

高一上大题练习

1. 已知二次函数 $f(x)$ 的最小值为1, 且 $f(0) = f(2) = 3$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[3a, a+1]$ 上不单调, 求实数 a 的取值范围.

(3) 在区间 $x \in [-1, 1]$ 上, $y = f(x)$ 的图象恒在 $y = 2x + 2m + 1$ 的图象上方, 试确定实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

(2) $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

(3) $(-\infty, -1)$.

【解析】 (1) 根据 $f(0) = f(2) = 3$ 知, $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$, $f(x)$ 的最小值为1;

$$\therefore f(x) = a(x-1)^2 + 1,$$

$$\therefore f(0) = a + 1 = 3;$$

$$\therefore a = 2;$$

$$\therefore f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3.$$

(2) $f(x)$ 在区间 $[3a, a+1]$ 上不单调;

$$\therefore 3a < 1 < a+1$$

$$\therefore a \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

(3) 若在区间 $x \in [-1, 1]$ 上, $y = f(x)$ 的图象恒在 $y = 2x + 2m + 1$ 的图象上方,

$$2(x-1)^2 + 1 > 2x + 2m + 1,$$

即 $m < x^2 - 3x + 1$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立;

$y = x^2 - 3x + 1$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减;

$\therefore x = 1$ 时, y 取最小值 -1 ;

$$\therefore m < -1;$$

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, -1)$.

【标注】 【知识点】 单调性；定轴动区间求值域

2. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最大值和最小值.

(3) 若关于 x 的不等式 $mf(x) + 3m \geq f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) π .

(2) 最小值为 $-\sqrt{2}$, 最大值为 2.

(3) $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$.

【解析】 (1) $f(x) = 2 \sin x \cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}$

$$= \sin 2x - \sqrt{3}(1 + \cos 2x) + \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right)$$

$$= 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x \right)$$

$$= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{故 } f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时,

$$2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right],$$

$$\therefore f(x)_{\min} = 2 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

$$f(x)_{\max} = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2,$$

即 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 $-\sqrt{2}$, 最大值为 2.

(3) 由 (1) 知: $f(x) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\text{故 } f(x) \in [-2, 2],$$

不等式 $mf(x) + 3m \geq f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $m[f(x) + 3] \geq f(x)$ ，

$$m \geq \frac{f(x)}{f(x) + 3},$$

$$\therefore m \geq \left(\frac{f(x)}{f(x) + 3} \right)_{\max},$$

$$\frac{f(x)}{f(x) + 3} = \frac{f(x) + 3 - 3}{f(x) + 3} = 1 - \frac{3}{f(x) + 3},$$

$$\therefore f(x) \in [-2, 2],$$

$$\therefore f(x) + 3 \in [1, 5],$$

$$\therefore \frac{3}{f(x) + 3} \in \left[\frac{3}{5}, 3 \right],$$

$$1 - \frac{3}{f(x) + 3} \in \left[-2, \frac{2}{5} \right],$$

$$\text{故} \left(\frac{f(x)}{f(x) + 3} \right)_{\max} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore m \geq \frac{2}{5},$$

故 m 的取值范围是： $\left[\frac{2}{5}, +\infty \right)$ 。

【标注】 【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；函数的值域；求固定区间正弦型函数值域；正弦函数的图象和性质；辅助角公式

3. 已知函数 $f(x) = (2\log_4 x - 2)\left(\log_4 x + \frac{1}{2}\right)$ 。

(1) 当 $x \in [1, 16]$ 时，求该函数的值域。

(2) 求不等式 $f(x) > 2$ 的解集。

(3) 若 $f(x) < m\log_4 x$ 对于 $x \in [4, 16]$ 恒成立，求 m 的取值范围。

【答案】 (1) 当 $x \in [1, 16]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{9}{8}, 5\right]$ 。

(2) $f(x) > 2$ 的解集为 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ 或 } x > 8\right\}$ 。

(3) $m > \frac{5}{2}$ 时， $f(x) < m\log_4 x$ 对于 $x \in [4, 16]$ 恒成立。

【解析】 (1) 令 $t = \log_4 x$ ， $x \in [1, 16]$ ，则 $t \in [0, 2]$ ，

函数 $f(x)$ 转化为 $y = (2t - 2)\left(t + \frac{1}{2}\right)$, $t \in [0, 2]$,

则二次函数 $y = (2t - 2)\left(t + \frac{1}{2}\right)$,

在 $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{4}, 2\right]$ 上单调递增,

所以当 $t = \frac{1}{4}$ 时, y 取到最小值为 $-\frac{9}{8}$,

当 $t = 2$ 时, y 取到最大值为5,

故当 $x \in [1, 16]$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{9}{8}, 5\right]$.

