

高考导数

1. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$) , $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数 .

(1) 当 $k = 6$ 时 ,

① 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程 .

② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值 .

(2) 当 $k \geq -3$ 时 , 求证 : 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

【答案】 (1) ① $y = 9x - 8$.

② 单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 极小值为 1 , 无极大值 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) ① 当 $k = 6$ 时 , $f(x) = x^3 + 6 \ln x$,

$$\text{故 } f'(x) = 3x^2 + \frac{6}{x} ,$$

$$\text{可得 } f(1) = 1 , f'(1) = 9 ,$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 9(x - 1)$,

$$\text{即 } y = 9x - 8 .$$

② 依题意 , $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \ln x + \frac{3}{x}$, $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{从而可得 } g'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} ,$$

$$\text{整理可得 } g'(x) = \frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2} ,$$

$$\text{令 } g'(x) = 0 , \text{ 解得 } x = 1 ,$$

当 x 变化时 , $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表 :

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以, 函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, $g(x)$ 的极小值为

$g(1) = 1$, 无极大值.

(2) 由 $f(x) = x^3 + k \ln x$, 得 $f'(x) = 3x^2 + \frac{k}{x}$,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

令 $\frac{x_1}{x_2} = t$, ($t > 1$),

$$\begin{aligned} & \text{则} (x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= (x_1 - x_2) \left(3x_1^2 + \frac{k}{x_1} + 3x_2^2 + \frac{k}{x_2} \right) - 2 \left(x_1^3 - x_2^3 + k \ln \frac{x_1}{x_2} \right) \\ &= x_1^3 - x_2^3 - 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + k \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right) - 2k \ln \frac{x_1}{x_2} \\ &= x_2^3(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) \quad \text{①}, \end{aligned}$$

令 $h(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$, $x \in (1, +\infty)$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 > 0$,

由此可得 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $t > 1$ 时, $h(t) > h(1)$, 即 $t - \frac{1}{t} - 2 \ln t > 0$,

因为 $x_2 \geq 1$, $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3 > 0$, $k \geq -3$,

$$\begin{aligned} & \text{所以} x_2^3(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + k \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) \\ &> (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) - 3 \left(t - \frac{1}{t} - 2 \ln t \right) \\ &= t^3 - 3t^2 + 6 \ln t + \frac{3}{t} - 1 \quad \text{②}, \end{aligned}$$

由(1)②可知, 当 $t > 1$ 时, $g(t) > g(1)$,

即 $t^3 - 3t^2 + 6 \ln t + \frac{3}{t} > 1$,

故 $t^3 - 3t^2 + 6 \ln t + \frac{3}{t} - 1 > 0$ ③,

由①②③可得 $(x_1 - x_2)(f'(x_1) + f'(x_2)) - 2(f(x_1) - f(x_2)) > 0$,

所以, 当 $k \geq -3$ 时,

对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

有 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

【标注】 【知识点】双变量问题

2. 已知函数 $f(x) = ax - xe^x$ ($a > 0$).

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

(2) 证明: $f(x)$ 有唯一的极值点.

(3) 若存在 a , 使得 $f(x) \leq a + b$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

【答案】(1) $y = (a-1)x$.

(2) 证明见解析.

(3) $[-e, +\infty)$.

【解析】(1) $f'(x) = a - (x+1)e^x$,

$$f'(0) = a - 1, f(0) = 0,$$

$\therefore$ 切线方程为 $y = (a-1)x (a > 0)$.

(2) 令 $g(x) = a - (x+1)e^x (a > 0)$,

$$g'(x) = -(x+2)e^x,$$

令 $g'(x) > 0$, 得 $x < -2$,

令 $g'(x) < 0$, 得 $x > -2$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } g(-2) = a + \frac{1}{e^2} > 0,$$

且当 $x < -2$ 时, $(x+1)e^x < 0$,

又 $\because a > 0$,

$\therefore a - (x+1)e^x > 0$ 在 $(-\infty, -2)$ 上恒成立,

即 $g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上无零点,

$\because a > 0$,

$$\therefore \ln(a+1) > 0,$$

$$g(\ln(a+1)) = a - [\ln(a+1) + 1](a+1)$$

$$= -1 - (a+1)\ln(a+1) < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(-2, \ln(a+1))$ 上有一个零点, 不妨记为 x_0 ,

$\therefore$ 当 $x < x_0$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $g(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 无极小值点,

得证.

(3) 由 (2) 知, $f(x)_{\max} = f(x_0)$,

即 $ax_0 - x_0e^{x_0} \leq a + b$ 能成立,

$$\text{又 } f'(x_0) = 0, \text{ 即 } a - (x_0 + 1)e^{x_0} = 0,$$

$$\therefore a = (x_0 + 1)e^{x_0},$$

则 $(x_0 + 1)e^{x_0} \cdot x_0 - x_0 e^{x_0} \leq (x_0 + 1)e^{x_0} + b$ 能成立 ,

即 $(x_0^2 - x_0 - 1)e^{x_0} \leq b$ 能成立 ,

$\because a > 0$,

$\therefore (x_0 + 1)e^{x_0} > 0$, 即 $x_0 > -1$.

令 $h(x) = (x^2 - x - 1)e^x (x > -1)$,

$h'(x) = (x^2 - x - 1)e^x + (2x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x$,

令 $h'(x) > 0$, 解得 , $x > 1$,

令 $h'(x) < 0$, 解得 , $-1 < x < 1$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减 , 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 ,

$\therefore h(x)_{\min} = h(1) = -e$,

$\therefore b$ 的取值范围为 $[-e, +\infty)$.

【标注】 【知识点】 求函数极值 (含参指对型导函数) ; 利用导数解决不等式恒成立问题 ; 通过构造函数证明不等式