

函数奇偶性求参数

一、单选题

1. 若函数 $f(x) = \frac{x(9^x - 1)}{a^x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为偶函数, 则 $a =$ ()

A. 2

B. 3

C. $\frac{1}{3}$

D. 9

【答案】B

【分析】利用特殊值法得出 $f(1) = f(-1)$, 求出 a 的值, 再利用函数奇偶性的定义验证即可.

【详解】函数 $f(x) = \frac{x(9^x - 1)}{a^x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为偶函数, 且该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 所以

$$f(1) = f(-1),$$

$$\text{因为 } f(1) = \frac{8}{a}, \quad f(-1) = -\frac{\frac{1}{9} - 1}{a^{-1}} = \frac{8a}{9}, \quad \text{所以 } \frac{8}{a} = \frac{8a}{9}, \quad \text{可得 } a^2 = 9,$$

$$\text{又因为 } a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, \text{ 解得 } a = 3, \text{ 此时 } f(x) = \frac{x(9^x - 1)}{3^x} = x(3^x - 3^{-x}),$$

$$\text{因为 } f(-x) = -x(3^{-x} - 3^x) = x(3^x - 3^{-x}) = f(x),$$

故当 $a = 3$ 时, 函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 $a = 3$.

2. 若函数 $f(x) = (x-1)^2 + ax$ 是偶函数, 则实数 $a =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【分析】根据偶函数的定义可得, 或根据偶函数图象的对称性可得.

【详解】函数 $f(x) = (x-1)^2 + ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

由偶函数定义知 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 即 $x^2 + (a-2)x + 1 = (-x)^2 + (a-2)(-x) + 1$, 即

$$2(a-2)x = 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 成立},$$

因此 $a-2=0$, 即 $a=2$.

方法二: 函数 $f(x) = (x-1)^2 + ax = x^2 + (a-2)x + 1$ 的对称轴为 $x = -\frac{a-2}{2}$.

因为偶函数的图象关于 y 轴对称, 所以 $\frac{a-2}{2}=0$, 所以 $a=2$.

当 $a=2$ 时, $f(x)=x^2+1$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x)=f(x)$, 是偶函数.

因此, $a=2$.

3. 已知函数 $y=2\sin\left(x+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ ($\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) 是奇函数, 则 θ 的值为 ()

- A. 0 B. $-\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{3}$

【答案】D

【详解】因为 $y=2\sin\left(x+\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 是奇函数, 所以 $\theta+\frac{\pi}{3}=k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 解得: $\theta=k\pi-\frac{\pi}{3}$, 又因为 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 故取 $k=0$, 得 $\theta=-\frac{\pi}{3}$.

4. 函数 $f(x)=(12^{-x}+9^{-x})a^{2x}$ ($a>0, a \neq 1$) 是偶函数, 则 $a=$ ()

- A. $\sqrt[4]{108}$ B. $\sqrt[4]{12}$ C. $6\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】A

【详解】因为函数 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x)=f(-x)$,

所以 $(12^{-x}+9^{-x})a^{2x}=(12^x+9^x)a^{-2x}$, 所以 $\frac{12^x+9^x}{12^x \cdot 9^x}a^{2x}=(12^x+9^x)a^{-2x}$,

所以 $a^{4x}=12^x \cdot 9^x=108^x$, 所以 $(a^4)^x=108^x$, 因为 $x \in \mathbf{R}$,

所以 $a^4=108$, 解得 $a=\sqrt[4]{108}$.

5. 若函数 $f(x)=\ln\left(1+\frac{a}{x+3}\right)$ 是奇函数, 则 a 的值可能为 ()

- A. -6 B. -2 C. 2 D. 6

【答案】A

【详解】因为函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 即 $\ln\left(1+\frac{a}{-x+3}\right)=-\ln\left(1+\frac{a}{x+3}\right)$,

所以 $\ln\frac{x-3-a}{x-3}=\ln\frac{x+3}{x+3+a}$, 即 $\frac{x-3-a}{x-3}=\frac{x+3}{x+3+a}$,

化简整理得 $(3+a)^2=9$, 解得 $a=0$ 或 $a=-6$,

当 $a=0$ 时, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, 故 $f(x)$ 不是奇函数;

当 $a=-6$ 时, $f(x)=\ln\left(1+\frac{-6}{x+3}\right)=\ln\frac{x-3}{x+3}$, 由 $\frac{x-3}{x+3}>0$, 得 $x<-3$ 或 $x>3$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$,

又 $f(-x) = \ln \frac{-x-3}{-x+3} = \ln \frac{x+3}{x-3} = \ln \left(\frac{x-3}{x+3} \right)^{-1} = -\ln \frac{x-3}{x+3} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数, 符合题意.

a 的值为 -6 .

6. 若函数 $f(x) = \left(a - \frac{2}{2^x + 1} \right) \cos x$, $a \in \mathbf{R}$ 是奇函数, 则 a 的值为 ()

A. 2

B. -2

C. -1

D. 1

【答案】D

【分析】根据奇函数的定义 $f(-x) = -f(x)$, 结合函数表达式建立方程求解 a 的值.

