

选填练习十三

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x < 3\}$, 则 $(A \cap C) \cup B = (\quad)$.
- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{1, 2, 3, 4\}$ D. $\{-1, 2, 3\}$

【答案】 C

【解析】 因为 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x < 3\}$,
所以 $A \cap C = \{1, 2\}$,
故 $(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.
故选 C.

【标注】 【知识点】 并集；交集；交、并、补集混合运算

2. 演讲比赛共有9位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从9个原始评分中去掉1个最高分、1个最低分，得到7个有效评分. 7个有效评分与9个原始评分相比，不变的数字特征是()
- A. 中位数 B. 平均数 C. 方差 D. 极差

【答案】 A

【解析】 解：根据题意，从9个原始评分中去掉1个最高分、1个最低分，得到7个有效评分，
7个有效评分与9个原始评分相比，最中间的一个数不变，即中位数不变.
故选A.

【标注】 【知识点】 极差、方差与标准差；众数、中位数、平均数

3. 若 $a > 0$, $b > 0$, 则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的() .
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 $\because a > 0, b > 0$,
 $\therefore 4 \geq a + b \geq 2\sqrt{ab}$,
 $\therefore 2 \geq \sqrt{ab}$,
 $\therefore ab \leq 4$,

即 $a + b \leq 4 \Rightarrow ab \leq 4$,

若 $a = 4, b = \frac{1}{4}$, 则 $ab = 1 \leq 4$,

但 $a + b = 4 + \frac{1}{4} > 4$,

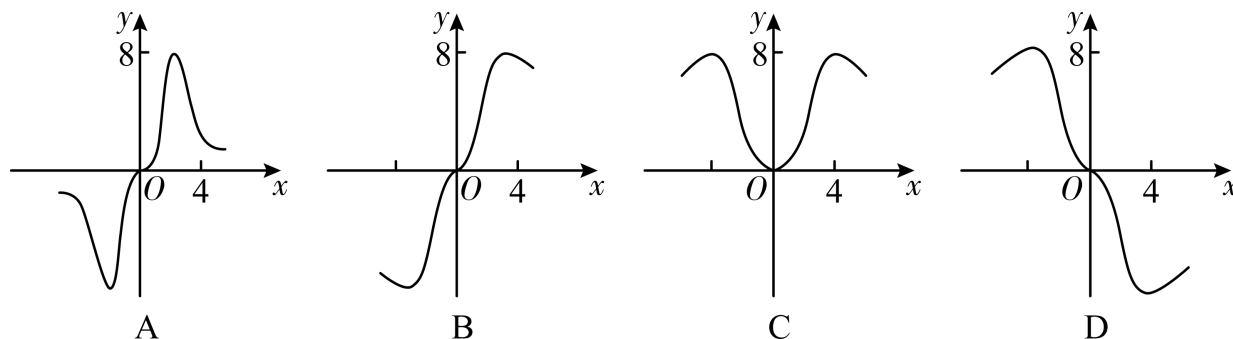
即 $ab \leq 4$ 推不出 $a + b \leq 4$,

$\therefore a + b \leq 4$ 是 $ab \leq 4$ 的充分不必要条件.

故选: A.

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值; 基本不等式的概念; 充要条件与不等式结合

4. 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 上的图象大致为()



A. A

B. B

C. C

D. D

【答案】 B

【解析】 解: 由 $y = f(x) = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 上可知: 定义域关于原点对称,

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{2^{-x} + 2^x} = -\frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是 $[-6, 6]$ 上的奇函数, 因此排除 C,

$$\text{又 } f(4) = \frac{2^{11}}{2^8 + 1} > 7, \text{ 因此排除 A, D.}$$

故选 B.

【标注】 【知识点】函数图象的识别问题

5. 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一个球面上, 且 $AB = 2, AD = \sqrt{3}, AA_1 = 1$, 则球的表面积为 ____.

【答案】 8π

【解析】 $\because$ 长方体 8 个顶点在同一球面上,

$$\text{则长方体外接球半径满足 } 2R = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$R = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 8\pi.$$

故答案为： 8π .

【标注】 【知识点】 组合体求体积、表面积问题；空间几何体的表面积

6. 设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5}$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4}$, $c = \log_{\frac{3}{4}}(\log_3 4)$, 则 ()

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $a < c < b$

【答案】 C

【解析】 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4} > 1$, $c = \log_{\frac{3}{4}}(\log_3 4) < 0$, $\therefore b > a > c$. 故选C

【标注】 【知识点】 指对幂函数综合

7. 函数 $f(x) = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值域为 () .

