

指对大题

1. 已知函数 $f(x) = \log_a(3+2x)$, $g(x) = \log_a(3-2x)$, ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) .

- (1) 求函数 $f(x) - g(x)$ 定义域 .
- (2) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明 .
- (3) 求使 $f(x) - g(x) > 0$ 的 x 的取值范围 .

【答案】 (1) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(2) 函数 $f(x) - g(x)$ 是奇函数, 证明见解析 .

(3) 当 $a > 1$ 时, $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$; 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

【解析】 (1) 若使 $f(x) - g(x)$ 的解析式有意义,

需使 $f(x) = \log_a(3+2x)$, $g(x) = \log_a(3-2x)$ 的解析式都有意义,

$$\text{即 } \begin{cases} 3+2x > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2},$$

$$\therefore f(x) - g(x) \text{ 的定义域是 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

(2) 函数 $f(x) - g(x)$ 是奇函数 .

由 (1) 知函数 $f(x) - g(x)$ 的定义域关于原点对称,

$$\text{又 } \because f(-x) - g(-x) = \log_a(3-2x) - \log_a(3+2x)$$

$$= -[\log_a(3+2x) - \log_a(3-2x)]$$

$$= -[f(x) - g(x)],$$

$\therefore$ 函数 $f(x) - g(x)$ 是奇函数 .

(3) 若 $f(x) - g(x) > 0$, 即 $\log_a(3+2x) > \log_a(3-2x)$,

当 $a > 1$, 则 $3+2x > 3-2x$, 解得 $x > 0$,

由 (1) 可得此时 x 的取值范围为 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$,

当 $0 < a < 1$, 则 $3+2x < 3-2x$, 解得 $x < 0$,

由 (1) 可得此时 x 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$,

$\therefore$ 综上得: 当 $a > 1$ 时, $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$; 当 $0 < a < 1$ 时, $x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

【标注】 【知识点】解对数不等式；利用定义判断函数奇偶性

2. 已知函数 $f(x) = \log_2(2^{2x} + 1) + ax$.

(1) 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，求实数 a 的值 .

(2) 在 (1) 的条件下，若 $g(x) = f(x) - 2$ ，求函数 $g(x)$ 的零点 .

【答案】 (1) -1 .

(2) $x = \log_4(7 - 4\sqrt{3})$ 或 $x = \log_4(7 + 4\sqrt{3})$.

【解析】 (1) $f(-x) = \log_2(2^{-2x} + 1) - ax = \log_2(2^{2x} + 1) - (a + 2)x$,

$\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 ,

$\therefore f(x) = f(-x)$, 即 $\log_2(2^{2x} + 1) - (a + 2)x = \log_2(2^{2x} + 1) + ax$,

$\therefore 2(a + 1)x = 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 ,

$\therefore a + 1 = 0$, $a = -1$,

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = \log_2(2^{2x} + 1) - x$,

不妨设 $g(x_0) = f(x_0) - 2 = 0$, 可得 $f(x_0) = 2$,

又 $\because f(x) = f(-x)$,

$$\therefore \begin{cases} f(x_0) = \log_2(2^{2x_0} + 1) - x_0 = 2 \\ f(-x_0) = \log_2(2^{-2x_0} + 1) + x_0 = 2 \end{cases}$$

可得 $\log_2(4^{x_0} + 1)(4^{-x_0} + 1) = 4 = \log_2 16$,

即 $4^{x_0} + \frac{1}{4^{x_0}} + 2 = 16$, 化简可得 $(4^{x_0} - 7)^2 = 48$,

$\therefore 4^{x_0} = 7 - 4\sqrt{3}$ 或 $7 + 4\sqrt{3}$,

$\therefore x_0 = \log_4(7 - 4\sqrt{3})$ 或 $\log_4(7 + 4\sqrt{3})$.

【标注】 【知识点】解对数方程

3. 已知函数 $y = 4^x + 4^{-x} - 2m(2^x - 2^{-x})$.

(1) 令 $t = 2^x - 2^{-x}$, 求 y 关于 t 的函数关系式 $y = g(t)$.

(2) 设 $y = f(x)$, 若 $f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上的最小值为 -2 , 求实数 m 的值 .

(3) 设 $y = f(x)$, 当 $x \in [1, +\infty)$ 时 , $f(x) > 1$ 恒成立 , 求实数 m 的取值范围 .

【答案】(1) $g(t) = t^2 - 2mt + 2$.

(2) 2.

(3) $m < \frac{13}{12}$.

【解析】(1) $t = 2^x - 2^{-x}$, $y = (2^x - 2^{-x})^2 + 2 - 2m(2^x - 2^{-x})$,

$$\therefore y = g(t) = t^2 - 2mt + 2.$$

(2) 由(1)知, $y = g(t) = t^2 - 2mt + 2$,

故因 $t = 2^x - 2^{-x}$ 单调递增,

则当 $x \geq 1$ 时, $t \geq 2^1 - 2^{-1} = \frac{3}{2}$,

而对于 $g(t)$ 而言, 对称轴为 $x = m$,

① $m \geq \frac{3}{2}$ 时, $g(t)_{\min} = g(m) = -2$, 即 $-m^2 + 2 = -2 \Rightarrow m = 2$ 或 -2 (舍),

② $m < \frac{3}{2}$ 时, $g(t)_{\min} = g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$, 即 $\frac{9}{4} - 3m + 2 = -2$, 解得 $m = \frac{25}{12}$ (舍),

故综上 $m = 2$.