【详解】 $\because f(x) = \left(a - \frac{2}{2^x + 1} \right) \cos x$, $a \in \mathbf{R}$ 是奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数,

$\therefore g(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$ 为奇函数

$$\therefore g(x) + g(-x) = \left(a - \frac{2}{2^x + 1} \right) + \left(a - \frac{2}{2^{-x} + 1} \right) = 2a - \frac{2}{2^x + 1} - \frac{2 \cdot 2^x}{1 + 2^x} = 2a - \frac{2(1 + 2^x)}{2^x + 1} = 0,$$

$$\therefore 2a - 2 = 0 \therefore a = 1.$$

故选: D.

7. 若函数 $f(x) = a + \frac{4}{2^x - 1}$ 为奇函数, 则实数 $a =$ ()

A. -1

B. 1

C. 2

D. 4

【答案】C

【详解】因为函数 $f(x) = a + \frac{4}{2^x - 1}$ 为奇函数,

所以必有 $f(-1) = -f(1)$ 成立, 即 $a + \frac{4}{2^{-1} - 1} = -\left(a + \frac{4}{2^1 - 1} \right)$, 解得 $a = 2$,

所以 $f(x) = 2 + \frac{4}{2^x - 1} = \frac{2(2^x + 1)}{2^x - 1}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\text{又因为 } f(-x) = \frac{2(2^{-x} + 1)}{2^{-x} - 1} = \frac{2(1 + 2^x)}{1 - 2^x} = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $a = 2$ 符合题意.

8. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 4) - kx$, k 为实数, 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 的最小值为

()

A. 1

B. 2

C. $\log_2 5$

D. 4

【答案】B

【分析】根据是偶函数求出 $k=1$ ，再由函数化简得到 $f(x)=\log_2\left(2^x+\frac{4}{2^x}\right)$ ，再利用基本不等式和函数单调性求解即可.

【详解】 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $y=f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，

故 $f(0)=f(2)$ ，代入得 $\log_2 5 = \log_2 20 - 2k$ ，解得 $k=1$ ，

$$\text{所以 } f(x) = \log_2(4^x + 4) - x = \log_2(4^x + 4) - \log_2 2^x = \log_2\left(\frac{4^x + 4}{2^x}\right) = \log_2\left(2^x + \frac{4}{2^x}\right) \geq 2,$$

当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

故选：B.

9. 若 $f(x)=(x-a)(x+2)$ 为偶函数，则 a 的值为 ()

A. 0

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【分析】方法一：根据偶函数的定义求解即可；方法二：根据多项式的奇次项系数为 0 即可求解.

【详解】方法一：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$ 恒成立，

$$\text{即 } x^2 + (2-a)x - 2a = x^2 - (2-a)x - 2a \text{ 恒成立，}$$

$$\text{则 } (2-a)x = -(2-a)x \text{ 恒成立，所以 } 2(2-a)x = 0 \text{ 恒成立，}$$

$$\text{故 } 2-a=0, \text{ 解得 } a=2.$$

$$\text{方法二： } f(x) = (x-a)(x+2) = x^2 + (2-a)x - 2a, \text{ 要使函数为偶函数，}$$

$$\text{只需多项式的奇次项系数为 } 0, \text{ 即 } 2-a=0, \text{ 即 } a=2.$$

故选：D.

10. 若 $f(x)=(x+a) \cdot \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 为偶函数，则 $a=$ ()

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

【答案】B

【分析】利用偶函数的定义 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，即可求.

【详解】由题设，函数的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且

$$f(-x) = (-x+a) \cdot \frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = (-x+a) \cdot \frac{1-2^x}{1+2^x} = (x-a) \cdot \frac{2^x-1}{2^x+1} = f(x),$$

所以 $(x-a) \cdot \frac{2^x-1}{2^x+1} = (x+a) \cdot \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 恒成立，则 $2a \cdot \frac{2^x-1}{2^x+1} = 0$ 恒成立，故 $a=0$ 。

故选：B

11. 设函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}+a}{2^x-1}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是奇函数，则实数 a 的值为 ()

A. -2

B. -1

C. 2

D. 4

【答案】C

【分析】根据函数奇偶性，结合指数运算求解即可。

【详解】因为函数 $f(x) = \frac{2^{x+1}+a}{2^x-1}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$ ，

$$\text{即 } \frac{2^{-x+1}+a}{2^{-x}-1} = -\frac{2^{x+1}+a}{2^x-1} \Leftrightarrow \frac{2^{-x+1}+a}{2^{-x}-1} + \frac{2^{x+1}+a}{2^x-1} = 0, \text{ 化简得 } a-2=0,$$

解得 $a=2$

故选：C.

