

## 指对幂练习

### 一、单选题

1. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(-x)=f(x)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 都有

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2} < 1$ , 且  $f(1)=1$ , 则不等式  $f(\log_3 x) < (\log_3 x)^2$  的解集为 ( )

A.  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

B.  $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

C.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

D.  $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$

【答案】D

【知识点】根据函数的单调性解不等式、由函数奇偶性解不等式、由对数函数的单调性解不等式

【分析】构造函数  $g(x) = f(x) - x^2$ , 分析可知函数  $g(x)$  为偶函数, 且函数  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为减函数, 将所求不等式变形为  $g(|\log_3 x|) < g(1)$ , 可得出关于  $x$  的不等式, 结合对数函数的单调性可解出  $x$  的取值范围, 即为所求.

【详解】 $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 都有  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2} < 1$ ,

不妨设  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1^2 < x_2^2$ , 所以  $f(x_1) - f(x_2) > x_1^2 - x_2^2$ , 即  $f(x_1) - x_1^2 > f(x_2) - x_2^2$ ,

令  $g(x) = f(x) - x^2$ , 则  $g(x_1) > g(x_2)$ , 即函数  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为减函数,

又因为定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(-x) = f(x)$ , 则函数  $g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,

且  $g(-x) = f(-x) - (-x)^2 = f(x) - x^2 = g(x)$ , 故函数  $g(x)$  为偶函数,

因为  $f(1)=1$ , 则  $g(1) = f(1) - 1^2 = 0$ ,

由  $f(\log_3 x) < (\log_3 x)^2$  可得  $f(\log_3 x) - (\log_3 x)^2 < 0$ , 即  $g(\log_3 x) < 0$ ,

所以  $g(|\log_3 x|) < g(1)$ , 所以  $|\log_3 x| > 1$ , 所以  $\log_3 x < -1$  或  $\log_3 x > 1$ , 解得  $0 < x < \frac{1}{3}$  或  $x > 3$ ,

因此不等式  $f(\log_3 x) < (\log_3 x)^2$  的解集为  $\left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$ .

故选: D.

2. 函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ , 满足对任意不相等的  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$  成立,

则  $a$  的取值范围为 ( )

A.  $(1, +\infty)$

B.  $[4, 8)$

C.  $(0, 1) \cup (8, +\infty)$

D.  $[4, +\infty)$

【答案】B

【知识点】定义法判断或证明函数的单调性、根据分段函数的单调性求参数、由指数（型）的单调性求参数

【分析】根据题意可判断函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上严格单调递增，然后根据一次函数和指数函数的单调性列出不等式，求出解集即可.

【详解】因为函数对任意不相等的  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 都有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上严格单调递增.

$$\text{因为 } f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}, \text{ 则有 } \begin{cases} a > 1 \\ 4 - \frac{a}{2} > 0 \\ 4 - \frac{a}{2} + 2 \leq a \end{cases}.$$

解得  $4 \leq a < 8$ .

故选：B.

3. 已知函数  $f(x) = \log_2 x + \sqrt{x}$  的零点为  $x_0$ , 则  $x_0$  所在的区间为 ( )

A.  $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

B.  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

C.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

D.  $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

【答案】C

【知识点】判断零点所在的区间、对数函数单调性的应用

【分析】先确定函数的定义域与单调性，再计算目标区间端点的函数值，结合单调性与零点存在性确定零点所在区间.

【详解】函数  $f(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $y = \log_2 x$  与  $y = \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  均单调递增,

故  $f(x) = \log_2 x + \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  单调递增.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 < 0;$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \log_2 \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \log_2 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2,$$

因  $\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = 1.5$  且  $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0.8$ , 故  $\log_2 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 > 0$ .

由函数  $f(x)$  单调递增且  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ 、 $f\left(\frac{3}{4}\right) > 0$ , 得零点  $x_0$  所在区间为  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ .

故选: C.