(2) 由题得 $(2\log_4 x - 2)\left(\log_4 x + \frac{1}{2}\right) - 2 > 0$, 令 $t = \log_4 x$,

则 $(2t - 2)\left(t + \frac{1}{2}\right) - 2 > 0$, 即 $2t^2 - t - 3 > 0$,

解得 $t > \frac{3}{2}$ 或 $t < -1$,

当 $t > \frac{3}{2}$ 时,

即 $\log_4 x > \frac{3}{2}$,

解得 $x > 8$,

当 $t < -1$ 时,

即 $\log_4 x < -1$,

解得 $0 < x < \frac{1}{4}$,

故不等式 $f(x) > 2$ 的解集为 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ 或 } x > 8\right\}$.

(3) 由于 $(2\log_4 x - 2)\left(\log_4 x + \frac{1}{2}\right) < m\log_4 x$ 对于 $x \in [4, 16]$ 上恒成立,

令 $t = \log_4 x$, $x \in [4, 16]$,

则 $t \in [1, 2]$,

即 $(2t - 2)\left(t + \frac{1}{2}\right) < mt$ 在 $t \in [1, 2]$ 上恒成立,

所以 $m > 2t - \frac{1}{t} - 1$ 在 $t \in [1, 2]$ 上恒成立,

因为函数 $y = -\frac{1}{t}$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

$y = 2t$ 也在 $[1, 2]$ 上单调递增,

所以函数 $y = 2t - \frac{1}{t} - 1$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 它的最大值为 $\frac{5}{2}$,

故 $m > \frac{5}{2}$ 时, $f(x) < m\log_4 x$ 对于 $x \in [4, 16]$ 恒成立.

【标注】【知识点】用单调性观察法求值域; 求复合函数的值域; 单调性; 不等式中的恒成立与能成立问题

4. 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$ ($x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$)是奇函数.

(1) 求 a 的值.

(2) 求证: 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

(3) 若 $f(2m - t^2 - 1) < f(2 - m + 2t)$ 对任意 $t \in [-2, 0]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$.

(2) 证明见解析.

(3) $m < \frac{2}{3}$.

【解析】 (1) $\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$\therefore$ 若函数为奇函数时, $f(0) = a - \frac{1}{2^0 + 1} = 0, \therefore a = \frac{1}{2}$,

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x + 1} = \frac{2^x - 1}{2(2^x + 1)}$,

$\therefore f(-x) = -\frac{2^x - 1}{2(2^x + 1)} = -f(x)$, 符合题意.

因此, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 证明: 求导函数可得 $f'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(2^x + 1)^2}$,

$\because (2^x + 1)^2 > 0, 2^x > 0, \ln 2 > 0$,

$\therefore f'(x) > 0$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

$\therefore$ 不论 a 为何实数 $f(x)$ 总是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(3) 由(1)(2)得 $f(x)$ 是奇函数且函数在 $\mathbf{R}$ 上递增, 则 $2m - t^2 - 1 < 2 - m + 2t, t \in [-2, 0]$,

则 $m < \frac{(t+1)^2}{3} + \frac{2}{3}, t \in [-2, 0]$, 设函数 $g(t) = \frac{1}{3}(t+1)^2 + \frac{2}{3}, t \in [-2, 0]$, $g(t)$

在 $[-2, -1]$ 上递减, 在 $(-1, 0]$ 上递增, 则 $g(t)_{\min} = g(-1) = \frac{2}{3}$, 则 $m < \frac{2}{3}$.

【标注】 【知识点】单调性; 利用函数奇偶性求函数解析式; 利用导数证明不等式恒成立问题; 利用导数求函数的单调性、单调区间

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数 $y = f(x)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(1) 求 $f(0)$ 的值.

(2) 求证 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 若 $f(k \cdot 2^x) + f(4^{x+1} - 8^x - 2^x) > 0$ 对任意 $x \in [-1, 2]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) 0 .

(2) 证明见解析 .

(3) $k > -\frac{3}{4}$.

【解析】 (1) 在 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中 ,

令 $x = y = 0$,

得 $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$,

则 $f(0) = 0$.

(2) 令 $y = -x$,

得 $f(x-x) = f(x) + f(-x)$,

即 $f(0) = f(x) + f(-x) = 0$,

即证得 $f(x)$ 为奇函数 .

(3) $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 且是奇函数 ,

$\therefore f(k \cdot 2^x) > -f(4^{x+1} - 8^x - 2^x)$

$= f(-4^{x+1} + 8^x + 2^x)$,

$\therefore k \cdot 2^x > -4^{x+1} + 8^x + 2^x$,

$\therefore k > -2^{x+2} + 4^x + 1$

$= 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$

$= (2^x - 2)^2 - 3$,

令 $g(x) = (2^x - 2)^2 - 3$, 且 $x \in [-1, 2]$,

则 $g(x)$ 在 $[-1, 2]$ 的最大值为 $g(-1) = -\frac{3}{4}$,

$\therefore k > -\frac{3}{4}$.

【标注】 【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题 ; 解析法 ; 复合函数 ; 抽象函数

6. 求下列各式中参数的取值范围 .

