

选填训练三

1. 设全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = (\quad)$.
- A. $\{-1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 3\}$

【答案】A

【解析】 $\because$ 全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$,

$\therefore \complement_U A = \{-1, 3\}$,

$\therefore (\complement_U A) \cap B = \{-1\}$.

故选A.

【标注】【知识点】交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的 ().
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】 $2x^2 + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$,

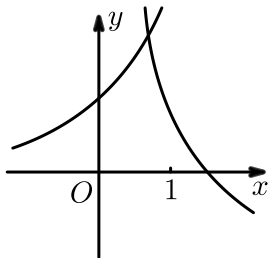
$\therefore$ “ $x > \frac{1}{2}$ ”是“ $2x^2 + x - 1 > 0$ ”的充分不必要条件.

故选A.

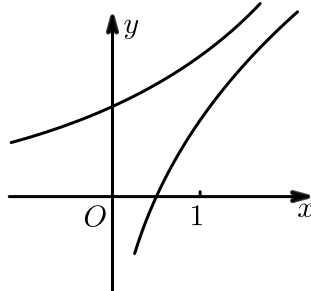
【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 ().

A.

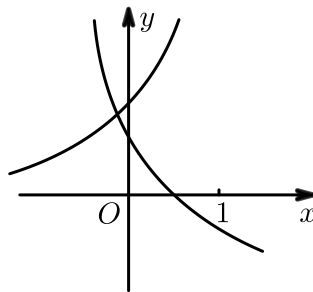
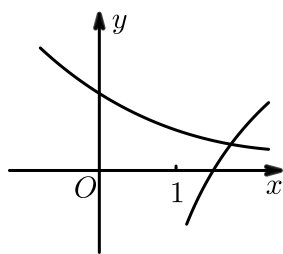


B.



C.

D.



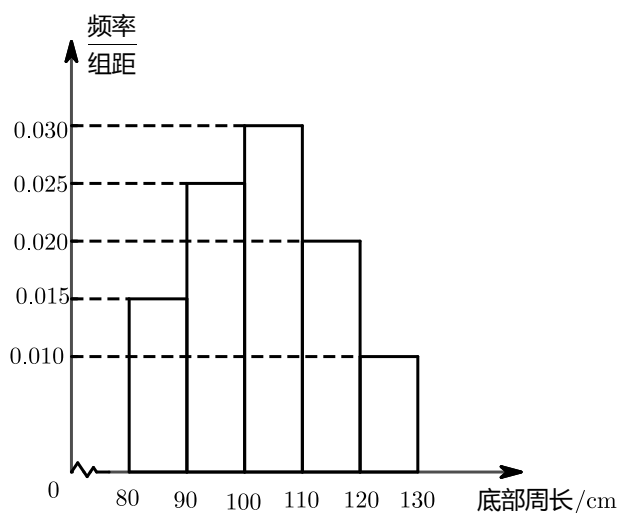
【答案】D

【解析】 本题主要考查指数函数与对数函数的图象和性质及函数图象的识辨，通过识辨函数图象建立数与形的联系，考查图形描述、分析数学问题的素养．

对于函数 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ ，当 $y = 0$ 时，有 $x + \frac{1}{2} = 1$ ，得 $x = \frac{1}{2}$ ，即 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ 的图象恒过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，排除选项A、C；函数 $y = \frac{1}{a^x}$ 与 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ 在各自定义域上单调性相反，排除选项B，故选D．

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题

4. 为了了解一片经济林的生长情况，随机抽测了其中60株树木的底部周长（单位：cm），所得数据均在区间[80, 130]上，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的60株树木中，底部周长小于100cm的株数为（ ）．



A. 15

B. 24

C. 6

D. 30

【答案】B

【解析】 由频率分布直方图知：底部周长小于100cm的频率为 $(0.015 + 0.025) \times 10 = 0.4$ ，
 $\therefore$ 底部周长小于100cm的频数为 $60 \times 0.4 = 24$ ．

故选B.

【标注】 【知识点】 频数与频率

5. 将长、宽分别为4和3的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角, 得到四面体 $A-BCD$, 则四面体 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 ().

