

高二期末

一、选择题

(本大题共8小题，每小题3分，共24分)

1. 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的准线方程为 () .

A. $y = -1$ B. $x = \frac{1}{16}$ C. $y = 1$ D. $x = -\frac{1}{16}$

【答案】 A

【解析】 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的标准方程为 $x^2 = 4y$ ，焦点在 y 轴正半轴，且 $2p = 4$ ， $\frac{p}{2} = 1$ ，
所以其准线方程为 $y = -1$.

故选A .

【标注】 【知识点】 抛物线的标准方程

2. 已知圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的一条直径通过直线 $2x + y - 4 = 0$ 被圆所截弦的中点，则该直径所在直线的方程为 () .

A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $x - 2y - 5 = 0$ C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x + 2y + 5 = 0$

【答案】 B

【解析】 由题得圆的圆心坐标为 $(1, -2)$ ，
所求的直线的斜率为 $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ ，
所以所求直线的方程为 $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ ，
即 $x - 2y - 5 = 0$.

故选B .

【标注】 【知识点】 已知直线和圆的位置关系求直线的方程

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $S_2 + a_6 = 9$ ，则 S_6 的值为 () .

A. 10 B. 15 C. 30 D. 3

【答案】 B

【解析】由 $S_2 + a_6 = 9$ ，可得 $a_1 + a_2 + a_6 = 9$ ，

即 $3a_3 = 9$ ，

所以 $a_3 = 3$ ，

所以 $S_5 = 5a_3 = 15$ 。

故选B。

【标注】【知识点】等差数列角标和性质的应用

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1 > 0$ ，公差 $d \neq 0$ ，前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_3 = S_{15}$ ，则 S_n 的最大项为（ ）。

A. S_7

B. S_8

C. S_9

D. S_{10}

【答案】C

【解析】等差数列 $\{a_n\}$ 中，且满足 $S_3 = S_{15}$ ，

$\therefore a_4 + a_5 + \cdots + a_{15} = 0$ ，

由等差数列的性质可知， $a_9 + a_{10} = 0$ ，

$\therefore$ 首项 $a_1 > 0$ ，公差 $d \neq 0$ ，

$\therefore d < 0$ ，

$\therefore a_9 > 0$ ， $a_{10} < 0$ ，

则 S_n 的最大项为 S_9 。

故选C。

【标注】【知识点】求等差数列前 n 项和的最值

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q < 0$ ，且 $a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ，则 $\{a_n\}$ 的前2020项和等于（ ）。

A. 2020

B. -1

C. 1

D. 0

【答案】D

【解析】由题可知： $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ，所以 $a_n q^2 = a_n q + 2a_n$ ，

则 $q^2 - q - 2 = 0$ ，由 $q < 0$ ，所以 $q = -1$ ，

又 $a_2 = 1$ ，所以 $a_1 = -1$ ，

所以 $S_{2020} = \frac{a_1(1 - q^{2020})}{1 - q} = \frac{-1 \times [1 - (-1)^{2020}]}{1 - (-1)} = 0$ 。

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等比数列求和问题

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 () .

- A. $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$ B. $a_n = \frac{n^2 - n}{2}$ C. $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ D. $a_n = n^2 - n + 1$.

【答案】 C

【解析】 由 $a_{n+1} = a_n + n$, 得 $a_n - a_{n-1} = n - 1 (n \geq 2)$,

又 $a_1 = 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 1 \\ &= \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} + 1 \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2}, \end{aligned}$$

故选: C .

【标注】 【知识点】 利用累加法求数列通项公式问题

7. 已知双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 4$, 过点 $A(3, 1)$ 作直线 l 与该双曲线交于 M, N 两点, 若点 A 恰好为 MN 中点, 则直线 l 的方程为 () .

- A. $y = 3x - 8$ B. $y = -3x + 8$ C. $y = 3x - 10$ D. $y = -3x + 10$

【答案】 A

【解析】 由双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 4$ 为等轴双曲线, 焦点在 x 轴上,

过点 $A(3, 1)$ 作直线 l 与该双曲线交于 M, N 两点,

$M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\therefore \begin{cases} x_1^2 - y_1^2 = 4 \\ x_2^2 - y_2^2 = 4 \end{cases}, \text{ 两式相减可得:}$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0,$$

A 为 MN 的中点,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 \times 3 = 6, y_1 + y_2 = 2 \times 1 = 2,$$

$$\therefore 6(x_1 - x_2) - 2(y_1 - y_2) = 0,$$

$$\text{则 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$\therefore \text{直线 } MN \text{ 的斜率为 } k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 3.$$

由直线的点斜式方程可知: $y - 1 = 3(x - 3)$,

整理得: $y = 3x - 8$.