4. 函数  $f(x) = \ln x + 2x - 6$  的零点所在区间为 ( )

A. (1,2)

B. (2,3)

C. (3,4)

D. (4,5)

**【答案】** B

**【知识点】** 判断零点所在的区间、对数函数单调性的应用、根据解析式直接判断函数的单调性

**【分析】** 判断出函数的单调性, 结合零点存在定理即可判断出答案.

**【详解】** 由解析式知, 函数  $f(x) = \ln x + 2x - 6$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{又 } f(2) = \ln 2 - 2 < 0 < f(3) = \ln 3,$$

故函数  $f(x) = \ln x + 2x - 6$  的零点所在区间为  $(2, 3)$ .

故选: B

## 二、填空题

5. 函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$  的单调递增区间为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $(-\infty, 1)$

**【知识点】** 求对数型复合函数的定义域、对数型复合函数的单调性

**【分析】** 根据对数函数的定义域以及复合函数的单调性即可求解.

**【详解】** 令  $x^2 - 3x + 2 > 0$ , 解得  $x > 2$  或  $x < 1$ , 即函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$  的定义域为  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ ,

设  $u = x^2 - 3x + 2$  则  $y = \log_{\frac{1}{2}} u$ , 而  $y = \log_{\frac{1}{2}} u$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

对于函数  $u = x^2 - 3x + 2$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减，在  $(2, +\infty)$  上单调递增，

由复合函数的单调性，可得函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2)$  的单调递增区间为  $(-\infty, 1)$ 。

故答案为：  $(-\infty, 1)$

6. 若函数  $f(x) = a^{x^2-x+1}$  在  $(1, 3)$  上单调递减，则函数  $y = \log_a(x^2 - 2x)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_。

【答案】  $(-\infty, 0)$

【知识点】对数型复合函数的单调性、判断指数型复合函数的单调性、求对数型复合函数的定义域

【分析】函数  $f(x) = a^{x^2-x+1}$  在  $(1, 3)$  上递减，利用复合函数的单调性可得  $a$  的取值范围，进而可判断函数  $y = \log_a(x^2 - 2x)$  单调递增区间。

【详解】设  $t = x^2 - x + 1$ ，  $x \in (1, 3)$ ，  $y = a^t$ ，

因为函数  $t = x^2 - x + 1$  在  $(1, 3)$  上单调递增，

函数  $f(x) = a^{x^2-x+1}$  在  $(1, 3)$  上单调递减，

所以  $y = a^t$  在  $(1, 3)$  上递减，所以  $0 < a < 1$ ，

函数  $y = \log_a(x^2 - 2x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ，

令  $\mu = x^2 - 2x$ ，则  $y = \log_a \mu$ ，

因为函数  $y = \log_a \mu$  为减函数，

所以函数  $y = \log_a(x^2 - 2x)$  的单调递增区间，即  $\mu = x^2 - 2x$  的单调递减区间，

函数  $\mu = x^2 - 2x$  的单调递减区间为  $(-\infty, 1)$ ，结合函数定义域为  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ，

所以函数  $y = \log_a(x^2 - 2x)$  单调递增区间为  $(-\infty, 0)$

故答案为：  $(-\infty, 0)$

7. 已知  $f(x) = \log_2(4x) \cdot \log_2(2x)$ ，  $\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 1\right)$  的值域为  $[m, n]$ ，则  $n =$  \_\_\_\_\_，函数

$g(x) = \begin{cases} x^2 + 16ax + n & (x < 1) \\ \log_a x & (x \geq 1) \end{cases}$ , 在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

【答案】 2  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

【知识点】求对数型复合函数的值域、根据分段函数的单调性求参数、与二次函数相关的复合函数问题

【分析】令  $t = \log_2 x, t \in [-2, 0]$ , 则  $h(t) = t^2 + 3t + 2, t \in [-2, 0]$ , 根据二次函数性质可得函数

$f(x)$  的值域; 进而可得函数  $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4ax + 2 & (x < 1) \\ \log_a x & (x \geq 1) \end{cases}$ , 由函数单调性结合二次函数性质及

对数函数性质计算可得实数  $a$  的取值范围.

