

# 选填练习

## 一、标题

1. 已知全集  $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  , 集合  $A = \{x | 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$  ,  $B = \{1, 2\}$  , 则  $\complement_U(A \cup B) = ( \quad )$  .
- A.  $\{1, 2\}$                       B.  $\{0, 1, 2\}$                       C.  $\{-2, -1, 3\}$                       D.  $\{-2, -1, 0, 3\}$

【答案】 C

【解析】 因为全集  $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  ,  
集合  $A = \{x | 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{Z}\} = \{0, 1\}$  ,  $B = \{1, 2\}$  ,  
 $\therefore A \cup B = \{0, 1, 2\}$  ,  
则  $\complement_U(A \cup B) = \{-2, -1, 3\}$  .  
故选C .

【标注】 【知识点】 补集 ; 并集 ; 交、并、补集混合运算

2. 已知  $a \in \mathbf{R}$  , 则 “ $-1 < a < 0$ ” 是 “ $ax^2 + 2ax - 1 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立” 的 (  $\quad$  ) .
- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

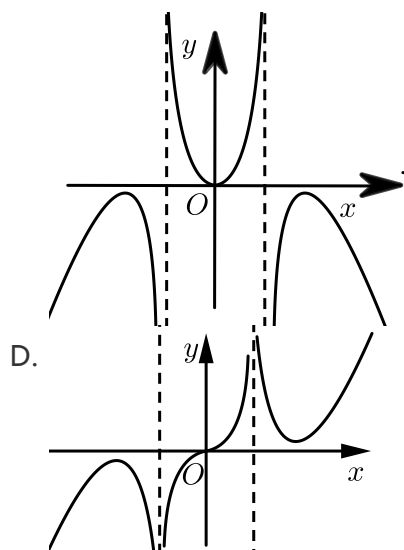
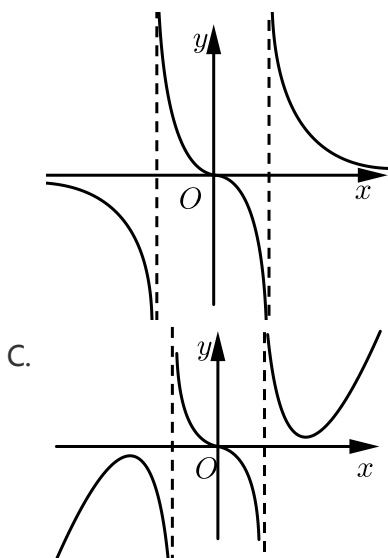
【解析】  $a = 0$ 时 , 不等式化为 $-1 < 0$  , 满足条件 ,  
 $a < 0$ 时 ,  $ax^2 + 2ax - 1 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立 ,  $\Delta = 4a^2 + 4a < 0$  , 解得 $-1 < a < 0$  ,  
 $\therefore$  “ $-1 < a < 0$ ” 是 “ $ax^2 + 2ax - 1 < 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立” 的充分不必要条件 . 故选A .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 函数  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2|x| - 1}$  的图象大致是 (  $\quad$  ) .

A.

B.



**【答案】** C

**【解析】** 由  $2|x| - 1 \neq 0$  得  $|x| \neq \frac{1}{2}$ , 即  $x \neq \pm \frac{1}{2}$ , 即函数的定义域为  $\left\{x \mid x \neq \pm \frac{1}{2}\right\}$ ,

$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2|-x| - 1} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2|x| - 1} = -f(x)$ , 即函数  $f(x)$  是奇函数, 图象关于原点对称, 故B错误;

当  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 故A错误;

当  $0 < x < \frac{1}{2}$  时,  $2|x| - 1 < 0$ ,  $e^x - e^{-x} > 0$ , 此时  $f(x) < 0$ , 故D错误.

故选: C.

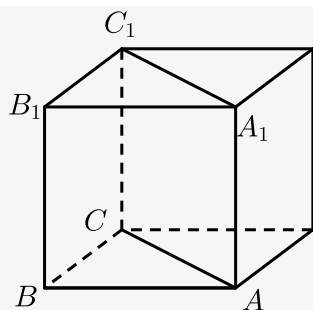
**【标注】** 【知识点】 图象法; 函数图象的识别问题

4. 张衡是中国东汉时期伟大的天文学家、数学家, 他曾经得出圆周率的平方等于10, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱垂直于底面, 且  $AB = BC = \sqrt{2}$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AA_1 = 2$ . 若该三棱柱的所有顶点都在同一球面上, 利用张衡的结论可得该球的表面积为 ( ).

A. 8                      B.  $8\sqrt{10}$                       C. 12                      D.  $12\sqrt{10}$

**【答案】** B

**【解析】** 根据题意, 棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  外接球即为以  $BA$ ,  $BC$ ,  $BB_1$  为长宽高的长方体外接球,



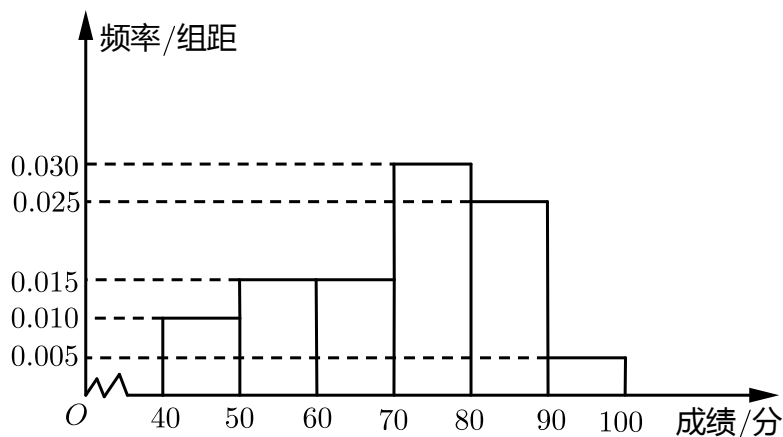
该长方体外接球的半径为  $\frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}$ ,

所以该球的表面积为  $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times (\sqrt{2})^2 = 8\pi = 8\sqrt{10}$ .

故选B.

**【标注】** 【知识点】空间几何体的内切球、外接球问题

5. 某社区组织“学习强国”的知识竞赛，从参加竞赛的市民中抽出40人，将其成绩分成以下6组：第1组[40, 50)，第2组[50, 60)，第3组[60, 70)，第4组[70, 80)，第5组[80, 90)，第6组[90, 100]，得到如图所示的频率分布直方图，现采用分层抽样的方法，从第2, 3, 4组中按分层抽样抽取8人，则第2, 3, 4组抽取的人数依次为( ) .



A. 1, 3, 4

B. 2, 3, 3

C. 2, 2, 4

D. 1, 1, 6

**【答案】** C

**【解析】** 第2组频率为  $0.015 \times 10 = 0.15$ ,

第3组频率为  $0.015 \times 10 = 0.15$ ,

第4组频率为  $0.03 \times 10 = 0.3$ ,

$\therefore$  其人数比为  $0.15 : 0.15 : 0.3 = 1 : 1 : 2$ ,

$\therefore$  2组:  $8 \times \frac{1}{1+1+2} = 2$ ,

3组:  $8 \times \frac{1}{1+1+2} = 2$ ,

$$4\text{组}: 8 \times \frac{2}{1+1+2} = 4.$$

故选C.