故选A .

【标注】【知识点】直线方程的五种形式的联系和使用范围的区别；直线的点斜式方程；中点弦问题；直线和双曲线的位置关系

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2 = 2py(p > 0)$ 交于 A, B 两点，若 $|AF| + |BF| = 4|OF|$ ，则该双曲线的渐近线方程为（ ）.
- A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

【答案】 D

【解析】 把 $x^2 = 2py(p > 0)$ 代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ ，

可得： $a^2y^2 - 2pb^2y + a^2b^2 = 0$ ，

$$\therefore y_A + y_B = \frac{2pb^2}{a^2},$$

$$\because |AF| + |BF| = 4|OF|,$$

$$\therefore y_A + y_B + 2 \times \frac{p}{2} = 4 \times \frac{p}{2},$$

$$\therefore \frac{2pb^2}{a^2} = p,$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{该双曲线的渐近线方程为：} y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

故选D.

【标注】【知识点】求双曲线的渐近线；抛物线与双曲线结合

二、 填空题

(本大题共6小题，每小题4分，共24分)

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_5 = 5$ ， $S_5 = 15$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前100项和为 _____ .

【答案】 $\frac{100}{101}$

【解析】 设等差数列的公差为 d ，

$$\text{由题意可得，} \begin{cases} a_1 + 4d = 5 \\ 5a_1 + 10d = 15 \end{cases},$$

$$\text{解方程可得，} d = 1, a_1 = 1,$$

由等差数列的通项公式可得：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + (n-1) \times 1 \\
&= n. \\
&\therefore \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \\
S_{100} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\
&= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】裂项相消法求和；等差数列求通项问题

2. 记 S_n 为递增等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_1 = 1$ ， $S_4 = 5S_2$ ，则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$

【解析】 $\because \{a_n\}$ 是递增的等比数列， $a_1 > 0$ ， $q > 1$ 或 $a_1 < 0$ ， $0 < q < 1$ ，

$$\therefore a_1 = S_1 = 1, \therefore a_1 > 0, \therefore q > 1,$$

$$\therefore S_4 - S_2 = a_3 + a_4, \therefore a_3 + a_4 = 4(a_1 + a_2),$$

$$\therefore a_1 q^2 = a_3, a_2 q^2 = a_4, \therefore q^2 = 4, \therefore q = 2,$$

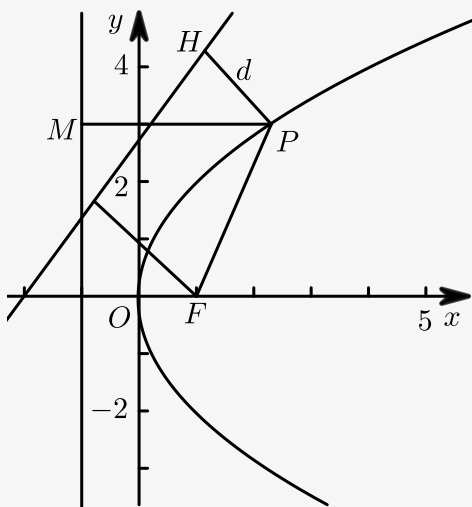
$$\therefore a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

【标注】【知识点】等比数列求通项问题；等比数列求和问题

3. 已知直线 $l: 4x - 3y + 8 = 0$ ，抛物线 $C: y^2 = 4x$ 图像上的一动点到直线 l 与它到抛物线准线距离之和的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$ ，准线方程为 $x = -1$ ，



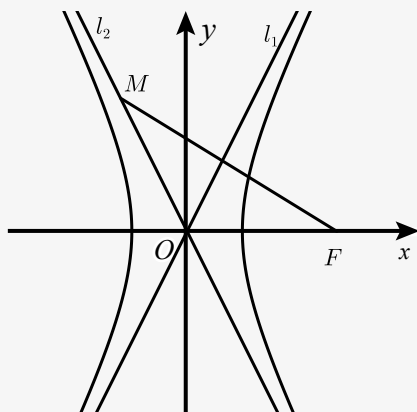
如图设 $|PH| = d$ ， P 到 y 轴的距离为 P 到准线 $x = -1$ 的距离减 1，即 $|PM| - 1$ ，
 由抛物线的定义可得 $|PF| = |PM|$ ，
 可得点 P 到直线 l 和它到 y 轴的距离之和的最小值即为 $|PM| + |d - 1| = |PF| + d - 1$ 的最小值，
 由 F, P, H 三点共线，
 即 $|PF| + d \geq |m|$ ，（ m 为 F 到准线 $4x - 3y + 8 = 0$ 的距离），
 可得 $m = \frac{|4 - 0 + 8|}{5} = \frac{12}{5}$ 。
 故答案为： $\frac{12}{5}$ 。