A. $[-2, 2]$

B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

C. $[-1, 1]$

D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

【答案】 B

【解析】 函数 $f(x) = \sin x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$
 $= \sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

综上所述：故选B .

【标注】 【知识点】 求固定区间正弦型函数值域

8. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左, 右焦点, O 是坐标原点, 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ____ .

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$,
 $\therefore$ 点 F_2 到渐近线的距离 $d = \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$, 即 $|PF_2| = b$,
 $\therefore |OP| = \sqrt{|OF_2|^2 - |PF_2|^2} = \sqrt{c^2 - b^2} = a$, $\cos \angle PF_2O = \frac{b}{c}$,

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{6}|OP| ,$$

$$\therefore |PF_1| = \sqrt{6}a ,$$

在三角形 F_1PF_2 中 ,

$$\text{由余弦定理可得 } |PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - 2|PF_2| \cdot |F_1F_2| \cos \angle PF_2O ,$$

$$\therefore 6a^2 = b^2 + 4c^2 - 2 \times b \times 2c \times \frac{b}{c} = 4c^2 - 3b^2 = 4c^2 - 3(c^2 - a^2) ,$$

$$\text{即 } 3a^2 = c^2 , \text{ 得 } e = \sqrt{3} ,$$

故答案为 : $\sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 求双曲线的离心率

9. 在矩形 $ABCD$ 中 , 边 AB 、 AD 的长分别为2、1 , 若 M 、 N 分别是边 BC 、 CD 上的点 , 且满足

$$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|} , \text{ 则 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \text{ 的取值范围是 () .}$$

A. $[1, 4]$

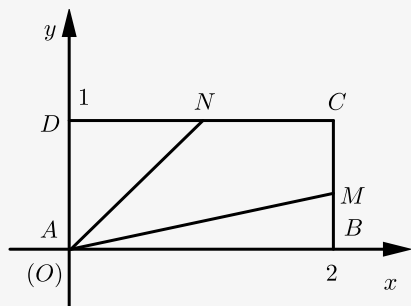
B. $[1, 4]$

C. $[0, 2]$

D. $(1, 4]$

【答案】 B

【解析】 如图所示 , 则 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$, $D(0, 1)$,



$$\text{设 } \frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|} = t \in [0, 1] ,$$

$$\text{则 } |\overrightarrow{BM}| = t , |\overrightarrow{CN}| = 2t ,$$

$$\text{设 } M(2, t) , N(2 - 2t, 1) ,$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 4 - 4t + t = 4 - 3t = f(t) ,$$

因为 $f(t)$ 递减 ,

$$\text{所以 } \left(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \right)_{\max} = f(0) = 4 ,$$

$$\left(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \right)_{\min} = f(1) = 1 ,$$

即 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是 $[1, 4]$.

故选B .

【标注】 【知识点】 建系法求平面向量的数量积；数量积的最值问题

10. 若 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i) = 2i$ ，则 $|z| =$ _____ .

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 $\because z(1+i) = 2i$,

$$\therefore z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2i}{2} = 1+i ,$$

$$\text{则 } |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} .$$

【标注】 【知识点】 复数的模；复数的乘法和除法

11. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中 x^5 的系数是 _____（用数字填写答案） .

【答案】 35

【解析】 $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^7$ 的展形式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r (x^3)^{7-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$,

$$\text{即 } T_{r+1} = C_7^r x^{21-4r} ,$$

$$\therefore x^5 \text{ 为 } 21 - 4r = 5 , \therefore r = 4 ,$$

$$\text{故 } T_5 = C_7^4 x^5 = 35x^5 ,$$

故 x^5 的系数为35 .

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式；求二项式展开式的特定项

12. 过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 的弦，其中最短的弦长为 _____ .

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】 根据题意得：圆心 $(2,2)$ ，半径 $r = 2$,

$$\because \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2} < 2 ,$$

$\therefore (3,1)$ 在圆内 ,

$$\because \text{圆心到此点的距离 } d = \sqrt{2} , r = 2 ,$$

$$\therefore \text{最短的弦长为 } 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2} .$$

故答案为 $2\sqrt{2}$.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

13. 函数 $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1} (x > -1)$ 最小值为 _____ .