【标注】【知识点】分层随机抽样

6. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ , 则双曲线 $C$ 的离心率为( ).
- A. 2                      B.  $\sqrt{5}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】由题意双曲线渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,  
 $\therefore$ 渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ ,  
 则圆心 $(2, 0)$ 到 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 的距离等于1, 即 $\frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2b}{c} = 1$ ,  
 $\therefore c = 2b$ , 由 $a^2 = c^2 - b^2$ , 可得 $a = \sqrt{3}b$ ,  
 故双曲线 $C$ 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{2b}{\sqrt{3}b} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

故选D.

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

7. 已知函数 $y = f(x-2)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 在 $x \in (0, +\infty)$ 时,  $f(x)$ 单调递增. 若 $a = f(4^{\ln 3})$ ,  $b = f(2^{-e})$ ,  $c = f\left(\ln \frac{1}{\pi}\right)$  (其中 $e$ 为自然对数的底数,  $\pi$ 为圆周率), 则 $a, b, c$ 的大小关系为( ).
- A.  $a > c > b$                       B.  $a > b > c$                       C.  $c > a > b$                       D.  $c > b > a$

【答案】A

【解析】根据题意, 函数 $y = f(x-2)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称, 即函数 $f(x)$ 为偶函数, 满足 $f(-x) = f(x)$ , 则 $c = f\left(\ln \frac{1}{\pi}\right) = f(\ln \pi)$   
 $4^{\ln 3} > 4^1 = 4 > \ln \pi > \ln e = 1 > 2^{-e} > 0$ ,  
 又由 $x \in (0, +\infty)$ 时,  $f(x)$ 单调递增,  
 则有 $a > c > b$ .  
 故选A.

【标注】 【知识点】 函数单调性与奇偶性综合问题

8. 关于函数  $f(x) = \cos 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x$  , 有下列命题 :

- ①  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$  ;
- ② 函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{3}$  对称 ;
- ③  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$  上单调递增 ;
- ④ 将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{5\pi}{12}$  个单位长度后所得到的图象与函数  $y = 2 \sin 2x$  的图象重合 .

其中正确的命题是 ( ) .

- A. ①②③                      B. ②④                      C. ①③                      D. ①②④

【答案】 A

【解析】  $f(x) = \cos 2x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x$

$$= \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$$

$$= 2 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) ,$$

所以  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  , 所以①正确 ;

当  $x = \frac{\pi}{3}$  时 ,  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \pi = -2$  , 所以②正确 ;

当  $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$  时 ,  $2x + \frac{\pi}{3} \in [-\pi, 0]$  ,

此时  $f(x)$  为增函数 , 所以③正确 ;

将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{5\pi}{12}$  个单位长度后得到的函数解析式为

$$y = 2 \cos \left[ 2 \left( x + \frac{5\pi}{12} \right) + \frac{\pi}{3} \right]$$

$$= 2 \cos \left( 2x + \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$= 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) ,$$

所以④不正确 ;

故选 A .

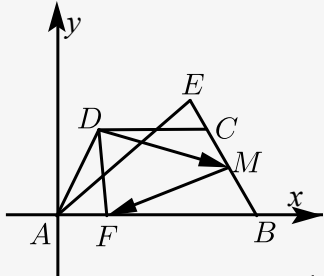
【标注】 【知识点】 余弦型三角函数的图象与性质 ; 正弦函数的图象和性质

9. 在等腰梯形  $ABCD$  中 ,  $AB \parallel CD$  ,  $AB = 2$  ,  $AD = 1$  ,  $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$  , 点  $F$  是线段  $AB$  上的一点 ,  $M$  为直线  $BC$  上的动点 , 若  $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$  ,  $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{AB}$  , 且  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$  , 则  $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{DM}$  的最大值为 ( ) .

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $-\frac{63}{64}$                       C.  $-1$                       D.  $-\frac{23}{64}$

【答案】B

【解析】以A为原点，AB所在直线为x轴，建立平面直角坐标系，如图，



由已知可得  $A(0,0)$ ,  $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $F(2\lambda, 0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

设  $E(m,n)$ , 则  $\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{CE} = \left(m - \frac{3}{2}, n - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

由  $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CE}$  可得  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3m - \frac{9}{2}, 3n - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

解得  $m = \frac{4}{3}$ ,  $n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $E\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ;

$\overrightarrow{AE} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  $\overrightarrow{DF} = \left(2\lambda - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

由  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = -1$  得  $\frac{4}{3}\left(2\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$ , 解得  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,

此时  $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ,

设  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ , 则  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BD} = x\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BF} - x\overrightarrow{BC} = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ ,

所以  $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{DM} = -\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{9}{4}$ ,

当  $x = \frac{9}{8}$  时,  $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{DM}$  取到最大值  $-\frac{63}{64}$ .

故选B.

【标注】 【知识点】线性运算和数量积综合问题；数量积的坐标表达式

10. 若复数  $z$  满足:  $z(1+i) = |1+\sqrt{3}i|$ , 则复数  $z$  的虚部是 \_\_\_\_\_.

【答案】-1

【解析】由  $z(1+i) = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ,

$$\text{得 } z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i,$$

∴复数 $z$ 的虚部是 $-1$ .

故答案为： $-1$ .

**【标注】** 【知识点】实部与虚部

11. 二项式 $\left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^5$ 中, 则其展开式中 $x$ 的系数是 \_\_\_\_\_.

**【答案】** 405

**【解析】**  $\left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^5$  展开式的通项公式为  $T_{r+1} = C_5^r (3\sqrt{x})^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = 3^{5-r} C_5^r x^{\frac{5-3r}{2}}$ ,

$$\text{令 } \frac{5-3r}{2} = 1 \text{ 得 } r = 1,$$

所以展开式中 $x$ 的系数是  $3^4 C_5^1 = 405$ .

故答案为：405.

**【标注】** 【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

12. 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F$ , 其准线过 $(-2, 2)$ , 过焦点 $F$ 倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线交抛物线于 $A$ ,  $B$ 两点, 则 $p =$  \_\_\_\_\_ ; 弦 $AB$ 的长为 \_\_\_\_\_.

**【答案】** 4;  $\frac{32}{3}$

**【解析】** 因为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线过 $(-2, 2)$ ,

$$\text{所以 } -\frac{p}{2} = -2, \text{ 即 } p = 4,$$

$$\text{由题意得直线 } AB: y = \sqrt{3}(x-2), \text{ 联立 } \begin{cases} y = \sqrt{3}(x-2) \\ y^2 = 8x \end{cases} \text{ 得 } 3x^2 - 20x + 12 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{20}{3},$$

$$\text{弦长 } |AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{20}{3} + 4 = \frac{32}{3}.$$

$$\text{故答案为: } 4, \frac{32}{3}.$$

**【标注】** 【知识点】抛物线的定义

13. 为了贯彻落实党中央对新冠肺炎疫情防控工作的部署和要求, 坚决防范疫情向校园蔓延、切实保障广大师生身体健康和生命的安全, 教育主管部门决定通过电视频道、网络平台等多种方式实施线上

教育教学工作．为了了解学生和家長对网课授课方式的满意度，从经济不发达的A城市和经济发达的B城市分别随机调查了20个用户，得到了一个用户满意度评分的样本，并绘制出茎叶图如下：

| A城市       |   | B城市         |
|-----------|---|-------------|
| 8 6       | 4 |             |
| 6 4 3 1   | 5 | 3           |
| 5 5 4 2   | 6 | 2 4 6       |
| 9 6 4 3 3 | 7 | 3 4 6 6 8 8 |
| 3 2 1     | 8 | 1 2 5 6 8 9 |
| 3 1       | 9 | 2 5 5 7     |