A. 25π

B. 50π

C. 5π

D. 10π

【答案】 A

【解析】 由题意可知, 直角三角形斜边的中线是斜边的一半, 所以长宽分别为4和3的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起二面角, 得到四面体 $A-BCD$, 则四面体 $A-BCD$ 的外接球的球心 O 为 AC 中点, 半径 $r = \frac{5}{2}$, 所求四面体 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25\pi$. 故选A.

【标注】 【知识点】 空间几何体的表面积

6. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 ().

A. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}})$

B. $f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}})$

C. $f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

D. $f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(2^{-\frac{3}{2}}) > f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, $\therefore f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) = f(\log_3 4)$, $\because \log_3 4 > \log_3 3 = 1$, $0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < 2^0 = 1$, $\therefore 0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < \log_3 4$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(\log_3 \frac{1}{4})$, 故选: C.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

7.

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为()

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

【答案】 A

【解析】 由题意得 $\frac{b}{a} = 2$ 且 $c = 5$. 故由 $c^2 = a^2 + b^2$, 得 $25 = a^2 + 4a^2$, 则 $a^2 = 5$, $b^2 = 20$, 从而双曲线方程为 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

【标注】 【知识点】已知双曲线的渐近线求其他参数

8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π , 将该函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到的图象对应的函数为奇函数, 则 $f(x)$ 的图象①关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, ②关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称, ③在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ 上单调递增. 其中所有正确结论的序号是().

- A. ② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

【答案】 C

【解析】 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π ,

$$\therefore \pi = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 可得 $\sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$, 函数为奇函数,

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi,$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi,$$

$$\text{可得 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

考查①下对,

$$\text{令 } 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{可得 } x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

考查②对,

$$x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}], 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ 此时函数单调递增,}$$

考查③对,

故选：C .

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数判定结论正误；已知正弦型函数性质求解析式

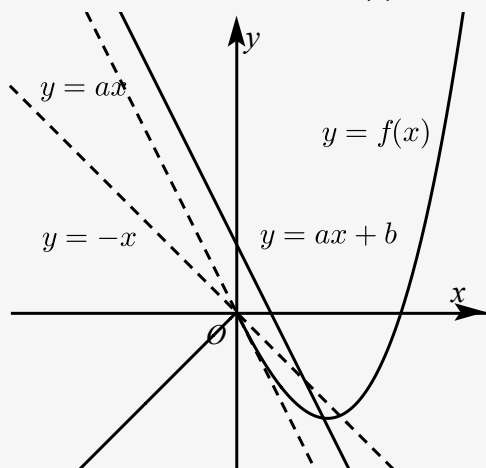
9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点, 则 () .
- A. $a < -1, b < 0$ B. $a < -1, b > 0$ C. $a > -1, b < 0$ D. $a > -1, b > 0$

【答案】 C

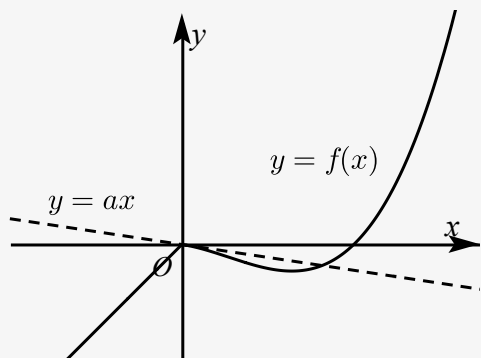
【解析】 方法一：原题可转化为 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 有三个交点.

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = x^2 - (a+1)x + a = (x-a)(x-1)$, 且 $f(0) = 0, f'(0) = a$, 则

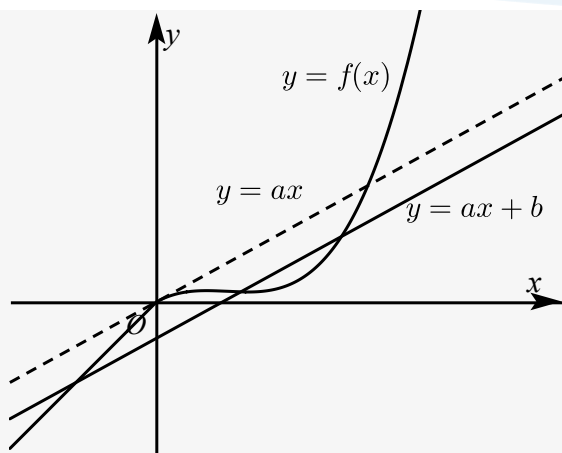
(1) 当 $a \leq -1$ 时, 如图 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 不可能有三个交点 (实际上有一个), 排除 A, B .