(1) 已知不等式 $mx^2 - 2x + m - 2 < 0$ 对于任意的实数 x 恒成立, 求 m 的取值范围 .

(2) 已知 $y = mx^2 - mx + m - 6$, 若对于 $1 \leq m \leq 3$, $y < 0$ 恒成立 , 求实数 x 的取值范围 .

【答案】 (1) $m < 1 - \sqrt{2}$.

$$(2) \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

【解析】 (1) ① $m = 0$,

$$-2x - 2 < 0 ,$$

$$\therefore x > -1 ,$$

与题干矛盾 ;

$$\textcircled{2} \begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} ,$$

$$4 - 4m(m - 2) < 0 ,$$

$$m^2 - 2m - 1 > 0 ,$$

$$m < 1 - \sqrt{2} \text{ 或 } m > 1 + \sqrt{2} ,$$

$$\text{综上} , m < 1 - \sqrt{2} .$$

(2) $\because \forall m \in [1, 3]$, $y < 0$ 恒成立 ,

$$\therefore m(x^2 - x + 1) < 6 \text{ 对 } \forall m \in [1, 3] \text{ 恒成立} ,$$

$$\therefore (x^2 - x + 1) < \frac{6}{m} \text{ 对 } \forall m \in [1, 3] \text{ 恒成立} ,$$

$$\therefore x^2 - x + 1 < \left(\frac{6}{m} \right)_{\min} = 2 ,$$

$$\therefore x^2 - x - 1 < 0 ,$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} .$$

【标注】 【知识点】 转换主元法求参数范围

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 , 且当 $x > 0$ 时 , $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式 .

(2) 若 $g(x) = kx - k$, 若对任意的 $x \in (2, 4)$ 都有 $g(x) > f(x)$ 成立 , 求实数 k 的取值范围 .

【答案】 (1) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}$.

(2) $k \geq \frac{10}{3}$.

【解析】 (1) 对任取 $x < 0$, $-x > 0$,

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 2$$

$$= x^2 + 2x + 2,$$

又 $\because f(x)$ 为奇函数,

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -x^2 - 2x - 2,$$

$$f(0) = 0,$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}.$$

$$\text{故答案为: } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 0 \end{cases}.$$

(2) $\because g(x) > f(x)$ 对 $\forall x \in (2, 4)$ 恒成立,

$$\therefore kx - k > x^2 - 2x + 2 \text{ 对 } \forall x \in (2, 4) \text{ 恒成立},$$

$$\therefore k(x - 1) > x^2 - 2x + 2 \text{ 对 } \forall x \in (2, 4) \text{ 恒成立},$$

$$\therefore x \in (2, 4),$$

$$\therefore x - 1 > 0,$$

$$\therefore k > \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \text{ 对 } \forall x \in (2, 4) \text{ 恒成立},$$

$$\therefore k > \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)_{\max},$$

$$\text{设 } x - 1 = A (A \in (1, 3)),$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1} = \frac{A^2 + 1}{A} = A + \frac{1}{A},$$

$$\therefore A + \frac{1}{A} \text{ 在 } (1, 3) \text{ 上单增},$$

$$\therefore A + \frac{1}{A} < 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\therefore k \geq \frac{10}{3}.$$

$$\text{故答案为: } k \geq \frac{10}{3}.$$

【标注】 【知识点】 利用函数奇偶性求函数解析式；不等式中的恒成立与能成立问题

8. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 18 \geq 0\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x+5}{x-14} \leq 0\right\}$.

(1) 求 $(\complement_U B) \cap A$.

(2) 若集合 $C = \{x | 2a < x < a+1\}$, 且 $B \cap C = C$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $(-\infty, -5) \cup [14, +\infty)$

(2) $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$

【解析】 (1) 解: 全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 18 \geq 0\}$

$$= (-\infty, -3] \cup [6, +\infty),$$

$$B = \left\{x \mid \frac{x+5}{x-14} \leq 0\right\} = [-5, 14),$$

$$\therefore \complement_U B = (-\infty, -5) \cup [14, +\infty),$$

$$\therefore (\complement_U B) \cap A = (-\infty, -5) \cup [14, +\infty).$$

(2) 解: $\because B \cap C = C$,

$$\therefore C \subseteq B,$$

当 $C = \emptyset$ 时, $2a \geq a+1$, 解得 $a \geq 1$;

$$\text{当 } C \neq \emptyset \text{ 时, } \begin{cases} 2a < a+1 \\ a+1 \leq 14 \\ 2a \geq -5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } -\frac{5}{2} \leq a < 1,$$

$$\text{综上, 实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

【标注】 【知识点】交、并、补集混合运算; 离散型集合关系中的含参问题

9. 设集合 $A = \{x | (x-2m+1)(x-m+2) < 0\}$, $B = \{x | 1 \leq x+1 \leq 4\}$.

