

指对幂练习

一、单选题

1. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$, $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2} < 1$, 且 $f(1)=1$, 则不等式 $f(\log_3 x) < (\log_3 x)^2$ 的解集为 ()

A. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

D. $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$, 满足对任意不相等的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ 成立,

则 a 的取值范围为 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $[4, 8)$

C. $(0, 1) \cup (8, +\infty)$

D. $[4, +\infty)$

3. 已知函数 $f(x) = \log_2 x + \sqrt{x}$ 的零点为 x_0 , 则 x_0 所在的区间为 ()

A. $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

D. $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

4. 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点所在区间为 ()

A. $(1, 2)$

B. $(2, 3)$

C. $(3, 4)$

D. $(4, 5)$

二、填空题

5. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$ 的单调递增区间为_____.

6. 若函数 $f(x) = a^{x^2-x+1}$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 则函数 $y = \log_a(x^2 - 2x)$ 的单调递增区间是_____.

7. 已知 $f(x) = \log_2(4x) \cdot \log_2(2x)$, $\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 1\right)$ 的值域为 $[m, n]$, 则 $n =$ _____, 函数

$g(x) = \begin{cases} x^2 + 16mx + n(x < 1) \\ \log_a x(x \geq 1) \end{cases}$, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

9. 若函数 $y = \lg(x^2 + ax + 2)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是_____.

10. 有下列命题:

①当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $f(x) = a^{x-2} - 3$ 必过定点 $(2, -2)$;

②不等式 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围为 $(-3, 0)$;

③函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 + x - 1$. 则当 $x < 0$ 时,

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

④已知 $2^a = 3^b = k (k \neq 1)$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$, 则实数 $k = 8$.

其中正确命题的序号为_____ (把正确的答案都填上).

三、解答题

11. 已知实数 a 满足不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2a+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{5a-2}$.

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求不等式 $\log_a(x+1) \leq \log_a(7-2x)$ 的解集 A ;

(3) 若当 $x \in A$ 时, 不等式 $4\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \geq m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

12. 设 $f(x) = \log_a(1+x) + \log_a(3-x) (a > 0, a \neq 1)$, 且 $f(1) = -2$.

(1) 求 a 的值及 $f(x)$ 的定义域.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值.

(3) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

13. 已知函数 $f(x) = (\log_2 x - 2) \log_4(2x)$.

(1) 当 $x \in [1, 64]$ 时, 求该函数的值域;

(2)若 $f(x) \leq m \log_4 x$ 对于 $x \in [4, 16]$ 恒成立, 求 m 的最小值.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - 1}$ 为奇函数.

(1)求实数 a 的值;

(2)求关于 x 的不等式 $f(x) \geq 3$ 的解集;

(3)函数 $g(x) = \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{4} + m$, 若对任意的 $x_1 \in (0, 1]$, 存在 $x_2 \in [2, 8]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

15. 若函数 $f(x) = (m^2 + m - 1)x^{m^2 + 2m - 2}$ 为幂函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

(1)求实数 m 的值;

(2)设函数 $g(x) = f^2(x) - 2kf(x)$, 是否存在实数 k , 使得当 $x \in [-1, 1]$ 时 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 若存在, 求 k 的取值范围, 若不存在, 说明理由.