【标注】【知识点】抛物线的定义；直线和抛物线的位置关系；最值问题

4. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别为 l_1, l_2 ，左焦点为 F ，若点 F 关于直线 l_1 的对称点 P 在 l_2 上，则双曲线的离心率为 _____。

【答案】 2

【解析】



l_1, l_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线，
 不妨设 l_1 为 $y = \frac{b}{a}x$ ， l_2 为 $y = -\frac{b}{a}x$ ，

由右焦点关于 l_1 的对称点 l_2 在上，
 设右焦点 F 关于 l_1 的对称点为 $M\left(m, -\frac{bm}{a}\right)$ ，
 右焦点 F 坐标为 $(c, 0)$ ，
 MF 中点坐标为 $\left(\frac{m+c}{2}, -\frac{bm}{2a}\right)$ ，
 可得 $-\frac{bm}{2a} = \frac{m+c}{2} \cdot \frac{b}{a}$ ，
 解得 $m = -\frac{1}{2}c$ ，
 即有 $M\left(-\frac{1}{2}c, \frac{bc}{2a}\right)$ ，
 可得 MF 的斜率为 $\frac{\frac{bc}{2a}}{-\frac{1}{2}c - c} = -\frac{b}{3a}$ ，
 即有 $-\frac{b}{3a} \cdot \frac{b}{a} = -1$ ，
 可得 $b^2 = 3a^2$ ，
 即 $c^2 = a^2 + b^2 = 4a^2$ ，
 则 $c = 2a$ ，
 可得 $e = \frac{c}{a} = 2$ ，
 故答案为：2。

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - a\right)n + 2, & n > 8 \\ a^{n-7}, & n \leq 8 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n > a_{n+1}$ ，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【解析】若 $a_n > a_{n+1}$ ，则数列 $\{a_n\}$ 单调递减，即 $\frac{1}{3} - a < 0$ ，即 $a > \frac{1}{3}$ ，
 若 a^{n-7} 递减，则 $0 < a < 1$ ，
 $\therefore \frac{1}{3} < a < 1$ ，
 $\because a_8 > a_9$ ，
 $\therefore a > \left(\frac{1}{3} - a\right) \times 9 + 2$ ，
 即 $a > \frac{1}{2}$ ，
 $\therefore a$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 。

【标注】【知识点】数列与不等式综合

6.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \log_{n+2}(n+3), n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ ，定义使 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 为整数的 k 叫做“幸福数”，则区间 $[1, 2020]$ 内所有“幸福数”的和为 _____ .

【答案】 1349

【解析】 由题意 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \log_{n+2}(n+3), n \geq 2 \end{cases}$ ，

$$\text{令 } T_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n ,$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = a_1 = 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时,}$$

$$\begin{aligned} T_n &= 1 \times \log_4 5 \times \log_5 6 \times \log_6 7 \times \cdots \times \log_{n+2}(n+3) \\ &= 1 \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 6} \cdots \frac{\lg(n+3)}{\lg(n+2)} \\ &= \frac{\lg(n+3)}{\lg 4} \\ &= \log_4(n+3) . \end{aligned}$$

$$\text{又 } n=1 \text{ 时, } 1 = \log_4 4 \text{ 也成立,}$$

$$\therefore T_n = \log_4(n+3) \in \mathbf{Z}, 1 \leq n \leq 2020 ,$$

$$\text{设 } \log_4(n+3) = m \in \mathbf{Z} ,$$

$$\therefore n+3 = 4^m \in [4, 2023] ,$$

$$\therefore 4^5 = 2^{10} = 1024, 4^6 = 4096 > 2023 ,$$

$$\therefore 1 \leq m \leq 5 ,$$

$\therefore$ 所求为：

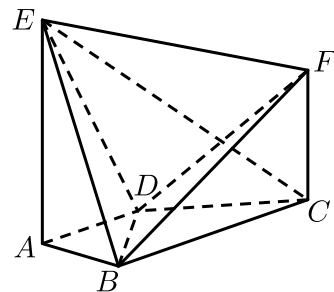
$$\begin{aligned} &(4^1 - 3) + (4^2 - 3) + \cdots + (4^5 - 3) \\ &= \frac{4(1 - 4^5)}{1 - 4} - 15 \\ &= 1349 . \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 分段数列问题；数列的新定义问题

三、解答题

(本大题共4小题，共52分)

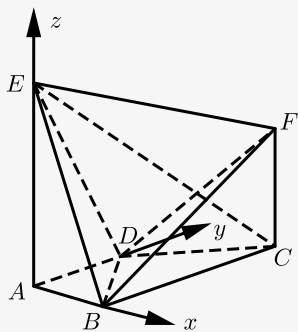
- 如图， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1$ ， $AE = BC = 2$ ， $CF = \frac{8}{7}$.



