

选填练习七

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, 则 $B \cap (\complement_U A) = (\quad)$.
- A. $\{2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{1, 2, 4\}$

【答案】 B

【解析】 $\because U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 2, 5\}$,
 $\therefore \complement_U A = \{1, 2, 4\}$, $B \cap (\complement_U A) = \{1, 2\}$.

故选B .

【标注】 【知识点】 交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x - 1| > 2$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的 () .
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

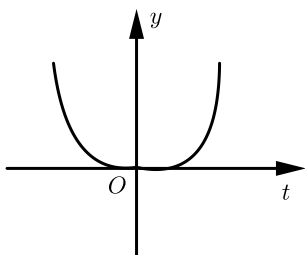
【答案】 A

【解析】 由 $|x - 1| > 2$ 得 $x < -1$ 或 $x > 3$,
由 $x^2 > 1$ 得 $x < -1$ 或 $x > 1$,
而 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\} \subsetneq \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$,
所以“ $|x - 1| > 2$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的充分不必要条件 .
故选A .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

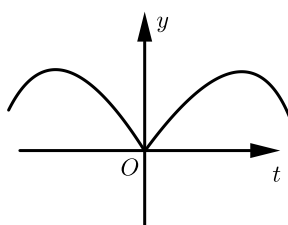
3. 我国著名数学家华罗庚说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休.”函数 $f(x) = \frac{x(e^{-x} + e^x)}{2 + \cos x}$ 的部分图象大致为 () .

A.

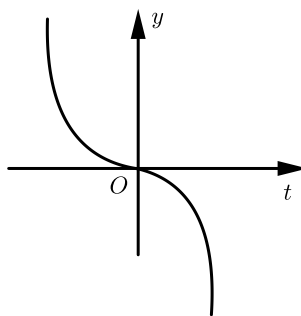
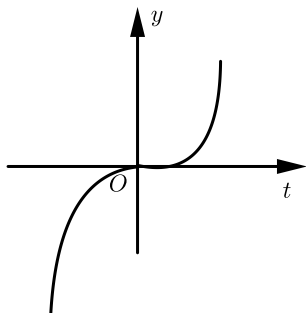


C.

B.



D.

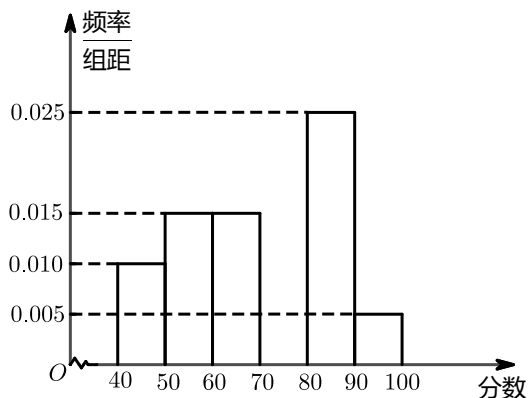


【答案】C

【解析】 $f(-x) = \frac{-x(e^x + e^{-x})}{2 + \cos(-x)} = -f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称，排除A，B，当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，排除D，故选C。

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题；根据奇偶性确定图象

4. 中国女排，曾经十度成为世界冠军，铸就了响彻中华的女排精神、看过电影“夺冠”后，某大学掀起“学习女排精神，塑造健康体魄”的年度主题活动，一段时间后，学生的身体素质明显提高，现随机抽取800个学生进行体能测试，成绩的频率分布直方图如图，数据分成六组 $[40, 50)$ ， $[50, 60)$... $[90, 100]$ ，则成绩落在 $[70, 80)$ 上的人数为（ ）。



A. 12

B. 120

C. 24

D. 240

【答案】D

【解析】 由频率分布直方图得：成绩落在 $[70, 80)$ 上的频率为：

$$1 - (0.010 + 0.015 + 0.015 + 0.025 + 0.005) \times 10 = 0.3，$$

$$\therefore \text{成绩落在}[70, 80)\text{上的人数为 } 800 \times 0.3 = 240。$$

故选D。

【标注】 【知识点】 频率分布直方图；频数与频率

5. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$, 则正方体外接球的体积为 () .
- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\sqrt{6}\pi$ C. $32\sqrt{3}\pi$ D. $8\sqrt{6}\pi$

【答案】 B

【解析】 设正方体的棱长为 a , 则 $BD = \sqrt{2}a$,

由于三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$,

$$\text{则 } 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = 4\sqrt{3},$$

解得 $a = \sqrt{2}$,

$$\text{又 } 2R = \sqrt{3}a = \sqrt{6},$$

$$\text{即 } R = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{所以正方体的外接球的体积为 } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}\pi.$$

故选 B .