【详解】因为

$$f(x) = \log_2(4x) \cdot \log_2(2x) = (\log_2 4 + \log_2 x)(\log_2 2 + \log_2 x) = (2 + \log_2 x)(1 + \log_2 x)$$

$$\text{令 } t = \log_2 x, t \in [-2, 0], \text{ 则 } h(t) = (2+t)(1+t) = t^2 + 3t + 2, t \in [-2, 0],$$

由二次函数性质可知, 函数  $h(t)$  在区间  $\left[-2, -\frac{3}{2}\right]$  上单调递减, 在区间  $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$  上单调递增,

$$\text{因为 } h(-2) = 0, h(0) = 2,$$

$$\text{所以 } h(t)_{\min} = h\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}, h(t)_{\max} = h(0) = 2,$$

所以函数  $h(t)$  的值域为  $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$ , 即函数  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{1}{4}, 2\right]$ , 故  $n = 2, m = -\frac{1}{4}$ ,

$$\text{所以函数 } g(x) = \begin{cases} x^2 - 4ax + 2 & (x < 1) \\ \log_a x & (x \geq 1) \end{cases}$$

由题意可知函数  $g(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数,

当  $x < 1$  时,  $y = x^2 - 4ax + 2$ , 二次函数的对称轴为  $x = 2a$ , 在对称轴左侧单调递减,

$$\therefore 2a \geq 1, \text{ 解得 } a \geq \frac{1}{2};$$

当  $x \geq 1$  时,  $y = \log_a x$ , 在  $0 < a < 1$  时单调递减;

$$\text{又 } 1^2 - 4a + 2 \geq \log_a 1, \text{ 即 } a \leq \frac{3}{4};$$

综上, 实数  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ .

故答案为：2； $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ .

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】 $[4, 8)$

【知识点】根据分段函数的单调性求参数、由指数（型）的单调性求参数、一次函数的图像和性质

【分析】根据分段函数定义，利用一次函数和指数函数单调性，限定端点处的取值列出不等式组即可解出  $a$  的取值范围.

【详解】因为函数  $f(x) = \begin{cases} a^x, & x > 1 \\ \left(4 - \frac{a}{2}\right)x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数，

所以得不等式组： 
$$\begin{cases} a > 1 \\ 4 - \frac{a}{2} > 0 \\ a \geq \left(4 - \frac{a}{2}\right) \times 1 + 2 \end{cases}, \text{ 解得 } 4 \leq a < 8.$$

故答案为： $[4, 8)$ .

9. 若函数  $y = \lg(x^2 + ax + 2)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递减，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】 $-3 \leq a \leq -2$

【知识点】对数型复合函数的单调性、由对数（型）的单调性求参数

【分析】根据对数复合函数的区间单调性，结合二次函数、对数函数的性质列不等式求参数范围.

【详解】令  $t(x) = x^2 + ax + 2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 2 - \frac{a^2}{4}$ ，其图象开口向上且对称轴为  $x = -\frac{a}{2}$ ，

所以  $t(x)$  在  $(-\infty, -\frac{a}{2})$  上单调递减，在  $(-\frac{a}{2}, +\infty)$  上单调递增，

而  $y = \lg(x^2 + ax + 2)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递减，且  $y = \lg x$  在定义域上单调递增，

所以  $(0, 1)$  是  $(-\infty, -\frac{a}{2})$  的一个子区间，且  $t(1) \geq 0$ ，即 
$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1 \\ a + 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq a \leq -2,$$

所以  $-3 \leq a \leq -2$ .

故答案为:  $-3 \leq a \leq -2$

10. 有下列命题:

①当  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$  时, 函数  $f(x) = a^{x-2} - 3$  必过定点  $(2, -2)$ ;

②不等式  $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $k$  的取值范围为  $(-3, 0)$ ;

③函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 + x - 1$ . 则当  $x < 0$  时,

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

④已知  $2^a = 3^b = k (k \neq 1)$ , 且  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ , 则实数  $k = 8$ .