若评分不低于80分，则认为该用户对此授课方式“认可”，否则认为该用户对此授课方式“不认可”．以该样本中A，B城市的用户对此授课方式“认可”的频率分别作为A，B城市用户对此授课方式“认可”的概率．

现从A城市和B城市的所有用户中分别随机抽取2个用户，用X表示这4个用户中对此授课方式“认可”的用户个数，则 $P(X=3)=$ \_\_\_\_\_；用Y表示这从A城市随机抽取2个用户中对此授课方式“认可”的用户个数，则Y的数学期望为\_\_\_\_\_．

**【答案】**  $\frac{1}{8}; \frac{1}{2}$

**【解析】** 从城市A中随机抽取1个用户，则该用户对网络授课认可的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ，  
从城市B中随机抽取1个用户，则该用户对网络授课认可的概率为 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ ，

设选出A城市的2个用户中对授课方式满意的人数为a，选出B城市的2个用户中对授课方式满意的人数为b，

$$\text{则 } a \sim B\left(2, \frac{1}{4}\right), b \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore P(X=3) = P(a=1) \cdot P(b=2) + P(a=2)P(b=1)$$

$$= C_2^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot C_2^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$E(Y) = E(a) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}$ ．

**【标注】** 【知识点】n次独立重复试验与二项分布

14. 若对任意 $a, b, c \in (0, +\infty)$ ，存在实数m，使得不等式 $\frac{a^2 + \frac{1}{2}b^2 + c^2}{ab + bc} < \frac{3}{2}m + m^2$ 成立，则实数m的取值范围是\_\_\_\_\_．

**【答案】**  $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$



【解析】
$$\begin{aligned} & \text{因为 } \frac{a^2 + \frac{1}{2}b^2 + c^2}{ab + bc} = \frac{a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 + c^2}{ab + bc} \\ & \geq \frac{2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{4}b^2} + 2\sqrt{\frac{1}{4}b^2 \cdot c^2}}{ab + bc} = 1, \end{aligned}$$

当且仅当  $a = c = \frac{1}{2}b$  时，取到最小值 1，

所以  $m^2 + \frac{3}{2}m - 1 > 0$ ，解得  $m > \frac{1}{2}$  或  $m < 2$ 。

故答案为： $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。

【标注】【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的概念

15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - 2, & x > 1 \end{cases}$ ，若函数  $g(x) = f(x) - k|x + 2|$  有三个零点，则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

【答案】 $(0, 7 - 4\sqrt{3}) \cup \left(1, \frac{e^2}{3}\right]$

【解析】画出  $f(x)$  的图象如图所示，函数  $g(x) = f(x) - k|x + 2|$  有三个零点，

等价于令  $h(x) = k|x + 2|$ ， $h(x)$  与  $f(x)$  有三个交点，

当  $k \leq 0$  时，显然不符合题意。

当  $x < -2$  时， $h(x)$  与  $f(x)$  必有一个交点，

当  $x > -2$  时，若  $h(x)$  与  $y = e^{x+1}$  相切，

即  $\begin{cases} e^{x+1} = k(x+2) \\ e^{x+1} = k \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = -1 \\ k = 1 \end{cases}$ ，

此时， $h(x)$  与  $f(x)$  有两个交点，

当  $k = 1$  时， $f(1) = e^2$ ，

把  $(1, e^2)$  代入  $h(x) = k(x + 2)$ ，得： $k = \frac{e^2}{3}$ ，

此时， $h(x)$  与  $f(x)$  有三个交点，

故当  $k \in \left(1, \frac{e^2}{3}\right]$  时， $h(x)$  与  $f(x)$  有三个交点。

当  $h(x)$  与  $y = -x^2 + 3x - 2$  相切时，

$$-x^2 + 3x - 2 = kx + 2k,$$

$$x^2 + (k - 3)x + 2k + 2 = 0,$$

$$\Delta = (k - 3)^2 - 4(2k + 2) = 0,$$

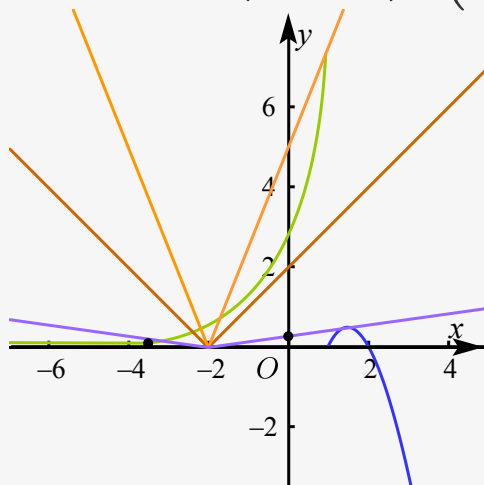
$$k^2 - 14k + 1 = 0,$$

$$k_1 = 7 - 4\sqrt{3}, k_2 = 7 + 4\sqrt{3} \text{ (舍去)}.$$

此时， $h(x)$  与  $f(x)$  有两个交点，

故当  $k \in (0, 7 - 4\sqrt{3})$  时,  $h(x)$  与  $f(x)$  有三个交点.

综上所述: 当  $k \in (0, 7 - 4\sqrt{3}) \cup \left(1, \frac{e^2}{3}\right]$  时, 函数  $g(x) = f(x) - k|x + 2|$  有三个零点.



**【标注】** 【知识点】利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；函数零点的概念

## 二、标题

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x|x > 0\}$ ,  $B = \{x|x \geq 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_U B) = ( )$ .

- A.  $\{x|0 < x < 1\}$       B.  $\{x|0 < x \leq 1\}$       C.  $\{x|x < 0\}$       D.  $\{x|x > 1\}$

**【答案】** A

**【解析】** 由题意,  $U = \mathbf{R}$ ,  $B = \{x|x \geq 1\}$ ,

$$\therefore \complement_U B = \{x|x < 1\},$$

$$\because A = \{x|x > 0\},$$

$$\therefore A \cap (\complement_U B) = \{x|0 < x < 1\}.$$

**【标注】** 【知识点】交集；补集；交、并、补集混合运算

2. 下列函数中, 在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减的是 ( ).

- A.  $y = x^{\frac{1}{2}}$       B.  $y = 2^x$       C.  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$       D.  $y = -\frac{1}{x}$

**【答案】** C

**【解析】** A 选项:  $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ , 在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 A 选项错误;

B 选项:  $y = 2^x$ , 在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 B 项错误;

C 选项： $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，根据对数函数的图象性质，  
 当  $0 < a < 1$  时函数  $\log_a x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，  
 所以  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ，在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减，故 C 项正确；  
 D 选项： $y = -\frac{1}{x}$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增，故 D 错误。  
 故选 C。

**【标注】** 【知识点】求单调区间

3. 已知  $a = \ln \pi$ ， $b = \log_{\frac{1}{2}} 5$ ， $c = e^{-\frac{1}{2}}$ ，则 ( )。

- A.  $a > b > c$                       B.  $b > a > c$                       C.  $c > b > a$                       D.  $a > c > b$