【标注】 【知识点】 空间几何体的内切球、外接球问题

6. 已知函数 $f(x) = e^{-|x|}$, $a = f\left(\log_e \frac{1}{3}\right)$, $b = f\left(\log_3 \frac{1}{e}\right)$, $c = f\left(\log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{9}\right)$, 则下述关系式正确的是 () .
- A. $b > a > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $a > b > c$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = e^{-|x|}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore a = f\left(\log_e \frac{1}{3}\right) = f(-\log_e 3) = f(\log_e 3), \quad b = f\left(\log_3 \frac{1}{e}\right) = f(-\log_3 e) = f(\log_3 e),$$

$$c = f\left(\log_{\frac{1}{e}} \frac{1}{9}\right) = f(\log_e 9) = f(2\log_e 3),$$

$$\because 1 < \log_e 3 < 2, \quad 0 < \log_3 e < 1, \quad 2\log_e 3 > 2,$$

$$\therefore f(2\log_e 3) < f(\log_e 3) < f(\log_3 e), \text{ 即 } c < a < b.$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题; 用单调性比较大小

7.

已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 $M(1, m)$ 到其焦点的距离为 5, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左顶点为 A 且离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 若双曲线的一条渐近线与直线 AM 垂直, 则双曲线的方程为 ().

A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ C. $x^2 - 2y^2 = 1$ D. $x^2 - 4y^2 = 1$

【答案】 D

【解析】 设抛物线的焦点为 F ,

由抛物线的定义知, $|MF| = 1 + \frac{p}{2} = 5$, 解得 $p = 8$,

$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2 = 16x$,

不妨取 M 在第一象限, 则其坐标为 $(1, 4)$,

由题意知, $A(-a, 0)$, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$\therefore$ 双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{1}{2}a$ ①,

$\therefore$ 双曲线的一条渐近线与直线 AM 垂直,

$\therefore -\frac{b}{a} \cdot \frac{4}{1+a} = -1$ ②,

由①②, 解得 $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$, 即 $x^2 - 4y^2 = 1$.

故选 D.

【标注】 【知识点】 已知双曲线的离心率求其他参数

8. 设函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin x \cos x$ 给出下列结论:

① $f(x)$ 的最小正周期为 π ;

② $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称;

③ $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 单调递减;

④ 把函数 $y = 2 \cos 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$ 的图象.

其中所有正确结论的编号是 ().

A. ①④

B. ②④

C. ①②④

D. ①②③

【答案】 C

【解析】

$f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$,

对于①, $f(x)$ 最小正周期为, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 所以①对,

对于②, $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos(0) = 2$, 所以②对,

对于③, 求 $f(x)$ 的递减区间: $0 + 2\pi k \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2\pi k \Rightarrow \frac{\pi}{12} + \pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \pi k$, 所以③错,

对于④, 把函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到如下函数:

$y = 2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 所以④对.

故选C.

【标注】 【知识点】已知正弦型函数判定结论正误

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_a(x+2), & x \geq -1 \\ (x+1)^2 + 4a, & x < -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调函数, 若函数

$g(x) = |f(x)| - |x-2|$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是().

- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{13}{16}\right\}$ D. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{13}{16}\right\}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_a(x+2), & x \geq -1 \\ (x+1)^2 + 4a, & x < -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$),

当 $x < -1$ 时, $f(x) = (x+1)^2 + 4a$,

$\therefore f(x)$ 再 $(-\infty, -1)$ 上单调递减,

又 $\because f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调函数,

$\therefore 0 < a < 1$ 且 $(-1+1)^2 + 4a > 1 + \log_a(-1+2)$,

解得 $\frac{1}{4} < a < 1$,

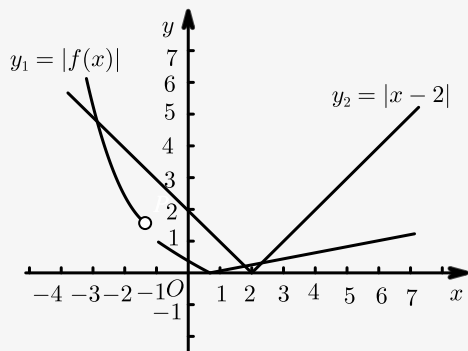
令 $g(x) = |f(x)| - |x-2| = 0$, 即 $|f(x)| = |x-2|$,