其中正确命题的序号为\_\_\_\_\_ (把正确的答案都填上).

【答案】①③

【知识点】指数型函数图象过定点问题、一元二次不等式在实数集上恒成立问题、由奇偶性求函数解析式、运用换底公式化简计算

【分析】根据指数型函数图象恒过定点判断①; 对不等式的二次项系数分类讨论, 分别求得满足条件的集合, 即可求得  $k$  的取值范围, 即可判断②; 利用函数的奇偶性求解析式即可判断③; 根据对数的运算性质计算即可判断④.

【详解】对于①, 因为  $f(x) = a^{x-2} - 3$ , 所以令  $x - 2 = 0$ , 即  $x = 2$ ,

则  $f(2) = a^{2-2} - 3 = -2$ , 故  $f(x)$  过定点  $(2, -2)$ , 故①正确;

对于②, 当  $k = 0$  时,  $-\frac{3}{8} < 0$  满足题意,

当  $k > 0$  时, 函数  $y = 2kx^2 + kx - \frac{3}{8}$  开口向上,  $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$  解集为  $\mathbf{R}$  不成立,

当  $k < 0$  时, 若  $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$  解集为  $\mathbf{R}$ , 则  $\Delta = k^2 - 4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0$ , 解得  $-3 < k < 0$ ,

综上若不等式  $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $k$  的取值范围为  $(-3, 0]$ , 故②错误;

对于③, 函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x)$$

又当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 + x - 1$ ,

当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ ,  $f(-x) = x^2 - x - 1$ ,

$\therefore f(x) = x^2 - x - 1$ , 即当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^2 - x - 1$ , 故③正确;

对于④, 因为  $2^a = 3^b = k (k \neq 1)$ , 所以  $a = \log_2 k, b = \log_3 k$ ,

所以  $\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 k} = \log_k 2, \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_3 k} = \log_k 3$ ,

故由  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$  得  $\log_k 2 + 2 \log_k 3 = 1$ , 即  $\log_k (2 \times 3^2) = 1$ , 即  $\log_k 18 = 1$ ,

所以  $k = 18$ , 故④错误.

故答案为: ①③

### 三、解答题

11. 已知实数  $a$  满足不等式  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2a+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{5a-2}$ .

(1) 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 求不等式  $\log_a (x+1) \leq \log_a (7-2x)$  的解集  $A$ ;

(3) 若当  $x \in A$  时, 不等式  $4\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \geq m$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $(1, +\infty)$

(2)  $A = (-1, 2]$

(3)  $(-\infty, 1]$

**【知识点】** 由指数函数的单调性解不等式、由对数函数的单调性解不等式、一元二次不等式在某区间上的恒成立问题

**【分析】** (1) 由指数函数单调性性质即可求解;

(2) 由对数函数的单调性即可求解;

(3) 令  $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , 将题设不等式恒成立问题转化成一元二次不等式恒成立问题即可求解.

**【详解】** (1) 因为函数  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

又  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2a+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{5a-2}$ , 所以  $5a-2 > 2a+1 \Rightarrow a > 1$ ,

所以实数  $a$  的取值范围为  $(1, +\infty)$ .

(2) 由 (1) 可知函数  $y = \log_a x$  为增函数, 又  $\log_a (x+1) \leq \log_a (7-2x)$ ,

所以  $7-2x \geq x+1 > 0 \Rightarrow -1 < x \leq 2$ .

所以不等式  $\log_a (x+1) \leq \log_a (7-2x)$  的解集  $A = (-1, 2]$ .

(3) 当  $x \in A$  时, 不等式  $4\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \geq m$  恒成立,

令  $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , 则  $t \in \left[\frac{1}{4}, 2\right)$ ,

所以  $4t^2 - 4t + 2 \geq m$  在  $t \in \left[\frac{1}{4}, 2\right)$  上恒成立,

所以当  $t \in \left[\frac{1}{4}, 2\right)$  时  $y = 4t^2 - 4t + 2 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1$ , 当且仅当  $t = \frac{1}{2}$  即  $x = 1$  时等号成立,

所以  $m \leq 1$ , 即实数  $m$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$ .

