

选填练习二

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $S = \{1, 3, 5\}$, $T = \{3, 6\}$, 则 $\complement_U(S \cup T)$ 等于 () .
- A. $\emptyset$ B. $\{1, 3, 5, 6\}$ C. $\{2, 4, 7\}$ D. $\{2, 4, 6\}$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $S = \{1, 3, 5\}$, $T = \{3, 6\}$,
 $S \cup T = \{1, 3, 5, 6\}$,
 $\therefore \complement_U(S \cup T) = \{2, 4, 7\}$.
故选 C .

【标注】 【知识点】 补集 ; 交、并、补集混合运算

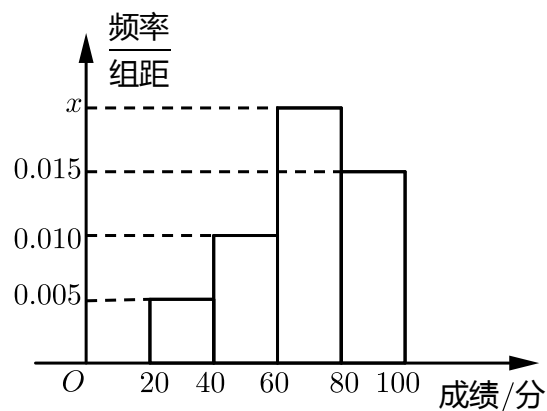
2. 已知命题 $p: x^2 + 2x - 3 > 0$, 命题 $q: x > a$, 且 q 的一个必要不充分条件是 p , 则实数 a 的取值范围是 () .
- A. $[1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3]$

【答案】 A

【解析】 命题 $p: x^2 + 2x - 3 > 0$,
则 $x > 1$ 或 $x < -3$,
命题 $q: x > a$,
 $\because q$ 的一个必要不充分条件是 p ,
则 p 是 q 的必要不充分条件 ,
 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$,
 $\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.
故 A 正确 .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 为了调查学生的复习情况 , 高三某班的全体学生参加了一次在线测试 , 成绩的频率分布直方图如图所示 , 数据的分组依次为 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[60, 80)$, $[80, 100)$. 若成绩在 $[60, 80)$ 的人数是 16 , 则低于 60 分的人数是 () .



A. 6

B. 12

C. 15

D. 18

【答案】 B

【解析】 成绩在 $[20, 40)$, $[40, 60)$, $[80, 100)$ 的频率分别是0.1, 0.2, 0.3,

$\therefore$ 成绩在 $[60, 80)$ 的频率为 $1 - 0.1 - 0.2 - 0.3 = 0.4$,

$\therefore$ 成绩在 $[60, 80)$ 的人数为16,

$\therefore$ 该班总人数为 $\frac{16}{0.4} = 40$ 人,

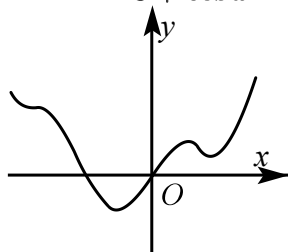
$\therefore$ 低于60分的人数为 $40 \times (0.1 + 0.2) = 12$ 人.

故选B.

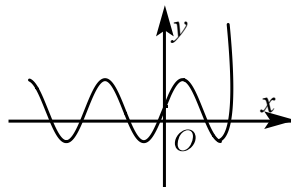
【标注】 【知识点】 频率分布直方图；用样本的数字特征估计总体的数字特征问题

4. 函数 $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{3 + \cos x}$ 的部分图象可能是().

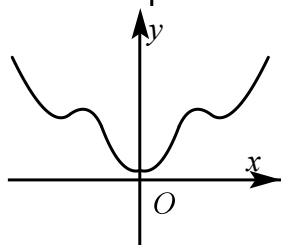
A.



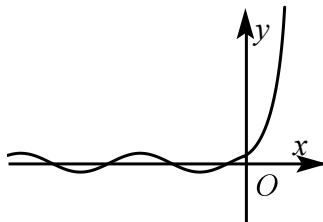
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 $\because f(0) = \frac{1+0}{3+1} = \frac{1}{4} > 0$,

∴排除A；

∴当 $x > 0$ 时， $e^x > 1$ ，

∴ $e^x + \sin x > 0$ ，又 $3 + \cos x > 0$ ，

∴ $f(x) > 0$ ，

∴排除B；

∴ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}{3} < 0$ ，

∴排除C．

故选：D．

【标注】【知识点】函数图象的识别问题

5. 若圆 C 的圆心在第一象限，圆心到原点的距离为 $\sqrt{5}$ ，且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴都相切，则该圆的标准方程是（ ）．