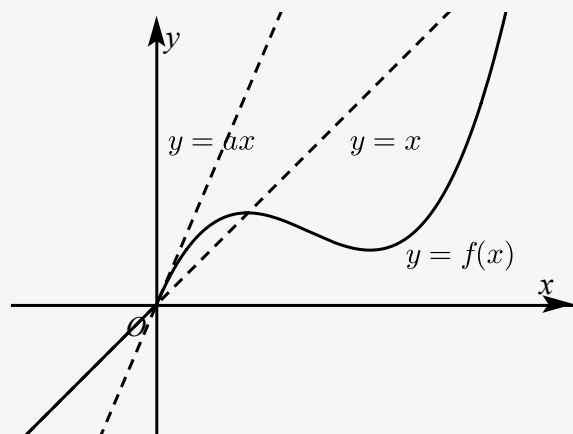
(2) 当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax$ 的图象如下图所示. 欲使两个函数有三个交点, 则必有 $b < 0$.



(3) 当 $0 \leq a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax + b$ 的图象如下图所示. 欲使两个函数有三个交点, 则必有 $b < 0$.



(4) 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax + b$ 的图象如下图所示. 不可能有三个交点 (实际上有一个), 排除 D.



综上所述, 则 $-1 < a < 1$, $b < 0$.

方法二: 记 $g(x) = f(x) - ax - b$,

当 $x < 0$ 时, $g(x) = (1-a)x - b$, 最多有 1 个零点.

当 $x \geq 0$ 时, $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$,

$g'(x) = x^2 - (a+1)x = x[x - (a+1)]$,

若 $a \leq -1$, 则 $a+1 \leq 0$, 即 $-a-1 \geq 0$,

$\therefore g'(x) \geq 0$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上最多有 1 个零点,

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上最多有 2 个零点, 不合题意,

故 $a > -1$,

当 $x \in [0, a+1)$ 时, $g'(x) \leq 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,

当 $x \in (a+1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增,

故 $g(x)$ 有 3 个零点的条件为
$$\begin{cases} \frac{b}{1-a} < 0 \\ a > -1 \\ g(0) \geq 0 \\ g(a+1) < 0 \end{cases},$$

所以 $\begin{cases} b < 0 \\ -1 < a < 1 \\ b > -\frac{1}{6}(a+1)^3 \end{cases}$, 对照选项.

故选C.

【标注】 【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数)

10. i 是虚数单位, 复数 $\frac{11-7i}{1-2i} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $5+3i$

【解析】 $\frac{11-7i}{1-2i} = \frac{(11-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{25+15i}{1+4} = 5+3i$.

【标注】 【知识点】复数的乘法和除法

11. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

【答案】 70

【解析】 $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式的第 $r+1$ 项是 $T_{r+1} = C_8^r \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{8-r} \left(-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^r = C_8^r (-1)^r x^{8-\frac{3}{2}r} y^{\frac{3}{2}r-4}$, 当 $r=4$ 时是含有 x^2y^2 的项, 其系数是 $C_8^4 (-1)^4 = 70$.

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

12. 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆 C 相切于点 $A(-2, -1)$, 则圆 C 的标准方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x^2 + (y+2)^2 = 5$

【解析】 $\because$ 由圆心与切点的连线与切线垂直, 故斜率乘积为 -1 ,

$$\therefore \frac{m+1}{2} \times 2 = -1,$$

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore \text{圆心}(0, -2), \text{ 则 } r = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{圆的标准方程为 } x^2 + (y+2)^2 = 5.$$

【标注】 【知识点】已知直线和圆的位置关系求圆的方程

13.