12. 设  $f(x) = \log_a (1+x) + \log_a (3-x) (a > 0, a \neq 1)$ , 且  $f(1) = -2$ .

(1) 求  $a$  的值及  $f(x)$  的定义域.

(2) 求  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  上的最大值.

(3) 求函数  $f(x)$  的单调区间.

**【答案】** (1)  $a = \frac{1}{2}$ ,  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 3)$ ;

(2)  $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ;

(3)  $f(x)$  的减区间为  $(-1, 1)$ , 增区间为  $[1, 3)$ .

**【知识点】** 对数的运算、求对数型复合函数的定义域、求对数型复合函数的值域、对数型复合函数的单调性

**【分析】** (1) 根据  $f(1) = -2$  结合对数的运算可求  $a$  的值, 根据真数为正数可求函数的定义域;

(2) 利用换元法结合二次函数的性质可求  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  上的最大值;

(3) 利用同增异减结合二次函数的单调性可求  $f(x)$  的单调区间.

【详解】(1)  $f(1) = \log_a 2 + \log_a 2 = 2\log_a 2 = -2$ , 故  $a = \frac{1}{2}$ .

此时  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$ , 故  $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$ , 即  $-1 < x < 3$ ,

故  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 3)$ .

(2) 因为  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1+x) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$ , 故  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(3+2x-x^2)$ ,

设  $t = 3+2x-x^2 = -(x-1)^2 + 4$ ,

当  $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ , 则  $3 \leq t \leq 4$ , 故  $-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4 \leq f(x) \leq \log_{\frac{1}{2}} 3$ ,

故  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  上的最大值为  $\log_{\frac{1}{2}} 3$ .

(3) 同 (2) 设  $t = 3+2x-x^2 = -(x-1)^2 + 4$ , 其中  $x \in (-1, 3)$ ,

故  $t = -(x-1)^2 + 4$  在  $(-1, 1)$  上为增函数, 此时  $t \in (0, 4)$ ;

在  $[1, 3)$  上为减函数, 此时  $t \in (0, 4]$ ,

而  $y = \log_{\frac{1}{2}} t$  在  $(0, 4]$  上为减函数,

故  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为减函数, 在  $[1, 3)$  上为增函数,

故  $f(x)$  的减区间为  $(-1, 1)$ , 增区间为  $[1, 3)$ .

13. 已知函数  $f(x) = (\log_2 x - 2)\log_4(2x)$ .

(1) 当  $x \in [1, 64]$  时, 求该函数的值域;

(2) 若  $f(x) \leq m\log_4 x$  对于  $x \in [4, 16]$  恒成立, 求  $m$  的最小值.

【答案】(1)  $\left[-\frac{9}{8}, 14\right]$

(2)  $\frac{5}{2}$

【知识点】利用函数单调性求最值或值域、一元二次不等式在某区间上的恒成立问题、求对数函数在区间上的值域

【分析】(1) 利用换元法将对数函数转化为二次函数, 再利用二次函数的单调性求值域即可.

(2) 将不等式恒成立问题转化为最值问题, 结合函数单调性求出最值即可.

【详解】(1) 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ .

$$f(x) = (\log_2 x - 2) \log_4 (2x) = (2\log_4 x - 2)(\log_4 2 + \log_4 x)$$

$$= (2\log_4 x - 2) \left( \frac{1}{2} + \log_4 x \right) = 2(\log_4 x)^2 - \log_4 x - 1.$$

$$\text{令 } t = \log_4 x, \text{ 则 } f(x) = g(t) = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}, \text{ 当 } x \in [1, 64] \text{ 时, } t \in [0, 3],$$

$$\text{所以当 } t = \frac{1}{4} \text{ 时, } f(x)_{\min} = g(t)_{\min} = g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8},$$

