

高二期末

一、选择题

(本大题共8小题, 每小题3分, 共24分)

1. 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的准线方程为().
A. $y = -1$ B. $x = \frac{1}{16}$ C. $y = 1$ D. $x = -\frac{1}{16}$
2. 已知圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 的一条直径通过直线 $2x + y - 4 = 0$ 被圆所截弦的中点, 则该直径所在直线的方程为().
A. $x + 2y - 5 = 0$ B. $x - 2y - 5 = 0$ C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x + 2y + 5 = 0$
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_2 + a_6 = 9$, 则 S_5 的值为().
A. 10 B. 15 C. 30 D. 3
4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 > 0$, 公差 $d \neq 0$, 前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_3 = S_{15}$, 则 S_n 的最大项为().
A. S_7 B. S_8 C. S_9 D. S_{10}
5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q < 0$, 且 $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, 则 $\{a_n\}$ 的前2020项和等于().
A. 2020 B. -1 C. 1 D. 0
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为().
A. $a_n = \frac{n^2 + n}{2}$ B. $a_n = \frac{n^2 - n}{2}$ C. $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ D. $a_n = n^2 - n + 1$
7. 已知双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 4$, 过点 $A(3, 1)$ 作直线 l 与该双曲线交于 M, N 两点, 若点 A 恰好为 MN 中点, 则直线 l 的方程为().
A. $y = 3x - 8$ B. $y = -3x + 8$ C. $y = 3x - 10$ D. $y = -3x + 10$
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2 = 2py(p > 0)$ 交于 A, B 两点, 若 $|AF| + |BF| = 4|OF|$, 则该双曲线的渐近线方程为().
A. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ B. $y = \pm \frac{1}{3}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

二、填空题

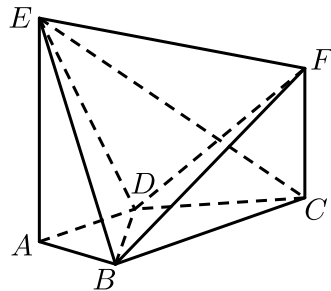
(本大题共6小题，每小题4分，共24分)

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_5 = 5$ ， $S_5 = 15$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前100项和为 _____ .
2. 记 S_n 为递增等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_1 = 1$ ， $S_4 = 5S_2$ ，则 $a_n =$ _____ .
3. 已知直线 $l: 4x - 3y + 8 = 0$ ，抛物线 $C: y^2 = 4x$ 图像上的一动点到直线 l 与它到抛物线准线距离之和的最小值为 _____ .
4. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别为 l_1, l_2 ，左焦点为 F ，若点 F 关于直线 l_1 的对称点 P 在 l_2 上，则双曲线的离心率为 _____ .
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - a\right)n + 2, & n > 8 \\ a^{n-7}, & n \leq 8 \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_n > a_{n+1}$ ，则实数 a 的取值范围是 _____ .
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \log_{n+2}(n+3), & n \geq 2, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$ ，定义使 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k (k \in \mathbf{N}^*)$ 为整数的 k 叫做“幸福数”，则区间 $[1, 2020]$ 内所有“幸福数”的和为 _____ .

三、解答题

(本大题共4小题，共52分)

1. 如图， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1$ ， $AE = BC = 2$ ， $CF = \frac{8}{7}$.



- (1) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值 .
- (2) 求平面 BDE 与平面 BDF 夹角的余弦值 .

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, F_1, F_2 分别为椭圆的左右焦点, P 为椭圆上任意一点.
- (1) 若 $|PF_1| - |PF_2| = 1$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.
- (2) 是否存在着直线 l , 使得当 l 经过椭圆左顶点 A 且与椭圆相交于点 B , 点 D 与点 B 关于 x 轴对称, 满足 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{20}{7}$, 若存在, 请求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

3. 在已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 2$, $a_4 + b_4 = 27$, $S_4 - b_4 = 10$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.
- (2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项的和 T_n .

4. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = a_n^2 + a_n - 2$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
- (2) 若 $b_n = \frac{2^n(n-1)}{na_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (3) 是否存在实数 λ 使得 $T_n + 2 > \lambda S_n$, 对 $n \in \mathbf{N}^+$ 恒成立, 若存在, 求实数 λ 的取值范围, 若不存在说明理由.

