

三角函数习题综合

一、单选题

1. 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 成中心对称, 则下列结论正确的个数是 ()

① $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减; ② $y = f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 有 2 个极值点;

③ 直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 是一条对称轴; ④ 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 是一条切线.

A. 3 个

B. 2 个

C. 1 个

D. 0 个

【答案】B

【分析】先利用函数的对称性求出函数的关系式, 再根据正弦函数的性质, 函数的极值定义和导数的几何意义判断各小题的结论即得.

【详解】因为 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 对称,

所以 $2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\varphi = k\pi - \frac{4\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 故 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$,

对于①, 令 $\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$, 解得 $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减, 故① 正确;

对于②, 由 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$, 可得 $2x + \frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, 根据正弦函数的图象, 可知 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 只有一个极值点, 故② 不正确;

对于③, 因 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\pi = 0$, 故③ 不正确;

对于④, 由 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 求导可得, $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$,

因为 $f(0) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_{\text{切}} = f'(0) = 2\cos \frac{2\pi}{3} = -1$

故 $y = f(x)$ 在点 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程为 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -(x - 0)$, 即 $y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

故直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 是曲线 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的一条切线, 故④ 正确.

故选: B.

2. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度得到函数

$g(x)$ 的图象, 函数 $g(x)$ 的一个对称轴为 $x = \frac{\pi}{2}$, 则 φ 的最小取值为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{12}$

【答案】B

【分析】首先得到平移后的解析式, 再根据正弦函数的对称性计算可得.

【详解】将 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位长度得到

$$g(x) = \sin\left[2\left(x + \varphi\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{6}\right),$$

又函数 $g(x)$ 的一个对称轴为 $x = \frac{\pi}{2}$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{2} + 2\varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k = 1$ 时 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 φ 的最小取值为 $\frac{\pi}{6}$.

故选: B

3. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi) \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 $\varphi =$ ()

- A. $-\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $-\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】A

【分析】由图象的对称性可得 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 由此结合范围求出 φ 值.

【详解】由题意得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \pm 1$,

则 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$,

又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以当 $k = 0$ 时, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

故选: A.

4. 已知 $x = \frac{2\pi}{3}$ 是函数 $f(x) = A\sin(2x + \varphi) (A > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ 的一条对称轴, 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2$,

则 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}$ C. $-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$ D. -1 或 1

【答案】B

【分析】根据对称轴过最值点可知 $A = 2$, 利用 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2$ 可求得 φ , 由此可得 $f(x)$, 代入 $x = \frac{\pi}{4}$ 即可.

【详解】由 $x = \frac{2\pi}{3}$ 是函数 $f(x) = A\sin(2x + \varphi)$ ($A > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$) 的一条对称轴,

$$\text{知 } f(x)_{\max} = A,$$

$$\therefore f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2,$$

$$\therefore A = 2,$$

$$\therefore f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 = 2\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi\right),$$

$$\therefore \frac{4\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\therefore \varphi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{又 } 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{7\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

故选: B.

5. 设函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6} + 2\varphi)$ ($\varphi > 0$), 若 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 则 φ 的最小值为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{5\pi}{12}$

【答案】A

【分析】利用正弦函数的对称性, 列式求解即得.

【详解】因为 $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6} + 2\varphi)$ ($\varphi > 0$) 图象的一条对称轴,

于是 $2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, 而 $\varphi > 0$, 则 $k \in \mathbb{N}$,

所以当 $k = 0$ 时, $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{6}$.

故选: A

6. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbb{R}, \omega > 0$) 的最小正周期为 π , 将 $y = f(x)$ 的图像向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度, 所得图像关于 y 轴对称, 则 φ 的一个值是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{3\pi}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{8}$

【答案】D

【分析】利用最小正周期公式求出 ω ，再利用平移变换得到平移后的函数结合正弦函数图像和性质求解即可.

【详解】因为 $f(x)$ 最小正周期为 π ，所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，解得 $\omega = 2$ ，所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ；

将 $y = f(x)$ 图像向左平移 φ 个单位长度得 $f(x + \varphi) = \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ ，

因为 $f(x + \varphi)$ 图像关于 y 轴对称，所以 $2\varphi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

解得 $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ ，则当 $k = 0$ 时， $\varphi = \frac{\pi}{8}$ ，其他选项不满足题意，

故选：D.

7. 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后所得函数的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，则当 ω 取最小值时，函数 $f(x)$ 的最小正周期为（ ）

A. 3π

B. 2π

C. $\frac{6\pi}{5}$

D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【分析】先利用三角函数的图象变换求出平移后的函数 $g(x)$ ，然后利用对称轴列出关于 ω 的等式，求出 ω 的最小值，再利用周期公式求解即可.

【详解】将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后

所得函数为 $g(x) = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ ，

因为 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，

则有 $\omega\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\omega = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $\omega > 0$ ，所以 ω 的最小值为 $\frac{2}{3}$ ，

故函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$.

故选：A

8. 若将函数 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的图象向右平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位，所得图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小值是（ ）

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{3\pi}{8}$

D. $\frac{5\pi}{12}$

【答案】D

【分析】利用三角恒等变换，化简函数的解析式，再利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，三角函数的图象的对称性，求得 φ 的最小值.

【详解】将函数化简为 $f(x)=\sin x \cos x+\sqrt{3} \cos ^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2} \sin 2 x+\sqrt{3} \cdot \frac{1+\cos 2 x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin \left(2 x+\frac{\pi}{3}\right)$,

将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi>0$) 个单位, 可得 $y=\sin \left(2 x-2 \varphi+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象; 根据所得图象关于 y 轴对称,

可得 $-2 \varphi+\frac{\pi}{3}=k \pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 即 $\varphi=-\frac{\pi}{12}-\frac{k \pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 令 $k=-1$, 可得 φ 的最小值为 $\frac{5 \pi}{12}$.

故选: D.

【点睛】本题主要考查三角恒等变换, 函数 $y=A \sin (\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律, 三角函数的图象的对称性, 属于基础题.

9. 将曲线 $y=\sin \left(2 x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到曲线 $y=f(x)$, 若函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 $\varphi=$

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $-\frac{\pi}{3}$

D. $-\frac{\pi}{6}$

【答案】D

【分析】曲线 $y=\sin \left(2 x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到曲线

$$y=f(x)=\sin \left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin \left(2 x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right),$$

若函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2 k \pi,(k \in \mathbb{Z})$, 则 $\varphi=\frac{5 \pi}{6}+k \pi(k \in \mathbb{Z})$, 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

故选 D.

点睛: 三角函数中函数图象的平移变化是常考知识点, 也是易错题型.

首项必须看清题目中是由哪个函数平移, 平移后是哪个函数;

其次, 在平移时, 还要注意自变量 x 的系数是否为 1, 如果 x 有系数, 需要将系数提出来求平移量, 平移时遵循“左加右减”.

10. 若 $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ 是函数 $f(x)=\sin \omega x+\cos \omega x$ 图象的一个对称中心, 则 ω 的一个取值是

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】C

【详解】 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $\frac{\pi}{8} \times \omega + \frac{\pi}{4} = 0 + k\pi$, $\omega = -2 + 8k, k \in \mathbb{Z}$,

所以 ω 可能的一个取值是 6, 故选 C.