(1) 若 $m = 1$, 求 $A \cap B$.

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 m 的取值集合.

【答案】 (1) $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 1\}$.

(2) $\{-1, 2\}$.

【解析】 (1) 集合 $B = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$,

若 $m = 1$, 则 $A = \{x | -1 < x < 1\}$,

则 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 1\}$.

(2) 当 $A = \emptyset$ 即 $m = -1$ 时, $A \cap B = A$,

当 $A \neq \emptyset$ 即 $m \neq -1$ 时,

(i) 当 $m < -1$ 时, $A = (2m - 1, m - 2)$, 要使得 $A \cap B = A$, $A \subseteq B$,

只要 $\begin{cases} 2m - 1 \geq 0 \\ m - 2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 5$, 所以 m 的值不存在.

(ii) 当 $m > -1$ 时, $A = (m - 2, 2m - 1)$, 要使得 $A \cap B = A$, $A \subseteq B$,

只要 $\begin{cases} m - 2 \geq 0 \\ 2m - 1 \leq 3 \end{cases}, \therefore m = 2$.

综上所述, m 的取值集合是 $\{-1, 2\}$.

【标注】 【知识点】连续性集合运算中的含参问题

10. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 9x + 18 \geq 0\}$, $B = \left\{x | y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \lg(9-x)\right\}$.

(1) 求 $A \cup B$, $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$.

(2) 已知 $C = \{x | a < x < a + 1\}$ 若 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $A \cup B = \mathbf{R}$; $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 3 < x < 6\}$.

(2) $-2 \leq a \leq 8$.

【解析】 (1) 由题意得 $A = \{x | x \leq 3 \text{ 或 } x \geq 6\}$, $B = \{x | -2 < x < 9\}$,

$A \cup B = \mathbf{R}$, $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | 3 < x < 6\}$,

$$\therefore (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 3 < x < 6\}.$$

$$(2) \because C = \{x | a < x < a + 1\}, \text{ 且 } C \subseteq B,$$

$$\therefore \begin{cases} a \geq -2 \\ a + 1 \leq 9 \end{cases},$$

$\therefore$ 所求实数 a 的取值范围是： $-2 \leq a \leq 8$.

【标注】 【知识点】连续性集合关系中的含参问题；交、并、补集混合运算

11. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + 4$, $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 若函数 $f(x) < 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x < 4\}$, 求不等式 $\frac{x-a}{x-b} \leq 0$ 的解集.

(2) 若 $b = -2(a+1)$, 当 $a \geq 0$ 时, 解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$.

【答案】 (1) $x \in (-5, 1]$.

(2) 当 $a = 0$ 时, $x < 2$,

$0 < a < 1$ 时,

$x > \frac{2}{a}$ 或 $x < 2$,

$a = 1$, $x \neq 2$,

$a > 1$ 时, $x > 2$ 或 $x < \frac{2}{a}$.

【解析】 (1) $\because f(x) < 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x < 4\}$,

$\therefore 1$ 和 4 是方程 $ax^2 + bx + 4 = 0$ 的 2 根,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{a} = 1 + 4 \\ \frac{4}{a} = 1 \times 4 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases},$$

$$\frac{x-a}{x-b} \leq 0,$$

$$\frac{x-b}{x-1} \leq 0,$$

$$\frac{x+5}{x+1} \leq 0,$$

$$\begin{cases} (x+1)(x+5) \leq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases},$$

$$-5 < x \leq 1,$$

$$x \in (-5, 1] .$$

$$(2) \because b = -2(a+1) ,$$

$$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x + 4$$

$$= (ax-2)(x-2) ,$$

当 $a = 0$ 时 ,

$$-2x + 4 > 0 ,$$

$$x < 2 ,$$

当 $a > 0$ 时 ,

$$\therefore \frac{2}{a} > 2 \text{ 时即 } 0 < a < 1 \text{ 时 ,}$$

$$x > \frac{2}{a} \text{ 或 } x < 2 ,$$

$$(1) \frac{2}{a} = 2 \text{ 时即 } a = 1 ,$$

$$x \neq 2 ,$$

$$(2) \frac{2}{a} < 2 \text{ 即 } a > 1 \text{ 时 ,}$$

$$x > 2 \text{ 或 } x < \frac{2}{a} .$$

【标注】 【知识点】解不等式中的分类讨论；已知解集求参问题

12. 设函数 $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$.

(1) 若 $f(1) = 3$, 且 $a > 0$, $b > 0$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值 .

(2) 若 $f(1) = 2$, 且 $f(x) > 2$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立 , 求实数 a 的取值范围 .

【答案】 (1) $\frac{9}{2}$.

(2) $[-1, 1]$.

【解析】 (1) $f(1) = 3$ 得 $a + b = 2$,

$$\because a > 0 , b > 0 ,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b} &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{4a}{b}} \right) = \frac{9}{2},$$

当且仅当 $b = 2a$ 时取得等号,

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$.