12. 已知函数 $f(x) = 4^x + 2^{ax}$ 是偶函数，则 $a =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【分析】由偶函数定义结合题设可得答案。

【详解】由偶函数性质可知 $f(x) = f(-x)$ ，即 $4^x + 2^{ax} = 4^{-x} + 2^{-ax}$ ，设 $t = 2^x$ ，

$$\text{则 } t^2 + t^a = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^a} \Rightarrow t^2 - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^a} - t^a = t^{-a} - \frac{1}{t^{-a}}, \text{ 因函数 } y = x - \frac{1}{x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 递增,}$$

则 $t^2 = t^{-a}$ ，又 $t \in (0, +\infty)$ 时该等式恒成立，则 $a = -2$ 。

故选：A.

13. 已知 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1} - ax^2$ 是奇函数，则实数 a 的值为 ()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

【答案】C

【分析】根据奇函数的定义 $f(-x) = -f(x)$ 计算即可。

【详解】要使 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1} - ax^2$ 有意义，则 $\frac{x+1}{x-1} > 0$ ，即 $(x+1)(x-1) > 0$ ，解得 $x > 1$ 或

$x < -1$ 。

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ，关于原点对称.

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1} - a(-x)^2 = \ln \frac{x-1}{x+1} - ax^2.$$

因为 $f(-x) = -f(x)$ ，所以 $\ln \frac{x-1}{x+1} - ax^2 = -\left(\ln \frac{x+1}{x-1} - ax^2\right)$,

$$\text{即 } \ln \frac{x-1}{x+1} + \ln \frac{x+1}{x-1} = 2ax^2, \text{ 也即 } \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \times \frac{x+1}{x-1} \right) = \ln 1 = 0 = 2ax^2,$$

因为 $x \neq 0$ ，所以 $a = 0$.

故选：C.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{(2^x+1)(x+a)}{2^x-1}$ 为偶函数，则 $a =$ ()

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

【答案】B

【分析】根据题意，得到 $f(-x) = f(x)$ ，结合指数幂的运算法则，准确化简，即可求解.

【详解】因为函数 $f(x) = \frac{(2^x+1)(x+a)}{2^x-1}$ 为偶函数，

$$\text{所以 } f(-x) = f(x), \text{ 即 } \frac{(2^{-x}+1)(-x+a)}{2^{-x}-1} = \frac{(2^x+1)(x+a)}{2^x-1},$$

$$\text{又因为 } \frac{(2^{-x}+1)(-x+a)}{2^{-x}-1} = \frac{(\frac{1}{2^x}+1)(-x+a)}{\frac{1}{2^x}-1} = \frac{(1+2^x)(-x+a)}{1-2^x},$$

$$\text{可得 } \frac{(1+2^x)(-x+a)}{1-2^x} = \frac{(2^x+1)(x+a)}{2^x-1}, \text{ 即 } \frac{(1+2^x)(-x+a)}{1-2^x} = -\frac{(2^x+1)(x+a)}{1-2^x}$$

所以 $-x+a = -(x+a)$ ，解得 $a = 0$.

故选：B.

15. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 \cdot 2^x}{2^{kx} - 1}$ 是奇函数，则实数 k 的值为 ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【分析】由题意可得 $\frac{(-x)^2 \cdot 2^{-x}}{2^{-kx} - 1} = -\frac{x^2 \cdot 2^x}{2^{kx} - 1}$ 对 $x \in \{x | x \neq 0\}$ 均成立，计算可求得实数 k 的值.

【详解】若 $k=0$ ，则 $2^{kx}-1=0$ ，函数 $f(x)=\frac{x^2 \cdot 2^x}{2^{kx}-1}$ 无意义，故 $k \neq 0$ ，

由 $2^{kx}-1 \neq 0$ ，解得 $x \neq 0$ ，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$

因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x) = -f(x)$ 对 $x \in \{x | x \neq 0\}$ 均成立，

$$\text{即 } \frac{(-x)^2 \cdot 2^{-x}}{2^{-kx} - 1} = -\frac{x^2 \cdot 2^x}{2^{kx} - 1} \text{ 对 } x \in \{x | x \neq 0\} \text{ 均成立，}$$

$$\text{所以 } \frac{2^{-x}}{2^{-kx} - 1} = -\frac{2^x}{2^{kx} - 1} \text{ 对 } x \in \{x | x \neq 0\} \text{ 均成立，}$$

$$\text{所以 } 2^{-x} \cdot (2^{kx} - 1) = -2^x \cdot (2^{-kx} - 1) \text{ 对 } x \in \{x | x \neq 0\} \text{ 均成立，}$$

$$\text{所以 } 2^{kx} (2^{kx} - 1) = -(2^x)^2 \cdot (1 - 2^{kx}) \text{ 对 } x \in \{x | x \neq 0\} \text{ 均成立，}$$

因为 $2^{kx} - 1 \neq 0$ ，所以 $2^{kx} = 2^{2x}$ 对 $x \in \{x | x \neq 0\}$ 均成立，所以 $k=2$.

故选：D.