令 $y_1 = |f(x)|$, $y_2 = |x-2|$,

则函数 $g(x) = |f(x)| - |x-2|$ 有三个不同的零点,

等价于 $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x-2|$ 有三个不同的交点,

分别画出 $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x-2|$ 的图象如图所示,



由图可知, 当 $x \geq -1$ 时, $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x-2|$ 有2个不同的交点,

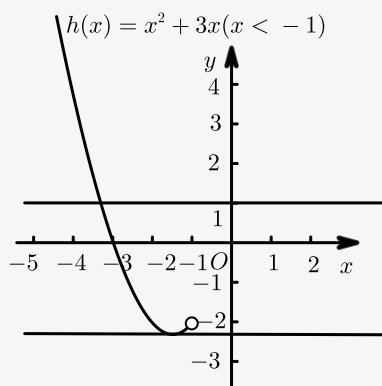
故只需满足: 当 $x < -1$ 时, $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x-2|$ 有1个不同的交点,

即当 $x < -1$ 时, $(x+1)^2 + 4a = -x+2$, 化简 $x^2 + 3x + 4a - 1 = 0$,

即 $1 - 4a = x^2 + 3x \ (x < -1)$,

令 $h(x) = x^2 + 3x \ (x < -1)$, 即 $y = h(x)$ 与 $y = 1 - 4a$ 有一个交点 ,

画出函数 $y = h(x)$ 的图象如下图所示 ,



易知 $h(x)_{\min} = h\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$,

$h(-1) = (-1)^2 + 3 \times (-1) = -2$,

$\therefore 1 - 4a = -\frac{9}{4}$ 或 $1 - 4a \geq -2$,

解得 $a = \frac{13}{16}$ 或 $a \leq \frac{3}{4}$,

又 $\because \frac{1}{4} < a < 1$,

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{13}{16}\right\}$.

故选 D .

【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围

10. 若复数 z 满足 $z = \frac{1+3i}{1-i}$ (其中 i 是虚数单位) , 则 $|z|$ 为 ____ .

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 $z = \frac{1+3i}{1-i}$

$$= \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{1+i+3i+3i^2}{2}$$

$$= -1 + 2i ,$$

$$\text{所以 } |z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} .$$

故答案为 : $\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】 复数的乘法和除法

11. 在二项式 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中 , 含 x^6 的项的系数为 ____ .

【答案】 144

【解析】二项式 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_9^r \cdot 2^r \cdot x^{9-\frac{3r}{2}}$,

令 $9 - \frac{3r}{2} = 6$, 求得 $r = 2$,

可得展开式中含 x^6 的项的系数为 $C_9^2 \times 2^2 = 144$.

故答案为: 144.

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

12. 已知直线 $l: y = x + m$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ 截得的弦长等于该圆的半径, 则实数 $m =$ _____ .

【答案】 2或-4

【解析】由 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$,

得 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 6$,

则圆心 $C(2, 1)$, 半径为 $\sqrt{6}$,

圆 C 到直线 $y = x + m$ 的距离 $d = \frac{|2 - 1 + m|}{\sqrt{2}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{2}}$,

$\therefore$ 直线 $y = x + m$ 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{6 - \frac{(m + 1)^2}{2}} = \sqrt{6}$,

整理得 $(m + 1)^2 = 9$, 解得 $m = 2$ 或 -4 .

故答案为: 2或-4.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

13. 为了抗击新冠肺炎疫情, 现从A医院150人和B医院100人中, 按分层抽样的方法, 选出5人加入“援鄂医疗队”, 现拟再从此5人中选出两人作为联络人, 则这两名联络人中B医院至少有一人的概率是 _____. 设两名联络人中B医院的人数为 X , 则 X 的期望为 _____ .