(2) $f(1) = 2$,

则 $a + b - 2 + 3 = 2$,

即 $b = -a + 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = ax^2 + (b - 2)x + 3$

$= ax^2 + (-a - 1)x + 3$,

且 $f(x) > 2$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立,

当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x + 3$,

$f(-1) = 4 > 2$, 符合题意,

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 开口向下, 对称轴 $x = \frac{a+1}{2a}$,

由题意得: $\frac{a+1}{2a} \leq \frac{-1+1}{2} = 0$,

解得: $-1 \leq a < 0$,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 开口向上, 对称轴 $x = \frac{a+1}{2a}$,

由题意得: $\frac{a+1}{2a} \geq 1$,

解得: $0 < a \leq 1$,

综上所述: 实数 a 的取值范围为 $[-1, 1]$.

【标注】 【知识点】二次函数相关的恒成立问题; 含参二次函数的图象及性质; 基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

13. $A = \{x | x^2 - (3a + 3)x + 2(3a + 1) < 0, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \left\{x \mid \frac{x - 2a}{x - (a^2 + 1)} < 0, x \in \mathbf{R}\right\}$.

(1) 当 $4 \notin B$ 时, 求实数 a 的取值范围.

(2) 求使 $B \subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

【答案】 (1) $a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [2, +\infty)$.

$$(2) a \in [1, 3] \cup \{-1\}.$$

【解析】(1) 当 $4 \notin B$,

$$\therefore \frac{4-2a}{4-(a^2+1)} > 0,$$

$$\therefore (4-2a)(3-a^2) > 0,$$

$$\therefore (a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})(a-2) > 0,$$

$$\therefore a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [2, +\infty).$$

$$(2) x^2 - (3a+3)x + 2(3a+1) < 0,$$

$$\therefore (x-2)[x-(3a+1)] < 0,$$

$$\frac{x-2a}{x-(a^2+1)} < 0,$$

$$\therefore 2a < x < a^2+1,$$

$$\therefore B \subseteq A.$$

$$\textcircled{1} 3a+1 > 2 \text{ 时, 即 } a > \frac{1}{3},$$

$$A = (2, 3a+1),$$

$$\therefore \begin{cases} 2a \geq 2 \\ a^2+1 \leq 3a+1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a \geq 1 \\ 0 \leq a \leq 3 \end{cases},$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 3,$$

$$\textcircled{2} 3a+1 < 2 \text{ 时, 即 } a < \frac{1}{3},$$

$$\therefore A = (3a+1, 2),$$

$$\therefore \begin{cases} 3a+1 \leq 2a \\ a^2+1 \leq 2 \end{cases},$$

$$\therefore a = -1.$$

$$\textcircled{3} 3a+1 = 2 \text{ 时,}$$

$$A = \emptyset, \text{ 不成立.}$$

$$\text{综上, } a \in [1, 3] \cup \{-1\}.$$

【标注】【知识点】分式不等式；子集；集合关系中的含参问题

$$14. \text{ 已知集合 } A = \{x | x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0\}, B = \left\{x \left| \frac{x-2}{x-1} < 0 \right.\right\}.$$

$$(1) \text{ 若 } a = 1, \text{ 求 } A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B).$$

$$(2) \text{ 已知命题 } p: x \in A, \text{ 命题 } q: x \in B, \text{ 若命题 } p \text{ 的充分不必要条件是命题 } q, \text{ 求实数 } a \text{ 的取值范围.}$$

$$(3) \text{ 求不等式 } x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0 \text{ 的解集.}$$

【答案】(1) $A \cap (\complement_R B) = \{x | 2 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x = 1\}$.

(2) $(-\infty, 1]$.

(3) 当 $a > 3$ 时, 不等式解为 $[3, a]$;

当 $a = 3$ 时, 不等式解为 $\{3\}$;

当 $a < 3$ 时, 不等式解为 $[a, 3]$.

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, 集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$,

$\therefore$ 对于不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$,

解得: $1 \leq x \leq 3$,

$\therefore$ 集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$,

$\therefore$ 对于不等式 $\frac{x-2}{x-1} < 0$, 解得: $1 < x < 2$,

$\therefore$ 集合 $B = \{x | 1 < x < 2\}$,

$\therefore \complement_R B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$,

$\therefore A \cap (\complement_R B) = \{x | 2 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x = 1\}$.