将一颗骰子先后抛掷2次，观察向上的点数，两数中至少有一个奇数的概率为 _____，以第一次向上的点数为横坐标 x ，第二次向上的点数为纵坐标 y 的点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 内部的概率为 _____。

【答案】 $\frac{3}{4}$ ； $\frac{2}{9}$

【解析】 设 (x, y) 表示一个基本事件，则掷两次骰子包括： $(1, 1)$ ， $(1, 2)$ ， $(1, 3)$ ， $(1, 4)$ ， $(1, 5)$ ， $(1, 6)$ ， $(2, 1)$ ， $(2, 2)$ ， $\dots$ ， $(6, 5)$ ， $(6, 6)$ ，共36个基本事件。

记“两数中至少有一个为奇数”为事件 B ，则事件 B 与“两数均为偶数”为对立事件，而事件“两数均为偶数”含有9个基本事件，

所以 $P(B) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$ 。

答：两数中至少有一个为奇数的概率为 $\frac{3}{4}$ 。

设 (x, y) 表示一个基本事件，则掷两次骰子包括： $(1, 1)$ ， $(1, 2)$ ， $(1, 3)$ ， $(1, 4)$ ， $(1, 5)$ ， $(1, 6)$ ， $(2, 1)$ ， $(2, 2)$ ， $\dots$ ， $(6, 5)$ ， $(6, 6)$ ，共36个基本事件。

基本事件总数为36，点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 的内部记为事件 C ，则 C 包含8个事件，分别为 $(1, 1)$ ， $(1, 2)$ ， $(1, 3)$ ， $(2, 1)$ ， $(2, 2)$ ， $(2, 3)$ ， $(3, 1)$ ， $(3, 2)$ ，

所以 $P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ 。

答：点 (x, y) 在圆 $x^2 + y^2 = 15$ 的内部的概率为 $\frac{2}{9}$ 。

【标注】 【知识点】对立事件的概率和为1；古典概型的概率计算（不涉及计数原理）

14. 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $2x + 8y - xy = 0$ ，则 $x + y$ 的最小值为 _____。

【答案】 18

【解析】 已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $2x + 8y - xy = 0$ 。由 $2x + 8y = xy$ 得： $\frac{2}{y} + \frac{8}{x} = 1$ 。利用基本不等式：

则 $x + y = (x + y)\left(\frac{2}{y} + \frac{8}{x}\right) = \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} + 10 \geq 8 + 10 = 18$ ，当且仅当 $x = 2y$ 时成立。

则 $x + y$ 的最小值为18。

故答案为18。

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用；倒数和形式

15. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为2， $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E ， F 分别在边 BC ， CD 上 $BC = 3BE$ ， $CD = \lambda DF$ ，若 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1$ ，则 λ 的值为 _____；若 G 为线段 DC 上的动点，则 $\vec{AG} \cdot \vec{AE}$ 的最大值为 _____。

【答案】 2； $\frac{8}{3}$

【解析】由题 $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{DF}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{DC}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{\lambda}(\overrightarrow{AB})^2 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD})^2 + \left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{4}{\lambda} + \frac{4}{3} + \left(1 + \frac{1}{3\lambda}\right) \cdot (-2) = \frac{10}{3\lambda} - \frac{2}{3} = 1\end{aligned}$$

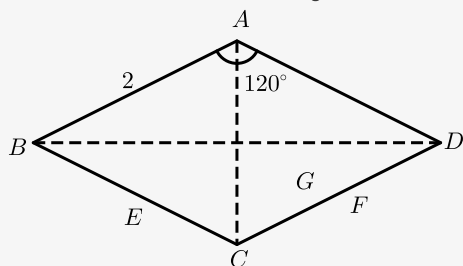
, 解得: $\lambda = 2$.

设 $\overrightarrow{DG} = t\overrightarrow{DC}$, $t \in [0, 1]$,

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{DC}) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) = (\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AB}) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) = t\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2 + \left(1 + \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{10t - 2}{3}$$

,

$$\therefore t = 1 \text{ 时, } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AE}_{\max} = \frac{8}{3}.$$



【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题