$$\text{当 } t = 3 \text{ 时, } f(x)_{\max} = g(t)_{\max} = g(3) = 2 \times \left(3 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} = 14,$$

$$\text{所以当 } x \in [1, 64] \text{ 时, 该函数的值域为 } \left[-\frac{9}{8}, 14\right].$$

$$(2) \text{ 当 } x \in [4, 16] \text{ 时, } t = \log_4 x \in [1, 2],$$

$$\text{原不等式可化为 } 2t^2 - t - 1 \leq mt, \text{ 即 } m \geq \frac{2t^2 - t - 1}{t} = 2t - \frac{1}{t} - 1 \text{ 对 } t \in [1, 2] \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } h(t) = 2t - \frac{1}{t} - 1, \quad t \in [1, 2].$$

$$\text{任取 } 1 \leq t_1 < t_2 \leq 2, \text{ 则 } t_2 - t_1 > 0, \quad t_1 t_2 > 0$$

$$\text{所以 } h(t_2) - h(t_1) = \left(2t_2 - \frac{1}{t_2} - 1\right) - \left(2t_1 - \frac{1}{t_1} - 1\right) = 2(t_2 - t_1) + \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2},$$

$$= (t_2 - t_1) \left(2 + \frac{1}{t_1 t_2}\right) > 0,$$

$$\text{则 } h(t) \text{ 在 } t \in [1, 2] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } h(t)_{\max} = h(2) = 2 \times 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{故 } m \geq \frac{5}{2}, \text{ 即 } m \text{ 的最小值为 } \frac{5}{2}.$$

$$14. \text{ 已知函数 } f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - 1} \text{ 为奇函数.}$$

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 求关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq 3$  的解集;

(3) 函数  $g(x) = \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{4} + m$ , 若对任意的  $x_1 \in (0, 1]$ , 存在  $x_2 \in [2, 8]$ , 使得  $f(x_1) \geq g(x_2)$  成立, 求实数  $m$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $a = 1$

(2)(0,1]

(3) $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$

【知识点】函数不等式恒成立问题、函数不等式能成立（有解）问题、由奇偶性求参数、由指数函数的单调性解不等式

【分析】（1）根据奇函数的性质，结合指数的运算性质进行求解即可；

（2）根据指数函数的单调性分类讨论进行求解即可；

（3）利用对数函数的单调性和对数的运算性质，结合指数函数的单调性、任意性、存在性的定义进行求解即可。

【详解】（1）由函数  $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - 1}$  的解析式可知  $2^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ ，

所以该函数的定义域为全体非零实数。

因为函数  $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - 1}$  为奇函数，

$$\text{所以 } f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow \frac{2^x + a}{2^x - 1} + \frac{2^{-x} + a}{2^{-x} - 1} = 0 \Rightarrow \frac{2^x + a}{2^x - 1} + \frac{1 + a \cdot 2^x}{1 - 2^x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2^x - 1)(1 - a)}{2^x - 1} = 0,$$

因为  $x \neq 0$ ，

所以  $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$ ；

$$(2) f(x) \geq 3 \Rightarrow f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1} \geq 3,$$

当  $x > 0$  时， $2^x > 1$ ，所以由  $\frac{2^x + 1}{2^x - 1} \geq 3 \Rightarrow 2^x + 1 \geq 3(2^x - 1) \Rightarrow 2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$ ，

而  $x > 0$ ，所以  $0 < x \leq 1$ ，

当  $x < 0$  时， $2^x < 1$ ，所以由  $\frac{2^x + 1}{2^x - 1} \geq 3 \Rightarrow 2^x + 1 \leq 3(2^x - 1) \Rightarrow 2^x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$ ，

而  $x < 0$ ，所以  $x \in \emptyset$ ，

综上所述：原不等式的解集为  $(0, 1]$ ；

$$(3) f(x_1) = \frac{2^{x_1} + 1}{2^{x_1} - 1} = \frac{2^{x_1} - 1 + 2}{2^{x_1} - 1} = 1 + \frac{2}{2^{x_1} - 1},$$