**【答案】** D

**【解析】**  $\because \ln \pi > \ln e = 1$ ，

$\therefore a > 1$ ，

$\because \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$ ，

$\therefore b < 0$ ，

$\because 0 < e^{-\frac{1}{2}} < e^0 = 1$ ，

$\therefore 0 > c > 1$ ，

$\therefore a > c > b$ ，

故选：D。

**【标注】** 【知识点】对数函数的图象及性质；指对幂比较大小；指数函数的图象及性质

4. 设  $x \in \mathbf{R}$ ，则 “ $|x - 1| < 2$ ” 是 “ $x^2 < x$ ” 的 ( )。

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
 C. 充要条件                                  D. 既不充分也不必要条件

**【答案】** B

**【解析】**  $|x - 1| < 2$ ，解得： $-1 < x < 3$ 。

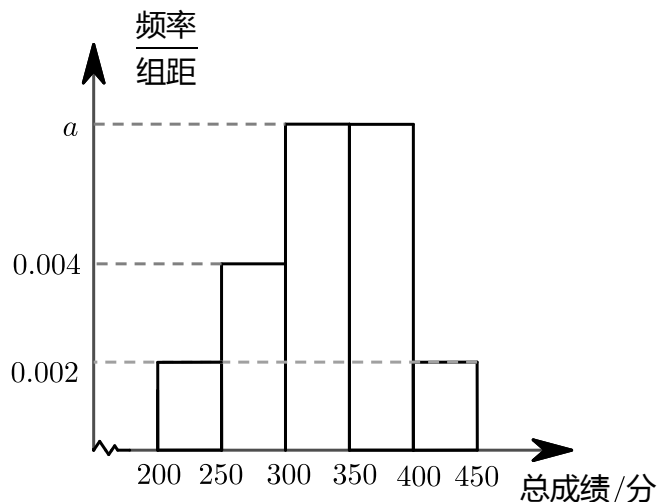
$x^2 < x$ ，解得： $0 < x < 1$ 。

$\therefore$  “ $|x - 1| < 2$ ” 是 “ $x^2 < x$ ” 的必要而不充分条件。

故选 B。

**【标注】** 【知识点】充要条件与不等式结合

5. 某地区教育主管部门为了对该地区模拟考试成进行分析，随机抽取了200分到450分之间的2000名学生的成绩，并根据这2000名学生的成绩画出样本的频率分布直方图，如图所示，则成绩在[250, 350]内的学生人数为（ ）。



- A. 800                      B. 1000                      C. 1200                      D. 1600

**【答案】** B

**【解析】** 由题意， $50 \times (0.002 \times 2 + 0.004 + 2a) = 1$ ，

解得  $a = 0.006$ ，

$\therefore$  成绩在[250, 350]内的学生人数为  $2000 \times (0.004 + 0.006) \times 50 = 1000$ 。

故选B。

**【标注】** 【知识点】频率分布直方图

6. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$ ， $y = f(x)$  的图像与直线  $y = 2$  的两个相邻交点的距离等于  $\pi$ ，则  $f(x)$  的一条对称轴是（ ）。

- A.  $x = -\frac{\pi}{12}$                       B.  $x = \frac{\pi}{12}$                       C.  $x = -\frac{\pi}{3}$                       D.  $x = \frac{\pi}{3}$

**【答案】** D

**【解析】** 由题，得  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x = 2 \sin \left( \omega x - \frac{\pi}{6} \right)$ ，

因为  $y = f(x)$  的图象与直线  $y = 2$  的两个相邻交点的距离等于  $\pi$ ，

所以函数  $y = f(x)$  的最小正周期  $T = \pi$ ，则  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ，

所以  $f(x) = 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right)$ ，

当  $x = \frac{\pi}{3}$  时， $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，

所以  $x = \frac{\pi}{3}$  是函数  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  的一条对称轴，

故选：D。

【标注】【知识点】求正弦型函数的对称轴

7. 设  $F$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点， $O$  为坐标原点，以  $OF$  为直径的圆与圆  $x^2 + y^2 = a^2$  交于  $P, Q$  两点，若  $|PQ| = |OF|$ ，则  $C$  的离心率为 ( )。

A.  $\sqrt{2}$

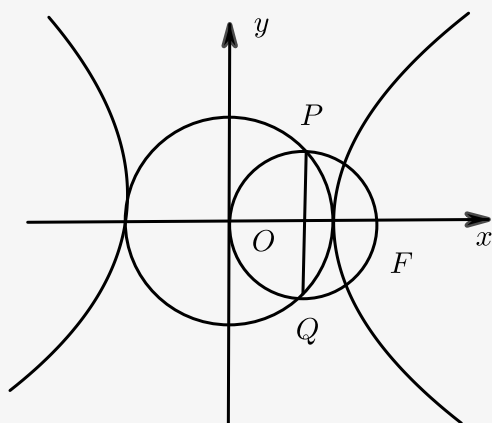
B.  $\sqrt{3}$

C. 2

D.  $\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】如图，由题意，



知以  $OF$  为直径的圆的方程为  $\left[x - \frac{c}{2}\right]^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$  ①，

将  $x^2 + y^2 = a^2$  记为②式，①-②得  $x = \frac{a^2}{c}$ ，

则以  $OF$  为直径的圆与圆  $x^2 + y^2 = a^2$  的相交弦所在直线的方程为  $x = \frac{a^2}{c}$ ，所以

$$|PQ| = 2\sqrt{a^2 - \left[\frac{a^2}{c}\right]^2}.$$

由  $|PQ| = |OF|$ ，得  $2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{c}\right)^2} = c$ ，整理得  $c^4 - 4a^2c^2 + 4a^4 = 0$ ，

即  $e^4 - 4e^2 + 4 = 0$ ，解得  $e = \sqrt{2}$ ，故选 A。

【标注】【知识点】求双曲线的离心率

8. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ，且  $a_{n+1} = 4a_n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则数列  $\{a_n\}$  的通项公式为 ( )。

A.  $2^{2n-1} + 1$

B.  $2^{2n-1} - 1$

C.  $2^{2n} + 1$

D.  $2^{2n} - 1$

【答案】D

【解析】由 $a_{n+1} = 4a_n + 3 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 得 $a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$ ,

$$\therefore a_1 = 3,$$

$$\therefore a_1 + 1 = 3 + 1 = 4 \neq 0,$$

则数列 $\{a_n + 1\}$ 是以4为首项, 以4为公比的等比数列,

$$\therefore a_n + 1 = 4 + 4^{n-1} = 4^n = 2^{2n},$$

$$\text{则 } a_n = 2^{2n} - 1.$$

故选D.

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】等比数列求通项问题

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ , 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有三个零点, 则( ).

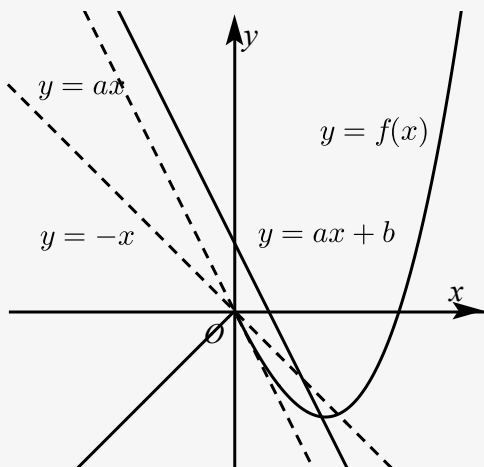
A.  $a < -1, b < 0$       B.  $a < -1, b > 0$       C.  $a > -1, b < 0$       D.  $a > -1, b > 0$

【答案】C

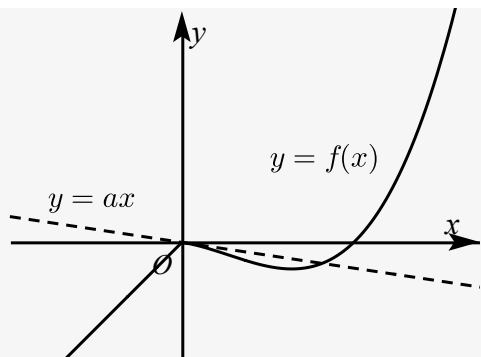
【解析】方法一: 原题可转化为 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 有三个交点.