A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

B. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

D. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

【答案】 B

【解析】 设圆 C 圆心坐标为 $C(a, b)$ ，

∴圆 C 的圆心在第一象限，

∴ $a > 0$ ， $b > 0$ ，

又∴圆心到原点的距离为 $\sqrt{5}$ ，

∴ $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ ，

∴圆心 $C(a, b)$ 与直线 $4x - 3y = 0$ 相切，且与 x 轴相切，

∴ $\frac{|4a - 3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = b$ ，

则
$$\begin{cases} |4a - 3b| = 5b \\ a > 0 \text{ 且 } b > 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

解得 $a = 2$ ， $b = 1$ ，

∴圆 C 标准方程为 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ．

故选B．

【标注】【知识点】圆的切线的相关问题；圆的标准方程问题；点到直线的距离公式

6.

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ ，设 $a = f(0.31^2)$ ， $b = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$ ， $c = f(2\ln 2)$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()。

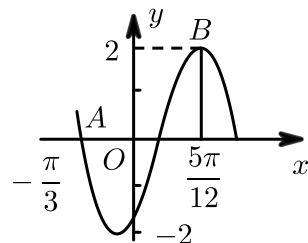
- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) (x \in \mathbf{R})$ ，
 $f(-x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -f(x)$ 。
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，
 又 $\because f'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$ ，
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，
 $\because 0.31^2 = 0.0961$ ，
 $\log_{\frac{1}{2}} 0.31 > 1$ ，
 $2\ln 2 = \ln 4 > 1$ ，
 $\therefore 2\ln 2 > 0.31^2 > -\log_{\frac{1}{2}} 0.31$ ，
 则 $f(-\log_{\frac{1}{2}} 0.31) > f(0.31^2) > f(2\ln 2)$ ，
 $\because f(-\log_{\frac{1}{2}} 0.31) = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$ ，
 $\therefore -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31) > f(0.31^2) > f(2\ln 2)$ ，
 $b > a > c$ 。
 故 D 正确。

【标注】 【知识点】用单调性比较大小；指对幂比较大小

7. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\pi < \varphi < 0)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式为 ()。



- A. $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$ B. $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
 C. $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $f(x) = 2 \cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right)$

【答案】C

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$),

如图所示, 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{4}{3} \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \right) = \pi$,

$$\text{则 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$,

$$\text{则 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = A \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0,$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\varphi = \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\because -\pi < \varphi < 0, \text{ 则 } \varphi = -\frac{5\pi}{6},$$

又 $\because$ 函数 $f(x)$ 经过点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 2\right)$,

则函数 $f(x)$ 最大值为 2,

$$\therefore A = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right).$$

故 C 正确.

【标注】【知识点】已知正弦型函数图象求参数值; 余弦函数的图象和性质

8. 已知点 A 是抛物线 $y^2 = 4x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一个交点. 若抛物线的焦点为 F , 且 $|AF| = 4$, 则点 A 到双曲线两条渐近线的距离之和为 ().

A. $2\sqrt{6}$

B. 4

C. $2\sqrt{3}$

D. 2

【答案】A

【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$,

设 $A(x_0, y_0)$, 则由 $|AF| = 4$ 可得 $x_0 + 1 = 4$,

解得 $x_0 = 3$, 将 $x_0 = 3$ 代入 $y^2 = 4x$ 得 $y_0 = \pm 2\sqrt{3}$, 即 $A(3, \pm 2\sqrt{3})$,

又点 A 是抛物线 $y^2 = 4x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一个交点, 则 $3 - \frac{12}{b^2} = 1$,

解得 $b = \sqrt{6}$,

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$,

$$\text{点 } A \text{ 到 } y = \sqrt{2}x \text{ 的距离 } d_1 = \frac{|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$\text{点 } A \text{ 到 } y = -\sqrt{2}x \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

则点A到双曲线两条渐近线的距离之和为

$$d_1 + d_2 = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

故选：A.

