)^2+3},$$

等价于 $g(x) \geq g(2x+1)$ ，

所以 $x \geq 2x+1$ ，解得 $x \leq -1$ ，

$$\text{所以不等式 } \frac{f(x)}{x^2+3} \geq \frac{f(2x+1)}{4(x^2+x+1)} \text{ 的解集为 } (-\infty, -1].$$

故选：C.

9. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 的导函数记作 $f'(x)$ ，满足 $f'(x)-f(x)>3e^x$ ， $f(2)=6e^2$ ，则不

等式 $f(x)>3xe^x$ 的解集为 ()

A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 3)$ **【答案】** A

【分析】 根据条件构造函数 $G(x) = \frac{f(x)}{e^x} - 3x$ ，利用导数判断单调性，由单调性求解不等式即可.

【详解】 令 $G(x) = \frac{f(x)}{e^x} - 3x$,

$$\text{则 } G'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} - 3 > \frac{3e^x}{e^x} - 3 = 0,$$

所以函数 $G(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

$$\text{又 } G(2) = \frac{f(2)}{e^2} - 3 \times 2 = 0,$$

由 $f(x) > 3xe^x$ 可得 $\frac{f(x)}{e^x} - 3x > 0$, 即 $G(x) > G(2)$,

所以 $x > 2$.

故选: A

10. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x > 0$, 都有 $f'(x) > \frac{2}{x}$, 且 $f(e) = 3$, 则不等式 $f(x) > 2\ln x + 1$ 的解集为 ()

A. $(e, +\infty)$ B. $(2e, +\infty)$ C. $(0, e)$ D. $(0, 2e)$ **【答案】** A

【分析】 构造函数 $g(x) = f(x) - 2\ln x$, 易证 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(e) = 1$, 则不等式 $f(x) > 2\ln x + 1$ 等价于 $g(x) > g(e)$, 即 $x > e$.

【详解】 令 $g(x) = f(x) - 2\ln x$,

$$\text{则 } g'(x) = f'(x) - \frac{2}{x} > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$g(e) = f(e) - 2\ln e = 1,$$

$$f(x) > 2\ln x + 1 \text{ 等价于 } f(x) - 2\ln x > 1,$$

$$\text{即 } g(x) > g(e),$$

$$\text{即 } x > e,$$

所以不等式 $f(x) > 2\ln x + 1$ 的解集为 $(e, +\infty)$.

故选：A.

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 且 $f(1)=1$, 导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > f(x)$ 恒成立, 则不等式 $f(x) < e^{x-1}$ 的解集为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ D. $(0, 1)$

【答案】D

【分析】 $f(x) < e^{x-1}$ 等价于 $\frac{f(x)}{e^x} < \frac{1}{e}$, 构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 对其求导结合已知条件可判断 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 所要解的不等式等价于 $F(x) < F(1)$, 根据单调性即可求解.

【详解】令 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $F'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - e^x \cdot f(x)}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

因为导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > f(x)$ 恒成立且 $e^x > 0$,

所以 $F'(x) > 0$, 所以 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

因为 $F(1) = \frac{f(1)}{e} = \frac{1}{e}$, 所以不等式 $\frac{f(x)}{e^x} < \frac{1}{e}$ 等价于 $F(x) < F(1)$,

因为所以 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 所以 $x < 1$,

所以不等式 $f(x) < e^{x-1}$ 的解集为 $(0, 1)$,

故选：D

12. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在导函数 $f'(x)$, 对任意的实数 x 都有 $f'(x) + 1 < 2x$, 若

$f(m+1) \leq f(-2m) - 3m^2 - m$. 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[-2, +\infty)$

【答案】A

【分析】引入新函数, 利用导数确定单调性, 然后不等式转化为关于新函数的不等式, 利用单调性解不等式.

【详解】设 $g(x) = f(x) + x - x^2$, 则 $g'(x) = f'(x) + 1 - 2x < 0$, 所以 $g(x)$ 是减函数,

不等式 $f(m+1) \leq f(-2m) - 3m^2 - m$ 即为 $g(m+1) \leq g(-2m)$,

所以 $m+1 \geq -2m$, $m \geq -\frac{1}{3}$.

故选：A.