当 $x \geq 0$ 时,  $f'(x) = x^2 - (a+1)x + a = (x-a)(x-1)$ , 且 $f(0) = 0, f'(0) = a$ , 则

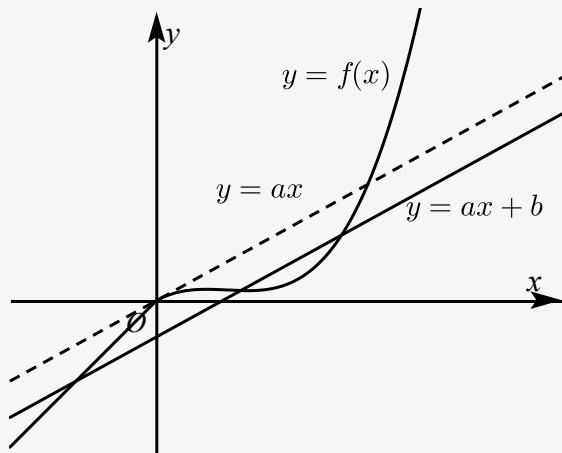
(1) 当 $a \leq -1$ 时, 如图 $y = f(x)$ 与 $y = ax + b$ 不可能有三个交点(实际上有一个), 排除A, B.



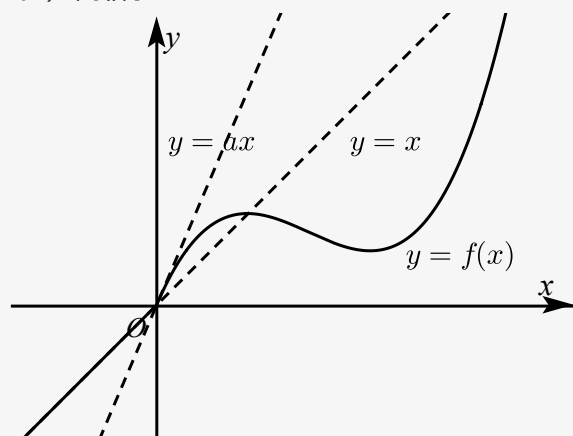
(2) 当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $y = ax$ 的图象如下图所示. 欲使两个函数有三个交点, 则必有 $b < 0$ .



(3) 当  $0 \leq a < 1$  时，函数  $f(x)$  和  $y = ax + b$  的图象如下图所示．欲使两个函数有三个交点，则必有  $b < 0$ ．



(4) 当  $a \geq 1$  时，函数  $f(x)$  和  $y = ax + b$  的图象如下图所示．不可能有三个交点（实际上有一个），排除D．



综上所述，则  $-1 < a < 1$ ， $b < 0$ ．

方法二：记  $g(x) = f(x) - ax - b$ ，

当  $x < 0$  时， $g(x) = (1-a)x - b$ ，最多有1个零点．

当  $x \geq 0$  时， $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$ ，

$g'(x) = x^2 - (a+1)x = x[x - (a+1)]$ ，

若  $a \leq -1$ ，则  $a+1 \leq 0$ ，即  $-a-1 \geq 0$ ，

$\therefore g'(x) \geq 0$ ，

$\therefore$  函数  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增，

$\therefore g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上最多有 1 个零点,

故  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上最多有 2 个零点, 不合题意,

故  $a > -1$ ,

当  $x \in [0, a+1)$  时,  $g'(x) \leq 0$ , 函数  $g(x)$  单调递减,

当  $x \in (a+1, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ , 函数  $g(x)$  单调递增,

故  $g(x)$  有 3 个零点的条件为 
$$\begin{cases} \frac{b}{1-a} < 0 \\ a > -1 \\ g(0) \geq 0 \\ g(a+1) < 0 \end{cases},$$

所以 
$$\begin{cases} b < 0 \\ -1 < a < 1 \\ b > -\frac{1}{6}(a+1)^3 \end{cases}, \text{ 对照选项.}$$

故选 C.

**【标注】** 【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数)

10. 已知复数  $z = (a + 2i)(1 + i)$ , 其中  $i$  为虚数单位, 若复数  $z$  为纯虚数, 则实数  $a$  的值是 \_\_\_\_\_.

**【答案】** 2

**【解析】** 因为  $(a + 2i)(1 + i) = a + ai + 2i - 2 = (a - 2) + (a + 2)i$ ,

由题意  $(a + 2i)(1 + i)$  的实部为 0, 所以  $a - 2 = 0$ , 解得  $a = 2$ . 故本题正确答案为 2.

**【标注】** 【知识点】复数的四则运算综合; 复数的乘法和除法

11. 在  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$  的展开式中,  $x$  的系数等于 \_\_\_\_\_.

**【答案】** 7

**【解析】**  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$  的展开式中, 通项公式

$$T_{r+1} = C_8^r \cdot (\sqrt{x})^r \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{8-r} = C_8^r \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{8-r} \cdot x^{r-4},$$

当  $r - 4 = 1$ , 即  $r = 5$  时,  $C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{8-5} = 7$ .

**【标注】** 【知识点】求二项式展开式的特定项; 求项的系数或二项式系数

12.



一个袋中装着标有数字1, 2, 3, 4, 5的小球各2个, 从中任意摸取3个小球, 每个小球被取出的可能性都相等, 则取出的3个小球中数字最大的为4的概率是 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $\frac{3}{10}$

**【解析】** 由题, 得满足题目要求的情况有, ①有一个数字4, 另外两个数字从1, 2, 3里面选和②有两个数字4, 另外一个数字从1, 2, 3里面选, 由此即可得到本题答案.

满足题目要求的情况可以分成2大类:

①有一个数字4, 另外两个数字从1, 2, 3里面选, 一共有 $C_2^1 C_3^2$ 种情况;

②有两个数字4, 另外一个数字从1, 2, 3里面选, 一共有 $C_2^2 C_3^1$ 种情况, 又从中任意摸取3个小球, 有 $C_{10}^3$ 种情况, 所以取出的3个小球中数字最大的为4的概率 $P = \frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$ .

故答案为:  $\frac{3}{10}$ .

**【标注】** 【知识点】古典概型的概率计算 (涉及计数原理)

13. 曲线 $y = (x^2 + 1)e^x$ 在点(0, 0)处的切线方程为 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $y = x$

**【解析】** 曲线 $y = (x^2 + 1)e^x$ 的导数 $y' = 2x \cdot e^x + (x^2 + 1)e^x$   
 $= (x^2 + 2x + 1)e^x$   
 $= (x + 1)^2 e^x,$

则 $y'|_{x=0} = (0 + 1)^2 \cdot e^0 = 1,$

故在点(0, 0)处的切线方程为:  $y = x$ .