(2) 对于不等式 $x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-a) \leq 0$,

① $a > 3$ 时, 不等式解为 $3 \leq x \leq a$;

② $a = 3$ 时, 不等式解为 $x = 3$;

③ $a < 3$ 时, 不等式解为 $a \leq x \leq 3$,

由 (1) 可得集合 $B = \{x | 1 < x < 2\}$,

$\therefore$ 命题 q 是命题 p 的充分不必要条件,

$\therefore B \subseteq A$,

i 当 $a > 3$ 时, $A = [3, a]$, 与 $B \subseteq A$ 矛盾;

ii 当 $a = 3$ 时, $A = \{3\}$, 与 $B \subseteq A$ 矛盾;

iii 当 $a < 3$ 时, $A = [a, 3]$, 则 $a \leq 1$,

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

(3) 不等式 $x^2 - (3+a)x + 3a \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-a) \leq 0$,

① 当 $a > 3$ 时, 不等式解为 $[3, a]$;

② 当 $a = 3$ 时, 不等式解为 $\{3\}$;

③当 $a < 3$ 时, 不等式解为 $[a, 3]$,

综上所述, 当 $a > 3$ 时, 不等式解为 $[3, a]$;

当 $a = 3$ 时, 不等式解为 $\{3\}$;

当 $a < 3$ 时, 不等式解为 $[a, 3]$.

【标注】 【知识点】充要条件与不等式结合; 解不等式中的分类讨论; 交、并、补集混合运算

15. 已知不等式 $\log_2(ax^2 - 3x + 6) > 2$ 的解集是 $\{x|x < 1 \text{ 或 } x > b\}$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 解不等式 $\frac{c-x}{ax+b} > 0$.

【答案】 (1) $a = 1$;

$$b = 2.$$

(2) (i) $c > -2$,

$$-2 < x < c.$$

(ii) $c = -2$,

解集为 $\emptyset$.

(iii) $c < -2$,

$$c < x < -2.$$

【解析】 (1) $\because \log_2(ax^2 - 3x + 6) > 2$,

$$\therefore ax^2 - 3x + 6 > 4,$$

$$\therefore ax^2 - 3x + 2 > 0,$$

$\therefore$ 其解集为 $x < 1$ 或 $x > b$,

$\therefore 1$ 和 b 是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的2根,

$$\therefore 1 + b = \frac{3}{a},$$

$$1 \cdot b = \frac{2}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{a} = 1,$$

$$a = 1,$$

$$b = 2.$$

$$(2) \because \frac{c-x}{x+2} > 0,$$

$$\therefore (x+2)(c-x) > 0,$$

$$\therefore (x+2)(x-c) < 0.$$

$$(i) c > -2,$$

$$-2 < x < c.$$

$$(ii) c = -2,$$

解集为 $\emptyset$.

$$(iii) c < -2,$$

$$c < x < -2.$$

【标注】 【知识点】已知解集求参问题；含字母系数的不等式

16. 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{m-1}{2^x} (m \in \mathbf{R})$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求 m 的值.

(2) 根据函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 若对 $\forall x \in [-1, 1]$, 不等式 $f(3x^2 + 1) + f(kx - x^2) \geq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【答案】 (1) 2.

(2) 证明见解析.

(3) $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

【解析】 (1) 因为 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(-x) = -f(x)$,

$$\text{即: } 2^{-x} - \frac{m-1}{2^{-x}} = -\left(2^x - \frac{m-1}{2^x}\right),$$

$$\text{整理得: } -(m-1)2^x + \frac{1}{2^x} = -2^x + \frac{m-1}{2^x},$$

解得, $m = 2$.

(2) $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned}
 \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \left(2^{x_1} - \frac{1}{2^{x_1}}\right) - \left(2^{x_2} - \frac{1}{2^{x_2}}\right) \\
 &= (2^{x_1} - 2^{x_2}) - \left(\frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}}\right) \\
 &= (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}}\right),
 \end{aligned}$$

由 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 得 $2^{x_1} > 0, 2^{x_2} > 0$,

所以 $1 + \frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} > 0$,

又由 $x_1 < x_2$, 得 $2^{x_1} < 2^{x_2}$,

所以, $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$.

于是 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

(3) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 由 $f(3x^2 + 1) + f(kx - x^2) \geq 0$ 得,

$$f(3x^2 + 1) \geq f(x^2 - kx),$$

由(2)可知, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

所以, 对任意 $x \in [-1, 1]$, 不等式 $f(3x^2 + 1) \geq f(x^2 - kx)$ 恒成立,

等价于 $2x^2 + kx + 1 \geq 0$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上恒成立,

设 $g(x) = 2x^2 + kx + 1, x \in [-1, 1]$, 即: $g(x)_{\min} \geq 0$,

$g(x)$ 的对称轴为 $x = -\frac{k}{4}$.

① 当 $-\frac{k}{4} \leq -1$ 时, 即 $k \geq 4$ 时, 则 $g(x)_{\min} = g(-1) = 3 - k \geq 0$, 无解;

② 当 $-1 < -\frac{k}{4} < 1$ 时, 即 $-4 < k < 4$ 时, 则 $g(x)_{\min} = g\left(-\frac{k}{4}\right) = 1 - \frac{k^2}{8} \geq 0$,

得, $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$;

③ 当 $-\frac{k}{4} \geq 1$ 时, 即 $k \leq -4$ 时, 则 $g(x)_{\min} = g(1) = 3 + k \geq 0$, 无解.