当  $x_1 \in (0, 1]$  时，则有  $2^{x_1} \in (1, 2] \Rightarrow 2^{x_1} - 1 \in (0, 1] \Rightarrow \frac{2}{2^{x_1} - 1} \in [2, +\infty) \Rightarrow 1 + \frac{2}{2^{x_1} - 1} \in [3, +\infty)$ ，

即  $f(x_1)_{\min} = 3$ 。

$$g(x) = \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{4} + m = (\log_2 x - \log_2 2)(\log_2 x - \log_2 4) + m$$

$$= (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) + m = \left(\log_2 x - \frac{3}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4},$$

$$\text{当 } x_2 \in [2, 8] \text{ 时, } g(x_2) = \left(\log_2 x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4},$$

令  $\log_2 x_2 = t$ , 则  $t \in [1, 3]$ ,

$$\text{二次函数 } h(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + m - \frac{1}{4} \text{ 对称轴为 } t = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } h(t)_{\min} = h\left(\frac{3}{2}\right) = m - \frac{1}{4}, \text{ 即 } g(x_2)_{\min} = m - \frac{1}{4},$$

要想对任意的  $x_1 \in (0, 1]$ , 存在  $x_2 \in [2, 8]$ , 使得  $f(x_1) \geq g(x_2)$  成立,

$$\text{等价于 } g(x_2)_{\min} \leq f(x_1)_{\min} \Rightarrow m - \frac{1}{4} \leq 3 \Rightarrow m \leq \frac{13}{4},$$

所以实数  $m$  的取值范围为  $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right]$ .

15. 若函数  $f(x) = (m^2 + m - 1)x^{m^2 + 2m - 2}$  为幂函数, 且在  $(0, +\infty)$  单调递增.

(1) 求实数  $m$  的值;

(2) 设函数  $g(x) = f^2(x) - 2kf(x)$ , 是否存在实数  $k$ , 使得当  $x \in [-1, 1]$  时  $g(x) \geq 0$  恒成立, 若存在, 求  $k$  的取值范围, 若不存在, 说明理由.

**【答案】** (1)  $m = 1$

(2)  $k = 0$

**【知识点】** 根据函数是幂函数求参数值、一元二次不等式在某区间上的恒成立问题、由幂函数的单调性求参数

**【分析】** (1) 根据幂函数的定义和单调性求解即可;

(2) 由 (1) 得  $g(x)$  是一元二次函数, 利用一元二次函数的图象和性质分情况讨论即可.

**【详解】** (1) 因为函数  $f(x) = (m^2 + m - 1)x^{m^2 + 2m - 2}$  为幂函数, 且在  $(0, +\infty)$  单调递增,

$$\text{所以 } \begin{cases} m^2 + m - 1 = 1 \\ m^2 + 2m - 2 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m = 1.$$

(2) 由 (1) 得  $g(x) = x^2 - 2kx$ , 则  $g(x)$  是一元二次函数,

当  $x \in [-1, 1]$  时  $g(x) \geq 0$  恒成立，只需  $g(x)_{\min} \geq 0$  即可，

当  $-\frac{-2k}{2 \times 1} = k \leq -1$  时， $g(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调递增，

$$g(x)_{\min} = g(-1) = 1 + 2k \geq 0,$$

解得  $k \geq -\frac{1}{2}$ ，与  $k \leq -1$  矛盾，此时无解；

当  $-\frac{-2k}{2 \times 1} = k \in (-1, 1]$  时， $g(x)$  在  $[-1, k]$  单调递减，在  $[k, 1]$  单调递增，

$$g(x)_{\min} = g(k) = k^2 - 2k^2 \geq 0, \text{ 解得 } k = 0,$$

当  $-\frac{-2k}{2 \times 1} = k > 1$  时， $g(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调递减，

$$g(x)_{\min} = g(1) = 1 - 2k \geq 0,$$

解得  $k \leq \frac{1}{2}$ ，与  $k > 1$  矛盾，此时无解；

综上  $k = 0$ 。