**【标注】** 【知识点】求在某点处的切线方程; 导数的几何意义

14. 已知 $x > 0, y > 0, x + 3y = 5xy$ , 则 $x + 2y$ 的最小值是 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $\frac{2\sqrt{6}}{5} + 1$

**【解析】** 因为 $x > 0, y > 0, x + 3y = 5xy$ ,

等式两边同除以 $5xy$ 得 $\frac{1}{5y} + \frac{3}{5x} = 1,$

所以 $x + 2y = (x + 2y) \left( \frac{1}{5y} + \frac{3}{5x} \right)$

$$= \frac{x}{5y} + \frac{6y}{5x} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{x}{5y} \times \frac{6y}{5x}} + 1 = \frac{2\sqrt{6}}{5} + 1.$$

当且仅当  $x = \sqrt{6y}$  时取等号.

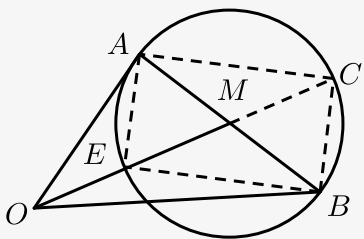
故答案为:  $\frac{2\sqrt{6}}{5} + 1$ .

**【标注】** 【知识点】利用基本不等式求最值；基本不等式的实际应用；倒数和形式

15. 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , 且已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ , 则  $|\vec{c}|$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{\sqrt{19} - \sqrt{7}}{2}$

**【解析】** 如图所示,



设  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,

由题, 得  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ,  $|\vec{OA}| = 2$ ,  $|\vec{OB}| = 3$ ,

$\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{CB} = \vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 3$ ,

又  $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ , 所以  $\vec{CA} \perp \vec{CB}$ , 则点  $C$  在以  $AB$  为直径的圆上, 取  $AB$  的中点为  $M$ , 则  $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ ,

设以  $AB$  为直径的圆与线段  $OM$  的交点为  $E$ , 则  $|\vec{c}|$  的最小值是  $|\vec{OE}|$ ,

$$\begin{aligned} \text{因为 } |\vec{OM}| &= \sqrt{\frac{1}{40}(\vec{OA} + \vec{OB})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{OA}^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB}^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{4 + 2 \times 3 + 9} = \frac{\sqrt{19}}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{7},$$

$$\text{所以 } |\vec{c}| \text{ 的最小值是 } |\vec{OE}| = OM - ME = OM - \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{19} - \sqrt{7}}{2}.$$

故答案为:  $\frac{\sqrt{19} - \sqrt{7}}{2}$ .

**【标注】** 【知识点】向量的模；线性运算和数量积综合问题；利用向量数量积求模长

### 三、标题

1. 已知函数  $f(x) = 2^x + 5x$ . 若  $a = f\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\right)$ ,  $b = f(\log_3 \sqrt{5})$ ,  $c = f(6^{0.2})$ , 则  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小关系为 ( ).
- A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $c > a > b$                       D.  $c > b > a$

【答案】D

【解析】因为  $0 = \log_{\frac{1}{3}} 1 < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 < \log_3 \sqrt{5} < \log_3 3 = 1$ ,  $6^{0.2} > 1$ ,

函数  $y = 2^x$  与  $y = 5x$  都是增函数, 所以  $f(x) = 2^x + 5x$  也是增函数,

因此  $f\left(\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\right) < f(\log_3 \sqrt{5}) < f(6^{0.2})$ ,

即  $c > b > a$ .

故选: D.

【标注】 【知识点】对数函数的图象及性质; 指数函数的图象及性质; 指对幂比较大小

2. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期为  $\pi$ , 其图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称. 给出下面四个结论:
- ① 将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后得到的函数图象关于原点对称,
- ② 点  $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$  为  $f(x)$  图象的一个对称中心;
- ③  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ;
- ④  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$  上单调递增. 其中正确的结论为 ( ).
- A. ①②                      B. ②③                      C. ②④                      D. ①④

【答案】C

【解析】因为函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期为  $\pi$ ,

其图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称,

所以  $\begin{cases} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \\ \frac{\omega}{6}\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} \omega = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$ ,

因为  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 因此  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ;

①将 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后函数解析式为 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

由 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ,

所以其对称中心为： $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$ , 故①错；

②由 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 解得 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ,

即函数 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right), k \in \mathbf{Z}$ ;

令 $-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}$ , 则 $k = 1$ , 故②正确；

③ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故③错；

④由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 得

$-\frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ,

即函数 $f(x)$ 的增区间为 $\left[-\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ ,

因此 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 即④正确.

故选：C.

**【标注】** 【知识点】正弦函数的图象和性质

3. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两条渐近线与圆 $x^2 + y^2 = 10$ 相交于 $A, B, C, D$ 四点, 若四边形 $ABCD$ 的面积为12, 则双曲线的离心率是( ).

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{3}$       B.  $\sqrt{10}$       C.  $\sqrt{10}$ 或 $\frac{\sqrt{10}}{3}$       D.  $2\sqrt{10}$

**【答案】** A

**【解析】** 根据双曲线与圆的对称性可得, 四边形 $ABCD$ 为矩形; 不妨设点 $A(x_0, y_0)$ 位于第一象限,

则 $S_{\text{矩形}ABCD} = 2x_0 \times 2y_0 = 4x_0y_0$

因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,

由 $\begin{cases} y_0 = \frac{b}{a}x_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 10 \end{cases}$ ,

得： $x_0^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0^2 = 10$ ,

即 $\frac{a^2 + b^2}{a^2} x_0^2 = 10$ ,

所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{10}{x_0^2}$ ,

$$\text{又 } S_{\text{矩形}ABCD} = 4x_0y_0 = \frac{4b}{a}x_0^2 = 12,$$

$$\text{所以 } x_0^2 = \frac{3a}{b} = \frac{3}{\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}}} = \frac{3}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

$$\text{因此 } e^2 = \frac{10}{x_0^2} = \frac{10}{3} \sqrt{e^2 - 1},$$

$$\text{整理得: } 9e^4 - 100e^2 + 100 = 0,$$

$$\text{解得: } e^2 = \frac{10}{9} \text{ 或 } e^2 = 10,$$

$$\text{所以 } e = \sqrt{10} \text{ 或 } e = \frac{\sqrt{10}}{3};$$

$$\text{又 } a > b > 0,$$

$$\text{所以双曲线的离心率 } e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} < \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } e = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

故选: A.

**【标注】** 【知识点】求双曲线的离心率

**【素养】** 数学运算; 逻辑推理

4. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 若  $a - 2i = \frac{b+i}{i}$  ( $i$  是虚数单位), 则复数  $a + bi$  是 ( ).

A.  $1 - 2i$

B.  $1 + 2i$

C.  $2 - i$

D.  $2 + i$

**【答案】** B

**【解析】** 因为  $a - 2i = \frac{b+i}{i} = \frac{(b+i)(-i)}{i(-i)} = -bi + 1,$

$$\text{所以 } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\text{因此 } a + bi = 1 + 2i,$$

故选 B.

**【标注】** 【知识点】复数的乘法和除法

5. 设  $\theta \in \mathbf{R}$ , 则  $\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$  是 “ $\sin \theta > 0$ ” 的 ( ).