综上, 实数 k 的取值范围是 $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

【标注】 【知识点】用定义法证明函数的单调性; 利用函数奇偶性求函数解析式; 二次函数相关的恒成立问题

17. 设函数 $f(x) = kx^2 - kx - 1$.

(1) 若对于一切实数, $f(x) < 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

(2) 对于 $x \in [1, 3]$, $f(x) < -k + 5$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) $-4 < k \leq 0$.

(2) $k < \frac{6}{7}$.

【解析】 (1) $\because kx^2 - kx - 1 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立 ,

$\therefore k = 0$, $-1 < 0$ 满足 ,

$\therefore k \neq 0$,

$$\begin{cases} k < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} ,$$

$$k^2 + 4k < 0 ,$$

$$k(k + 4) < 0 ,$$

$$-4 < k < 0 ,$$

综上 $-4 < k \leq 0$.

(2) $\because kx^2 - kx - 1 < -k + 5$ 对 $\forall x \in [1, 3]$ 恒成立 ,

$\therefore k(x^2 - x + 1) < 6$ 对 $\forall x \in [1, 3]$ 恒成立 ,

$$\text{又} \because x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 ,$$

$$\therefore k < \left(\frac{6}{x^2 - x + 1}\right)_{\min} ,$$

$\because x^2 - x + 1$ 对称轴为 $\frac{1}{2}$,

当 $x = 3$ 时 , $x^2 - x + 1$ 最大 ,

$$\therefore k < \frac{6}{7} .$$

【标注】 【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；已知解集求参问题

18. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 + 2$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 的最小值 .

(3) 关于 x 的方程 $f(x) = 2a^2$ 有解 , 求实数 a 的取值范围 .

【答案】(1) 单调递增区间为 $[1, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(-\infty, 1]$ 。

$$(2) \quad f_{\min}(x) = \begin{cases} 2a^2 + 3a + \frac{17}{4}, & a \leq -\frac{3}{2} \\ a^2 + 2, & -\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2} \\ 2a^2 - 3a + \frac{17}{4}, & a \geq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

(3) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ 。

【解析】(1) 由题可知： $f(x) = x^2 - 2x + 4$ ，对称轴为 $x = 1$ ，开口向上，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[1, +\infty)$ ，单调递减区间为 $(-\infty, 1]$ 。

(2) 由题可知：

$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 + 2$ ， $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ，对称轴为 $x = a$ ，开口向上，

当 $a \leq -\frac{3}{2}$ 时，函数在 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 单调递增，

所以 $f_{\min}(x) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2a^2 + 3a + \frac{17}{4}$ ，

当 $-\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2}$ 时，函数在 $\left(-\frac{3}{2}, a\right)$ 单调递减，在 $\left(a, \frac{3}{2}\right)$ 单调递增，

所以 $f_{\min}(x) = f(a) = a^2 + 2$ ，

当 $a \geq \frac{3}{2}$ 时，

函数在 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 单调递减，所以 $f_{\min}(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2a^2 - 3a + \frac{17}{4}$ ，

则函数在区间 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 的最小值为 $f_{\min}(x) = \begin{cases} 2a^2 + 3a + \frac{17}{4}, & a \leq -\frac{3}{2} \\ a^2 + 2, & -\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2} \\ 2a^2 - 3a + \frac{17}{4}, & a \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ 。

(3) 由 $x^2 - 2ax + 2a^2 + 2 = 2a^2$ ，

则 $x^2 - 2ax + 2 = 0$ ，

由关于 x 的方程 $f(x) = 2a^2$ 有解，

则 $x^2 - 2ax + 2 = 0$ 有解，

所以 $\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 2 \geq 0 \Rightarrow a \leq -\sqrt{2}$ 或 $a \geq \sqrt{2}$ ，

则 $a \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ 。

【标注】 【知识点】 一元二次方程根的分布；二次函数的单调性；动轴定区间求值域

19. 已知函数 $f(x) = x \cos x + \sin x$ 。

(1) 证明： $f(x)$ 为奇函数。

(2)

直线 $x = a$ 和直线 $x = a + \pi$ 分别与 $y = f(x)$ 的图象交于点 M, N , 记线段 MN 中点 P 的坐标为 (x_0, y_0) , 求证: $y_0 = -\frac{\pi}{2} \sin x_0$.

(3) 记 m, n 为 $f(x) = 0$ 的两个相邻的零点, 求证: $|m - n| < \pi$.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 证明见解析.