【答案】 $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{5}$

【解析】按分层抽样的方法, 这5人中,

A医院有 $5 \times \frac{150}{150 + 100} = 3$ 人, B医院有 $5 \times \frac{100}{150 + 100} = 2$ 人

故从这5人中选2人, B医院至少有1人的概率为: $\frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} + \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{7}{10}$,

由题意知 X 取0, 1, 2,

当 $X = 0$ 时, $P = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$,

$$\text{当 } X=1 \text{ 时, } P = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5},$$

$$\text{当 } X=2 \text{ 时, } P = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$$\text{故 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = \frac{3}{10} \times 0 + \frac{3}{5} \times 1 + \frac{1}{10} \times 2 = \frac{4}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{10}, \frac{4}{5}.$$

【标注】 【知识点】 古典概型的概率计算（涉及计数原理）；离散型随机变量的数学期望

14. 已知正实数 a, b 满足 $\lg(a+b) = \lg \frac{2b}{a} + \lg \frac{a}{b}$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{a}{b}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】 因为 $\lg(a+b) = \lg \frac{2b}{a} + \lg \frac{a}{b} = \lg \left(\frac{2b}{a} \cdot \frac{a}{b} \right) = \lg 2$,

则有 $a+b=2$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a+b)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{b}{4a} + \frac{5a}{4b} \geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{b}{4a} \cdot \frac{5a}{4b}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

当且仅当 $\begin{cases} a+b=2 \\ \frac{b}{4a} = \frac{5a}{4b} \end{cases}$, 即 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{a}{b}$ 的最小值为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

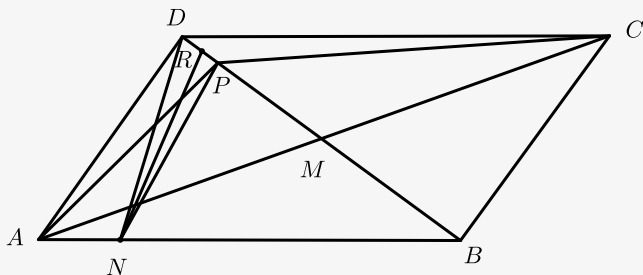
故答案为: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【标注】 【知识点】 已知等式关系求最值

15. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M , $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AD}| = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, 其中点 P 在线段 MD 上且满足 $\vec{AP} \cdot \vec{CP} = -\frac{25}{16}$, 则 $|\vec{DP}| =$ _____. 若点 N 是线段 AB 上的动点, 则 $\vec{ND} \cdot \vec{NP}$ 的最小值为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{135}{256}$

【解析】



在 $\triangle ABD$ 中, $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AD}| = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$,

$$\text{所以 } BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \angle DAB ,$$

$$= 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3 ,$$

$$\text{所以 } BD = \sqrt{3} ,$$

$$\text{则有 } AD^2 + BD^2 = AB^2 ,$$

$$\text{所以 } \angle ADB = 90^\circ ,$$

$$\text{则 } \angle ABC = 120^\circ ,$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中} , AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC ,$$

$$= 4 + 1 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7 ,$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC})$$

$$= (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{PM}^2 - \overrightarrow{MA}^2$$

$$= \overrightarrow{PM}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{CA}^2 = |\overrightarrow{PM}|^2 - \frac{1}{4} \times 7 = -\frac{25}{16} ,$$

$$\text{解得 } PM = \frac{\sqrt{3}}{4} ,$$

$$\text{所以 } DP = DM - PM = \frac{1}{2}BD - PM = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} ,$$

取PD的中点为R ,

$$\text{故同理可得 } \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NR}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{PD}^2 ,$$

$$\text{又 } BR = BD - RD = BD - \frac{1}{2}PD = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{8} ,$$

设点R到AB的距离为d ,

$$\text{则有 } NR \geq d = BR \cdot \sin 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{16} ,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NR}^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{PD}^2 \geq \left(\frac{7\sqrt{3}}{16}\right)^2 - \frac{1}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{135}{256} ,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{ND} \cdot \overrightarrow{NP} \text{ 的最小值为 } \frac{135}{256} .$$

$$\text{故答案为 : } \frac{\sqrt{3}}{4} ; \frac{135}{256} .$$

【标注】 【知识点】线性运算和数量积综合问题