A. 充分不必要条件

B. 充要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分又不必要条件

**【答案】** A

【解析】若  $\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$ ，则  $-\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ ，即  $0 < \theta < \pi$ ，所以  $\sin \theta > 0$ ；  
 若  $\sin \theta > 0$ ，则  $2k\pi < \theta < \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，不能推出  $\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$ ，  
 所以  $\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$  是 “ $\sin \theta > 0$ ” 的充分不必要条件。  
 故选：A。

【标注】【知识点】充要条件与三角函数结合

6. 已知函数  $f(x) = \ln x + x^2 - ax$ ，若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $y = 2x$  平行，则实数  $a = ( )$ 。
- A.  $\frac{7}{2}$                       B. 2                      C.  $\frac{3}{2}$                       D. 1

【答案】D

【解析】因为  $f(x) = \ln x + x^2 - ax$ ，所以  $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - a$ ，则  $f'(1) = 3 - a$ ；  
 又曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $y = 2x$  平行，  
 所以  $3 - a = 2$ ，解得  $a = 1$ 。  
 故选D。

【标注】【知识点】求在某点处的切线方程；导数的几何意义

7. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，以边  $BC$  所在的直线为轴，将  $\triangle ABC$  旋转一周，所成的曲面围成的几何体的体积为 ( )。
- A.  $36\pi$                       B.  $12\pi$                       C. 36                      D. 12

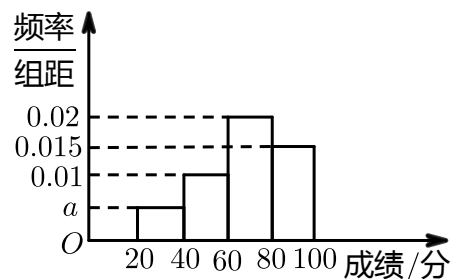
【答案】B

【解析】因为在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 90^\circ$ ，所以  $BC \perp AB$ ，  
 若以边  $BC$  所在的直线为轴，将  $\triangle ABC$  旋转一周，所得的几何体是以  $BC$  为高，  
 以  $AB$  为底面圆半径的圆锥，因为  $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，  
 因此，其体积为： $V = \frac{1}{3} \times \pi \times (AB)^2 \times BC = 12\pi$ 。  
 故选：B。

【标注】【知识点】组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积

8. 为普及环保知识，增强环保意识，某中学随机抽取部分学生参加环保知识测试，这些学生的成绩（分）的频率分布直方图如图所示，数据（分数）的分组依次为  $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ，

[80, 100] . 若分数在区间[20, 40)的频数为5 , 则大于等于60分的人数为 ( ) .



A. 15

B. 20

C. 35

D. 45

**【答案】** C

**【解析】** 因为分数在区间[20, 40)的频数为5 ,

由频率分布直方图可知 ,

区间[20, 40)对应的频率为  $1 - (0.01 + 0.02 + 0.015) \times 20 = 0.1$  ,

因此样本容量为  $\frac{5}{0.1} = 50$  ,

所以 , 大于等于60分的人数为  $50 \times (0.02 + 0.015) \times 20 = 35$  .

故选 : C .

**【标注】** 【知识点】 频率分布直方图 ; 用样本的数字特征估计总体的数字特征问题

9. 在等腰梯形ABCD中 ,  $AB \parallel CD$  ,  $\angle BAD = 60^\circ$  ,  $AB = 8$  ,  $CD = 4$  . 若M为线段BC的中点 ,

E为线段CD上一点 , 且  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = 27$  , 则  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DE} = ( )$  .

A. 15

B. 10

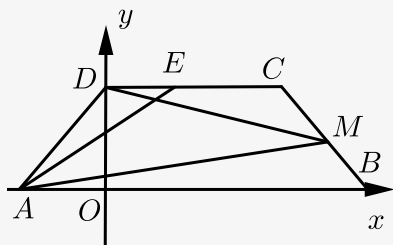
C.  $\frac{20}{3}$

D. 5

**【答案】** D

**【解析】** 过D作DO垂直于AB与O ,

建立如图所示的坐标系 ;



$\because$  等腰梯形ABCD中 ,  $AB \parallel CD$  ,  $\angle BAD = 60^\circ$  ,  $AB = 8$  ,  $CD = 4$  ,

则  $AO = \frac{8-4}{2} = 2$  ,

$$\therefore A(-2, 0), D(0, 2\sqrt{3}), B(6, 0), C(4, 2\sqrt{3});$$

$$\therefore M(5, \sqrt{3});$$

$$\text{设 } E(x, 2\sqrt{3});$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AM} = (7, \sqrt{3}), \overrightarrow{AE} = (x+2, 2\sqrt{3});$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AE} = 7(x+2) + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 27, \text{ 则 } x = 1;$$

$$\text{即 } E(1, 2\sqrt{3});$$

$$\therefore \overrightarrow{DM} = (5, -\sqrt{3}), \overrightarrow{DE} = (1, 0);$$

$$\therefore \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DE} = 5.$$

故选：D.

**【标注】** 【知识点】数量积的坐标表达式；平面向量数量积运算（非坐标）

10. 已知集合  $A = \{2, 2^m\}$ ,  $B = \{m, n\}$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ), 且  $A \cap B = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\left\{2, -2, \frac{1}{4}\right\}$

**【解析】**  $\because A = \{2, 2^m\}, B = \{m, n\}, A \cap B = \left\{\frac{1}{4}\right\},$

$$\therefore 2^m = \frac{1}{4}, m = -2,$$

$$\therefore n = \frac{1}{4}.$$

$$\text{故 } A \cup B = \left\{2, -2, \frac{1}{4}\right\}.$$

**【标注】** 【知识点】离散型集合运算中的含参问题

11. 在  $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2x^2\right)^5$  的展开式中,  $x^5$  项的系数为 \_\_\_\_\_ (用数字作答).

**【答案】** -80

**【解析】**  $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2x^2\right)^5$  的展开式中, 通项公式为:

$$T_{r+1} = C_5^r \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{5-r} \cdot (-2x^2)^r = C_5^r \cdot (-2)^r \cdot x^{\frac{5}{2}r - \frac{5}{2}},$$

$$\text{当 } \frac{5}{2}r - \frac{5}{2} = 5 \text{ 时, } r = 3,$$

$$\text{所以 } x^5 \text{ 项的系数为: } C_5^3 \cdot (-2)^3 = -80.$$



【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

12. 设  $a > 0, b > 0$ , 若  $a$  与  $b^2$  的等差中项是 2, 则  $\log_2 a + 2\log_2 b$  的最大值是 \_\_\_\_\_ .

【答案】 2

【解析】  $\because a$  与  $b^2$  的等差中项是 2,

$$\therefore a + b^2 = 4.$$

$$\because a > 0, b > 0,$$

$$\therefore 0 < ab^2 \leq \left(\frac{a+b^2}{2}\right)^2 = 4,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} a = b^2 \\ a + b^2 = 4 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore \log_2 a + 2\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^2 = \log_2(ab^2) \leq 2,$$

即  $\log_2 a + 2\log_2 b$  的最大值是 2.