【标注】【知识点】抛物线与双曲线结合

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x \leq 0 \\ x^3 - (a+1)x^2 + 2ax, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = ax$ 有4个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, 1]$ D. $(1, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 若方程 $f(x) = ax$ 有4个不同实数根,

$$\because x = 0, f(0) = 0,$$

$$\therefore x \neq 0, \text{ 方程 } f(x) = ax \text{ 有3个不同实数根,}$$

$$\text{即 } \frac{f(x)}{x} = a \text{ 有3个不同实数根,}$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(x)}{x} - a, \text{ 则 } g(x) \text{ 有3个非零根,}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - a = \begin{cases} \frac{x}{x-1} - a, & x < 0 \\ x^2 - (a+1)x + a, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(1-a)x + a}{x-1}, & x < 0 \\ (x-a)(x-1), & x > 0 \end{cases},$$

① $a = 1$ 时, $g(x)$ 没有负根, 有唯一正根 $x = 1$, 矛盾;

$$\text{② } a \neq 1, \text{ 若 } g(x) = 0, \text{ 则 } x = \frac{a}{a-1} \text{ 或 } x = a \text{ 或 } x = 1,$$

$$\text{若 } g(x) \text{ 恰有3个根, 则 } \begin{cases} \frac{a}{a-1} < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a(a-1) < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases},$$

$$\text{即 } 0 < a < 1,$$

综上所述, a 的取值范围是 $(0, 1)$.

故选B.

【标注】【知识点】分段函数; 函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围

10. 若 $\frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$ (i 是虚数单位, a 是实数), 则 $a =$ _____.

【答案】2

【解析】 $\because \frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$,
则 $\frac{2-i}{a-i} = \frac{(2-i)(a+i)}{(a-i)(a+i)}$
 $= \frac{2a+2i-ai-i^2}{a^2-i^2}$
 $= \frac{2a+1+(2-a)i}{a^2+1}$,
 $\therefore \begin{cases} \frac{2a+1}{a^2+1} > \frac{1}{2} , \\ a-2=0 \end{cases}$
解得 $a=2$.

【标注】【知识点】复数的四则运算综合；复数的乘法和除法

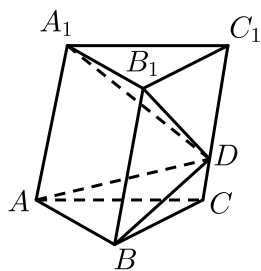
11. 二项式 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中，常数项为 _____ .

【答案】 $-\frac{5}{2}$

【解析】二项式 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 展开式通项为
 $T_{r+1} = C_5^r \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{5-r}$
 $= C_5^r (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^r x^{\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r} \quad (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$,
令 $\frac{5}{2} - \frac{5}{6}r = 0$, 可得 $r=3$,
 $T_{3+1} = C_5^3 (-1)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{2}{5}$.
所以二项式 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中，常数项为 $-\frac{5}{2}$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

12. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， D 是 CC_1 上一点，设四棱锥 $D-A_1ABB_1$ 的体积为 V_1 ，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V_2 ，则 $V_1:V_2 =$ _____ .



【答案】2:3

【解析】设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高为 h ,

三棱锥 $D - ABC$ 的高为 h_1 ,

三棱锥 $D - A_1B_1C_1$ 的高为 h_2 ,

则 $h = h_1 + h_2$,

设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面 $\triangle ABC$ 的面积为 S ,

则三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积 $V_2 = Sh$,

三棱锥 $D - ABC$ 的体积 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3}Sh_1$,

三棱锥 $D - A_1B_1C_1$ 的体积 $V_{D-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}Sh_2$,

所以四棱锥 $D - A_1ABB_1$ 的体积:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} - V_{D-ABC} - V_{D-A_1B_1C_1} = Sh - \frac{1}{3}Sh_1 - \frac{1}{3}Sh_2 \\ &= Sh - \frac{1}{3}S(h_1 + h_2) = Sh - \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}Sh = \frac{2}{3}V_2, \end{aligned}$$

故 $V_1 : V_2 = 2 : 3$.

【标注】【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

13. 甲、乙两名枪手进行射击比赛，每人各射击三次，甲三次射击命中率均为 $\frac{4}{5}$ ；乙第一次射击的命中率为 $\frac{7}{8}$ ，若第一次未射中，则乙进行第二次射击，射击的命中率为 $\frac{3}{4}$ ，如果又未中，则乙进行第三次射击，射击的命中率为 $\frac{1}{2}$ ，乙若射中，则不再继续射击．则甲三次射击命中次数 ξ 的期望为 _____；乙射中的概率为 _____．

【答案】 $\frac{12}{5}$ ； $\frac{63}{64}$

【解析】由题意：甲三次射击命中次数 $\xi \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right)$,

则甲三次射击命中次数 ξ 的期望 $E(\xi) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$;

乙第一次射中的概率 $P_1 = \frac{7}{8}$,

乙第二次射中的概率 $P_2 = \left(1 - \frac{7}{8}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$,

乙第三次射中的概率 $P_3 = \left(1 - \frac{7}{8}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$,