(3) 同(2), $x \in [1, +\infty]$, $t \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, $y = t^2 - 2mt + 2 > 1$ 恒成立,

设 $h(t) = t^2 - 2mt + 1 > 0$, 对称轴 $x = m$,

① $m \geq \frac{3}{2}$ 时, $h(t)_{\min} = h(m) = m^2 - 2m^2 + 1 > 0$,

解得 $m^2 < 1 \Rightarrow -1 < m < 1$ (舍),

② $m < \frac{3}{2}$ 时, $h(t)_{\min} = h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3m + 1 > 0$,

解得 $m < \frac{13}{12}$, 综上 $m < \frac{13}{12}$.

【标注】【知识点】指数函数与二次函数复合; 二次函数相关的恒成立问题

4. 已知函数 $f(x) = \log_2(x-1)$, $g(x) = \log_2(6-2x)$.

(1) 求 $F(x) = f(x) + g(x)$ 的定义域.

(2) 求不等式 $F(x) \leq \log_2(4x - 2x^2)$ 的解集.

【答案】(1) (1, 3) .

(2) $\left(1, \frac{3}{2}\right]$.

【解析】(1) $F(x) = f(x) + g(x) = \log_2(x-1) + \log_2(6-2x)$,

故定义域为 $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 6-2x > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3$.

(2) $F(x) = f(x) + g(x) = \log_2(x-1)(6-2x) \leq \log_2(4x-2x^2)$,

易知 $\log_2 x$ 单调递增, 故 $\begin{cases} (x-1)(6-2x) \leq (4x-2x^2) \\ 4x-2x^2 > 0 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$,

解得 $1 < x \leq \frac{3}{2}$.

【标注】 【知识点】 解对数不等式

5. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{2-x}$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明 .

(2) 解不等式 $f(x) > 0$.

(3) 当 $x \in (-2, 1]$ 时, 求 $f(x)$ 的取值范围 .

【答案】(1) 奇函数, 证明见解析 .

(2) $(-2, 0)$.

(3) $\left[\log_{\frac{1}{2}} 3, +\infty\right)$.

【解析】(1) 求 $f(x)$ 的定义域 $\frac{2+x}{2-x} > 0$.

解得 $-2 < x < 2$, 得 $x \in (-2, 2)$.

$$f(-x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{2+x} = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{2-x} = -f(x) .$$

故 $f(x)$ 为奇函数 .

(2) 设 $t = \frac{2+x}{2-x}$, 则外层函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 恒为减函数 .

内层函数 $t = \frac{2+x}{2-x} = -1 + \frac{4}{2-x}$ 递增 .

则 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上递减.

而 $f(x) = 0$, 则 $f(x) > 0$ 即 $f(x) > f(0)$.

解得 $x \in (-2, 0)$.

(3) 由题意得 $f(x)$ 在 $(-2, 1]$ 上递减.

则 $f(x)_{\min} = f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 3$,

则 $f(x) \in [\log_{\frac{1}{2}} 3, +\infty)$.

【标注】 【知识点】对数的概念及其运算；单调性

6. 已知函数 $f(x) = \log_a(3+2x)$, $g(x) = \log_a(3-2x)$, ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 求函数 $f(x) - g(x)$ 定义域.

(2) 判断函数 $f(x) - g(x)$ 的奇偶性, 并予以证明.

(3) 求使 $f(x) - g(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

【答案】 (1) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(2) $f(x) - g(x)$ 是奇函数, 证明见解析.

(3) 当 $a > 1$ 时, x 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$;
当 $0 < a < 1$ 时, x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

【解析】 (1) $3+2x > 0$ 且 $3-2x > 0$,

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 函数的定义域是 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(2) 由(1)可知, 函数的定义域关于原点对称,

$$\text{令 } h(x) = f(x) - g(x),$$

$$h(-x) = \log_a(3-2x) - \log_a(3+2x) = -h(x),$$

$\therefore f(x) - g(x)$ 是奇函数.

(3) $\log_a(3+2x) - \log_a(3-2x) > 0$

$$\Rightarrow \log_a(3+2x) > \log_a(3-2x),$$

当 $a > 1$ 时,

$$3 + 2x > 0 ,$$

$$3 - 2x > 0 ,$$

$$3 + 2x > 3 - 2x \Rightarrow 0 < x < \frac{3}{2} ,$$

当 $0 < a < 1$ 时 ,

$$3 + 2x > 0 ,$$

$$3 - 2x > 0 ,$$

$$3 + 2x < 3 - 2x \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < 0 ,$$

$\therefore$ 当 $a > 1$ 时 , x 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$;

当 $0 < a < 1$ 时 , x 的取值范围是 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

【标注】 **【知识点】** 求具体函数（包括复合函数）的定义域；利用定义判断函数奇偶性；解对数不等式