【解析】 (1) 由题可知 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \therefore f(-x) &= -x \cdot \cos(-x) + \sin(-x) = -x \cdot \cos x - \sin x \\ &= -(x \cos x + \sin x) = -f(x), \\ \therefore f(x) &\text{是奇函数}. \end{aligned}$$

(2) 根据题意可知, $f(a) = a \cdot \cos a + \sin a$,

$$\begin{aligned} f(a + \pi) &= (a + \pi) \cdot \cos(a + \pi) + \sin(a + \pi) \\ &= (a + \pi) \cdot (-\cos a) - \sin a \\ &= -(a + \pi) \cdot \cos a - \sin a \\ &= -a \cdot \cos a - \sin a - \pi \cos a \\ &= -f(a) - \pi \cdot \cos a, \end{aligned}$$

$\therefore$ 点 M 坐标为 $(a, a \cos a + \sin a)$,

点 N 坐标为 $(a + \pi, -(a + \pi) \cos a - \sin a)$,

$$\therefore \text{线段 } MN \text{ 的中点 } P \text{ 坐标为 } \begin{cases} x_0 = \frac{a + a + \pi}{2} = a + \frac{\pi}{2} \\ y_0 = \frac{-\pi \cdot \cos a}{2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos a \end{cases},$$

$$\therefore y_0 = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(x_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin x_0.$$

(3) 由题可知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且由 (1) 可知,

$f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(0) = 0,$$

则当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(\pi) = \pi \cdot \cos \pi + \sin \pi = -\pi$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$\therefore$ 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时,

若 $f(x) = 0$, 则 $-x \cos x = \sin x$,

即 $\tan x = -x$,

作出函数 $y = \tan x$, $y = -x$ 的图象通过图象可以看出,

两个函数的两个相邻交点横坐标的距离小于 π ,

记 m, n 为 2 个相邻零点,

$\therefore |m - n| < \pi$,

即 $f(x) = 0$ 时, 两个相邻零点 $|m - n| < \pi$.

【标注】 【知识点】利用定义判断函数奇偶性; 函数零点的概念; 零点、交点、根的等价转化

20. 已知函数 $f(x) = \ln(x + a)$ ($a \in \mathbf{R}$) 的图象过点 $(1, 0)$, $g(x) = x^2 - 2e^{f(x)}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 若函数 $y = f(x) + \ln(2x - k)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有零点, 求整数 k 的值.

(3) 设 $m > 0$, 若对于任意 $x \in \left[\frac{1}{m}, m\right]$, 都有 $g(x) < -\ln(m - 1)$, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $f(x) = \ln x$.

(2) 2 或 3.

(3) $(1, 2)$.

【解析】 (1) 将 $(1, 0)$ 代入 $y = \ln(x + a)$, 得 $0 = \ln(1 + a)$,

解得 $a = 0$,

$\therefore f(x) = \ln x$.

(2) $y = f(x) + \ln(2x - k)$

$= \ln x + \ln(2x - k)$

$= \ln x(2x - k)$

$= \ln(2x^2 - kx)$,

令 $\ln(2x^2 - kx) = 0$,

$\therefore 2x^2 - kx = 1$,

$$\text{设 } h(x) = 2x^2 - kx - 1,$$

$y = h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上有零点,

$$\therefore h(1) \cdot h(2) < 0$$

$$h(1) = 1 - k, \quad h(2) = 7 - 2k,$$

$$(1 - k)(7 - 2k) < 0, \quad 1 < k < \frac{7}{2},$$

$\therefore k$ 的值为 2 或 3.

$$(3) \because m > 0 \text{ 且 } m > \frac{1}{m},$$

$$\therefore m > 1, \text{ 且 } 0 < \frac{1}{m} < 1,$$

$$g(x) = x^2 - 2e^{f(x)} = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1,$$

$\therefore g(x)$ 最大值可能是 $g(m)$ 或 $g\left(\frac{1}{m}\right)$.

$$\therefore g(m) - g\left(\frac{1}{m}\right) = m^2 - 2m - \left(\frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right)$$

$$= m^2 - \frac{1}{m^2} - \left(2m - \frac{2}{m}\right)$$

$$= \left(m - \frac{1}{m}\right) \left(m + \frac{1}{m} - 2\right)$$

$$= \left(m - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m}$$

$$= \left(m - \frac{1}{m}\right) \frac{(m - 1)^2}{m} > 0,$$

$$\therefore g(x)_{\max} = g(m) = m^2 - 2m,$$

$$\therefore \text{任意 } x \in \left[\frac{1}{m}, m\right], \quad g(x) < -\ln(m - 1),$$

$$\therefore g(x)_{\max} = m^2 - 2m < -\ln(m - 1),$$

$$\text{即 } m^2 - 2m + \ln(m - 1) < 0,$$

$$\text{设 } h(m) = m(m - 2) + \ln(m - 1) (m > 1),$$

$h(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 且 $h(2) = 0$,

$$\therefore h(m) = m(m - 2) + \ln(m - 1) < 0 = h(2),$$

$$\text{即 } h(m) < h(2),$$

$$\therefore 1 < m < 2,$$

即 m 的取值范围是 $(1, 2)$.

【标注】 **【知识点】** 已知零点情况求参数的取值范围; 对数函数的图象及性质; 定轴动区间求值域