则乙射中的概率 $P = P_1 + P_2 + P_3$

$$= \frac{7}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

综上，故答案为： $\frac{12}{5}; \frac{63}{64}$ 。

【标注】【知识点】 n 次独立重复试验与二项分布；离散型随机变量的数学期望

14. 已知存在正数 a, b 使不等式 $\frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b} > \log_2(1-x)$ 成立，则 x 的取值范围是 _____。

【答案】 $\left[1 - 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}, 1\right)$

【解析】 分析题意，可知：

$$\exists a \cdot b \in (0, +\infty) \left(\frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b} \right)_{\max} > \log_2(1-x),$$

对于 $\frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b}$ 分子分母同除 b ,

$$\text{得: } \frac{\sqrt{\frac{4a}{b}+2}}{\frac{2a}{b}+3};$$

$$\text{设 } \frac{a}{b} = t \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } y = \frac{\sqrt{4t+2}}{2t+3}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}(2t+3) \cdot \frac{1}{\sqrt{4t+2}} - 2\sqrt{4t+2}}{(2t+3)^2}$$

$$y' = \frac{2t+3+4(4t+2)}{2(2t+3)^2\sqrt{4t+2}}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{4t+2}}{2t+3} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减;}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{4t+2}}{2t+3} < \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$\therefore \log_2(1-x) \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{则 } \log_2(1-x) \leq \log_2 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$1-x \leq 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$1 - 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \leq x;$$

$$\text{且 } 1-x > 0,$$

$$\text{故 } 1 > x;$$

$$\therefore \text{最终 } x \in \left[1 - 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}, 1\right).$$

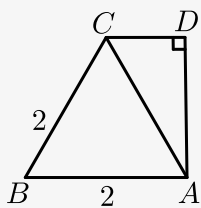
【标注】【方法】换元法

【知识点】 不等式中的恒成立与能成立问题；直接求函数的最值（不含参）

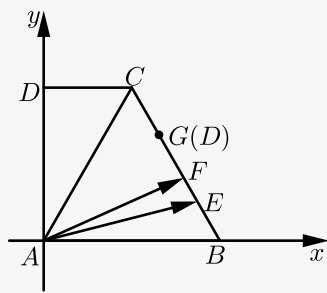
15. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = 2CD = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$, 若 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$, 则 $2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$ _____; 若 P 为边 BC 上一动点, 当 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取最小值时, 则 $\cos \angle PDC$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{13}{2}; \frac{5\sqrt{7}}{14}$

【解析】 因为 $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore AC = 2$, 且 $\angle BAC = 60^\circ$,



在 $\triangle ACD$ 中, $AC = 2$, $CD = 1$, $\angle ADC = 90^\circ$, $\therefore \angle CAD = 30^\circ$,
 $\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, 即 $AB \perp AD$,
 故可以 A 为原点, AB , AD 所在直线分别为 x 轴, y 轴建立平面直角坐标系,
 如下图所示,



① $\because \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$,

$\therefore E, F, G$ 是线段 BC 的四等分点, 且 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

又 $AB = BC = 2CD = 2$, 则 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1, \sqrt{3})$, $D(0, \sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{AB} = (2,0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{DC} = (1,0)$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = (2,0) + \frac{1}{4}(-1, \sqrt{3}) = \left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (2,0) + \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{7}{4} \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 0 = \frac{7}{4}$,

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$,

$$\therefore 2\vec{AE} \cdot \vec{DC} + \vec{AE} \cdot \vec{AF} = \frac{7}{2} + 3 = \frac{13}{2};$$

② $\because P$ 为边 BC 上一动点, $\therefore$ 设 $\vec{BP} = \lambda \vec{BC}$,

则 $\vec{BP} = \lambda(-1, \sqrt{3}) = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$, 得点 P 的坐标为 $(2 - \lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

$\therefore \vec{PA} = (\lambda - 2, -\sqrt{3}\lambda)$, $\vec{PC} = (\lambda - 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$,

$\vec{PA} \cdot \vec{PC} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - \sqrt{3}\lambda(\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda) = 4\lambda^2 - 6\lambda + 2$,

$\therefore$ 当 $\lambda = \frac{3}{4}$ 时, $\vec{PA} \cdot \vec{PC}$ 取最小值,

此时, 点 P 与 G 点重合, 且 P 点坐标为 $\left(\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\therefore \vec{DP} = \left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\therefore \cos \angle PDC = \cos \langle \vec{DC}, \vec{DP} \rangle$

$$= \frac{\vec{DC} \cdot \vec{DP}}{|\vec{DC}| \cdot |\vec{DP}|}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{综上所述, 故答案为: } \frac{13}{2}; \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

【标注】【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义；数量积的坐标表达式；平面向量的数乘运算及运算规则