- (1) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值 .
- (2) 求平面 BDE 与平面 BDF 夹角的余弦值 .

【答案】 (1) $\frac{4}{9}$.
 (2) $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

【解析】 (1) $\because AE \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$,
 $\therefore AE \perp AB$ 且 $AE \perp AD$,
 $\because AB \perp AD$,
 $\therefore$ 如图所示建立空间直角坐标系 ,



$$\therefore A(0,0,0) , B(1,0,0) , D(0,1,0) , E(0,0,2) , C(1,2,0) ,$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = (-1, -2, 2) , \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0) ,$$

$$\overrightarrow{BE} = (-1, 0, 2) ,$$

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x_1 + y_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = -x_1 + 2z_1 = 0 \end{cases} ,$$

令 $x_1 = 2$, 则 $\vec{n} = (2, 2, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{CE}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{CE} \cdot \vec{n}}{|\vec{CE}| |\vec{n}|} = \frac{-2 - 4 + 2}{\sqrt{1+4+4} \sqrt{4+4+1}} = -\frac{4}{9} ,$$

$\therefore$ 直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

(2) $\therefore F(1, 2, 1)$,

$$\therefore \vec{BF} = (0, 2, 1) ,$$

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BF} = 2y_2 + z_2 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{BD} = -x_2 + y_2 = 0 \end{cases} ,$$

令 $y_2 = 1$, 则 $\vec{m} = (1, 1, -2)$,

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2 + 2 - 2}{\sqrt{4+4+1} \sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9} ,$$

由图知平面 BDE 与平面 BDF 的夹角为锐角 ,

$\therefore$ 平面 BDE 与平面 BDF 的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

【标注】【知识点】向量法解决线面角问题；向量法解决二面角问题

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, F_1 , F_2 分别为椭圆的左右焦点 , P 为椭圆上任意一点 .

(1) 若 $|PF_1| - |PF_2| = 1$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 .

(2) 是否存在直线 l , 使得当 l 经过椭圆左顶点 A 且与椭圆相交于点 B , 点 D 与点 B 关于 x 轴对称 , 满足 $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = -\frac{20}{7}$, 若存在 , 请求出直线 l 的方程 ; 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】 (1) $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{3}{2}$.

(2) $x = y - 2$ 或 $x = -y - 2$ 或 $x = \frac{2\sqrt{21}}{21}y - 2$ 或 $x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}y - 2$.

【解析】 (1) 由题意得 $a = 2$, 则 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$,

又因为 $|PF_2| - |PF_1| = 1$,

可得 $|PF_2| = \frac{5}{2}$, $|PF_1| = \frac{3}{2}$, 且 $2c = 2 = |F_1F_2|$,

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{3}{5} , \text{ 则 } \sin \angle F_1PF_2 = \frac{4}{5} ,$$

$$S_{\triangle F_1 P F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{2} .$$

(2) $A(-2, 0)$,

当斜率为0时, 明显不合理 .

当直线斜率不为零时, 设 $l: x = my - 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{得} (3m^2 + 4)y^2 - 12my = 0 ,$$

$\Delta > 0$ 得 $m \neq 0$,

设 $B(x_B, y_B)$, 则 $D(x_B, y_B)$,

由韦达定理得 $y_A + y_B = \frac{12m}{3m^2 + 4}$, 则 $y_B = \frac{12m}{3m^2 + 4}$,

$\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B)$, $\overrightarrow{OD} = (x_B, -y_B)$,

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = x_B^2 - y_B^2 = (m^2 - 1)y_B^2 - y_B^2$$

$$= (m^2 - 1)y_B^2 - 4my_B + 4$$

$$\Rightarrow \frac{(m^2 - 1) \cdot 12^2 m^2}{3m^2 + 4} - \frac{4m \cdot 12m}{3m^2 + 4} + 4 = -\frac{20}{7}$$

$$\Rightarrow 7 \times 48m^2 + (1 - m^2) \times 144m^2 \times 7 = 48(3m^2 + 4)$$

$$\Rightarrow 7m^2 + 21m^2 - 21m^4 = 3m^2 + 4$$

$$= 21m^4 - 25m^2 + 4 = 0 .$$

解得 $m^2 = 1$ 或 $\frac{4}{21}$, 即 $m = \pm 1$ 或 $\pm \frac{2\sqrt{21}}{21}$.