【答案】 9

【解析】 设 $t = x + 1 (t > 0)$, 则 $y = f(t) = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$
 $= \frac{(t+4)(t+1)}{t}$,

整理得 : $f(t) = \left(t + \frac{4}{t}\right) + 5$,

$\because t > 0$,

$\therefore t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}}$,

所以 $f(t) = \left(t + \frac{4}{t}\right) + 5 \geq 2\sqrt{4} + 5 = 9$,

当且仅当 $t = \frac{4}{t} = 2$ 时 , 函数有最小值 , 此时 $x = 1$,

因此函数 $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ 当 $x = 1$ 时有最小值为 9 .

故答案为 : 9 .

【标注】 【知识点】利用基本不等式求最值

14. 现高三年级学生 7 人 , 7 人中有 4 人睡眠不足 , 3 人睡眠充足 , 现从这 7 人中随机抽取 3 人作进一步的身体检查 . 用 X 表示取的 3 人中睡眠不足的学生人数 , 则随机变量 X 的数学期望 _____ ; 设 A 为事件“抽取的 3 人中 , 既有睡眠充足的学生 , 也有睡眠不足的学生”则事件 A 发生的概率为 _____ .

【答案】 $\frac{12}{7}$; $\frac{6}{7}$

【解析】 1 : 用 X 表示睡眠不足的员工人数 , 则 X 的可能取值为 0 , 1 , 2 , 3 ,

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35} ;$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35} ;$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35} ;$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35} ,$$

所以 X 的分布列如下 :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7} .$$

2 : 设事件 A : 抽取的 3 人中 , 既有睡眠充足的员工也有睡眠不足的员工 ,

事件 B 为 : 抽取的 3 人中 , 睡眠充足的员工有 1 人 , 睡眠不足的员工有 2 人 ;

事件 C 为：抽取的3人中，睡眠充足的员工有2人，睡眠不足的员工有1人；

则 $A = B + C$ ，且 $P(B) = P(X = 2)$ ， $P(C) = P(X = 1)$ ，

故 $P(A) = P(B \cup C) = P(X = 2) + P(X = 1) = \frac{6}{7}$ ，

所以事件 A 发生的概率为： $\frac{6}{7}$ 。

【标注】 【知识点】 互斥事件的概率加法公式；离散型随机变量的数学期望；超几何分布；离散型随机变量的分布列

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x - a)(x - 2a), & x \geq 1 \end{cases}$ ，

①若 $a = 1$ ，则 $f(x)$ 的最小值为_____。

②若 $f(x)$ 恰有2个零点，则实数 a 的取值范围是_____。

【答案】 -1 ；

$$\frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ 或 } a \geq 2$$

【解析】 解：①当 $a = 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < 1 \\ 4(x - 1)(x - 2), & x \geq 1 \end{cases}$ ，

当 $x < 1$ 时， $f(x) = 2^x - 1$ 为增函数， $1 > f(x) > -1$ ，

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = 4(x - 1)(x - 2) = 4(x^2 - 3x + 2) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1$ ，

当 $1 < x < \frac{3}{2}$ 时，函数单调递减，当 $x > \frac{3}{2}$ 时，函数单调递增，

故当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $f(x)_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$ ，

②设 $h(x) = 2^x - a$ ， $g(x) = 4(x - a)(x - 2a)$

若当 $x < 1$ 时， $h(x)$ 与 x 轴有一个交点，

所以 $a > 0$ ，并且当 $x = 1$ 时， $h(1) = 2 - a > 0$ ，所以 $0 < a < 2$ ，

而函数 $g(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 与 x 轴有一个交点，所以 $2a \geq 1$ ，且 $a < 1$ ，

所以 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ，

若函数 $h(x) = 2^x - a$ 在 $x < 1$ 时，与 x 轴没有交点，

则函数 $g(x) = 4(x - a)(x - 2a)$ 在 $x \geq 1$ 时与 x 轴有两个交点，

当 $a \leq 0$ 时， $h(x)$ 与 x 轴无交点， $g(x)$ 与 x 轴无交点，所以不满足题意（舍去），

当 $h(1) = 2 - a \leq 0$ ，即 $a \geq 2$ 时， $g(x)$ 的两个交点满足 $x_1 = a$ ， $x_2 = 2a$ ，都是满足题意的，

综上所述 a 的取值范围是 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \geq 2$ 。

【标注】 【知识点】 指对幂函数综合