$\therefore$ 直线 l 可能为 $x = y - 2$ 或 $x = -y - 2$ 或 $x = \frac{2\sqrt{21}}{21}y - 2$ 或 $x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}y - 2$.

【标注】【知识点】焦点三角形问题；向量问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的定义

3. 在已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 2$, $a_4 + b_4 = 27$, $S_4 - b_4 = 10$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项的和 T_n .

【答案】 (1) $3n - 1$; 2^n , $n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q 。

$$\text{由 } a_1 = b_1 = 2, \text{ 得 } a_4 = 2 + 3d, b_4 = 2q^3,$$

$$S_4 = 8 + 6d.$$

$$\text{由条件, 得方程组 } \begin{cases} 2 + 3d + 2q^3 = 27 \\ 8 + 6d - 2q^3 = 10 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} d = 3 \\ q = 2 \end{cases},$$

$$\text{所以 } a_n = 3n - 1, b_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可得: } c_n = (3n - 1) \cdot 2^n,$$

$$T_n = (3 \times 1 - 1) \cdot 2^1 + (3 \times 2 - 1) \cdot 2^2 + (3 \times 3 - 1) \cdot 2^3 + \cdots + (3n - 1) \cdot 2^n \text{ ①},$$

$$2T_n = (3 \times 1 - 1) \cdot 2^2 + (3 \times 2 - 1) \cdot 2^3 + (3 \times 3 - 1) \cdot 2^4 + \cdots + [3(n - 1) - 1] \cdot 2^n + (3n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

$$\text{②},$$

$$\text{由 ①-②, 得 } -T_n = 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 3 \times 2^n - (3n - 1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 4 + 3 \cdot \frac{4(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (3n - 1) \cdot 2^{n+1},$$

$$\therefore T_n = 8 + (3n - 4) \cdot 2^{n+1}.$$

【标注】【知识点】等差数列求通项问题；等比数列求通项问题；错位相减法求和

4. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = a_n^2 + a_n - 2$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 若 $b_n = \frac{2^n(n-1)}{na_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

(3) 是否存在实数 λ 使得 $T_n + 2 > \lambda S_n$ ，对 $n \in \mathbf{N}^+$ 恒成立，若存在，求实数 λ 的取值范围，若不存在说明理由。

【答案】(1) $a_n = 2 + (n - 1) \times 1 = n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

$$(2) \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2.$$

$$(3) \text{ 成立; } \lambda < \frac{4}{9}.$$

【解析】(1) 当 $n = 1$ 时， $a_1 = 2$ 或 $a_1 = -1$ （舍去），

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 2a_n = 2(S_n - S_{n-1}) = [(a_n^2 + a_n - 2) - (a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 2)], \text{ 整理可得}$$

$$(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 1) = 0, \text{ 可得 } a_n - a_{n-1} = 1,$$

所以 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 2$ 为首项, $d = 1$ 为公差的等差数列,

所以 $a_n = 2 + (n-1) \times 1 = n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 由(1)得 $a_n = n+1$,

$$\text{所以 } b_n = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n},$$

$$\text{所以 } T_n = \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}\right) = \frac{2^{n+1}}{n+1} - 2.$$

(3) 假设存在实数 λ , 使得 $\frac{2^{n+1}}{n+1} > \lambda \frac{n(n+3)}{2}$ 对一切正整数恒成立,

即 $\lambda < \frac{2^{n+2}}{n(n+1)(n+3)}$ 对一切正整数恒成立, 只需满足 $\lambda < \left(\frac{2^{n+2}}{n(n+1)(n+3)}\right)_{\min}$ 即可,

$$\text{令 } f(n) = \frac{2^{n+2}}{n(n+1)(n+3)},$$

$$\text{则 } f(n+1) - f(n) = \frac{2^{n+1}(n^2-8)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

当 $n \geq 3$, $f(n+1) > f(n)$; $1 \leq n \leq 2$, $f(n+1) < f(n)$,

$$\text{故 } f(1) = 1, f(2) = \frac{8}{15}, f(3) = \frac{4}{9}, f(4) = \frac{16}{35} < f(5) < f(6) < \cdots,$$

当 $n=3$ 时有最小值 $f(3) = \frac{4}{9}$,

所以 $\lambda < \frac{4}{9}$.

【标注】【知识点】数列中的存在性问题;裂项相消法求和;消去 S_n 构造 a_n 递推关系