【标注】 【知识点】 基本不等式的概念; 利用基本不等式求最值

13. 已知圆  $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ , 过点  $P(-2, 3)$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 2\sqrt{11}$ , 则  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $x - 2y + 8 = 0$

【解析】 由题意, 圆  $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$  的圆心为  $(-1, 1)$ , 半径为  $r = 4$ ,

又由题意可知,  $|AB|$  为弦长,

$$\text{所以圆心到直线 } l \text{ 的距离为: } d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 11} = \sqrt{5},$$

$$\text{设直线 } l \text{ 的方程为: } y - 3 = k(x + 2),$$

$$\text{即 } kx - y + 2k + 3 = 0,$$

$$\text{所以 } d = \frac{|-k - 1 + 2k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5},$$

$$\text{即 } d = \frac{|k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5},$$

$$\text{整理得 } 4k^2 - 4k + 1 = 0,$$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{2}.$$

$$\text{故直线 } l \text{ 的方程为 } x - 2y + 8 = 0.$$

$$\text{故答案为: } x - 2y + 8 = 0.$$

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

14. 天津市某学校组织教师进行“学习强国”知识竞赛，规则为：每位参赛教师都要回答3个问题，且对这三个问题回答正确与否相互之间互不影响，若每答对1个问题，得1分；答错，得0分，最后按照得分多少排出名次，并分一、二、三等奖分别给予奖励．已知对给出的3个问题，教师甲答对的概率分别为 $\frac{3}{4}$ ， $\frac{1}{2}$ ， $p$ ．若教师甲恰好答对3个问题的概率是 $\frac{1}{4}$ ，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ ；在前述条件下，设随机变量 $X$ 表示教师甲答对题目的个数，则 $X$ 的数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】  $\frac{2}{3}$ ； $\frac{23}{12}$

【解析】 因为教师甲恰好答对3个问题的概率是 $\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times p = \frac{1}{4}$ ，解得： $p = \frac{2}{3}$ ；

由题意，随机变量 $X$ 的可能取值分别为：0，1，2，3；

$$\text{所以 } P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{24},$$

$$P(X=1) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{24},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

$$\text{因此, } E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{24} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{23}{12}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}$ ； $\frac{23}{12}$ ．

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ，若存在 $x \in \mathbf{R}$ 使得关于 $x$ 的不等式 $f(x) \leq ax - 1$ 或立，则实数 $a$ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】  $(-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$

【解析】 因为函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0 \\ 2\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ，

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) \leq ax - 1 \Rightarrow x^2 - x \leq ax - 1 \Rightarrow ax \geq x^2 - x + 1 \Rightarrow a \leq x + \frac{1}{x} - 1,$$

$$\text{因为 } x + \frac{1}{x} = -\left[(-x) + \left(-\frac{1}{x}\right)\right] \leq -2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = -2,$$

$$\therefore a \leq -3;$$

当 $x = 0$ 时， $0 \leq -1$ 不成立；



故选B.

【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】全称量词命题与存在量词命题的否定

3. 在  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  的二项展开式中,  $x^2$  的项的系数是 ( ).

A. 28

B. 70

C. -70

D. -28

【答案】B

【解析】根据二项式定理,  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  的通项为  $T_{r+1} = C_8^r \cdot (-1)^{8-r} \cdot x^{\frac{3r}{2}-4}$ ,  
当  $\frac{3r}{2} - 4 = 2$  时, 即  $r = 4$  时, 可得  $T_5 = 70x^2$ , 即  $x^2$  项的系数为 70.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数; 求二项式展开式的特定项

4. 设  $a = \log_2 3$ ,  $b = \log_4 6$ ,  $c = 5^{-0.1}$ , 则 ( ).

A.  $a > b > c$

B.  $b > a > c$

C.  $c > a > b$

D.  $c > b > a$

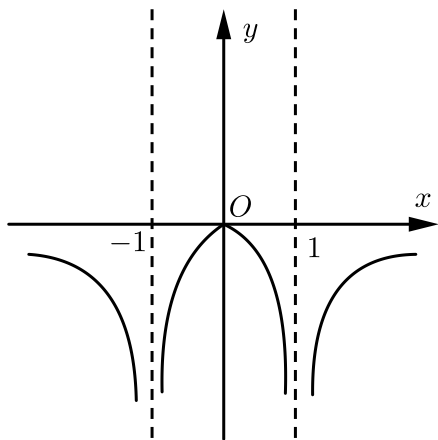
【答案】A

【解析】 $a = \log_2 3 \in (1, 2)$ ,  $b = \log_4 6 = \log_2 \sqrt{6} \in (1, \log_2 3)$ ,  $c = 5^{-0.1} \in (0, 1)$ , 因此  
 $a > b > c$ ,  
故选A.

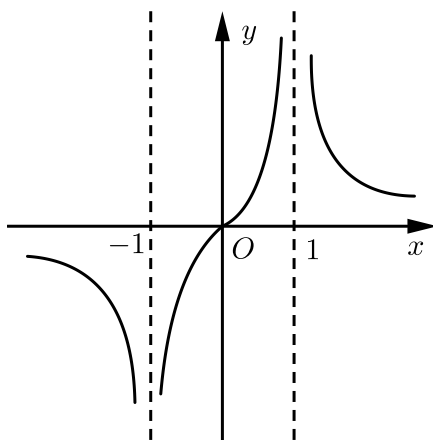
【标注】【知识点】指对幂比较大小

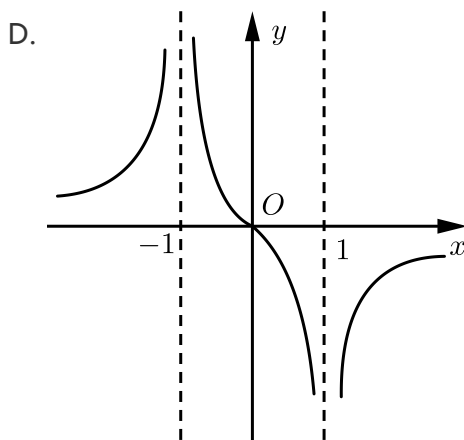
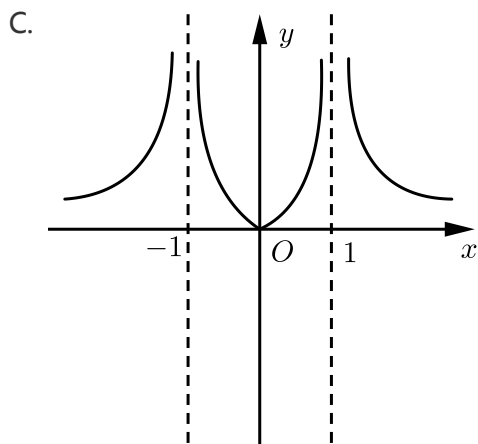
5. 函数  $f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$  的大致图象为 ( ).

A.



B.





**【答案】** D

**【解析】** 方法一：函数  $f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$  的定义域为  $\{x|x \neq \pm 1\}$ ，

当  $x = \frac{1}{2}$  时， $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 3 < 0$ ，排除B和C，

当  $x = -2$  时， $f(-2) = \ln 3 > 0$ ，排除A．故选D．

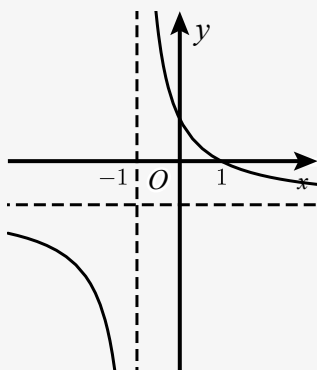
方法二：定义域：由  $f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$  得  $\frac{1-x}{1+x} \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$ ，

单调性： $\ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \ln \left| \frac{2}{x+1} - 1 \right|$ ，

令  $t = \frac{2}{x+1} - 1$ ，

显然  $t$  在  $(-\infty, -1)$ ， $(-1, +\infty)$  上单减，

并画出  $t$  图象：



可得： $|t|$  在  $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$  上单增， $(-1, 1)$  上单减，

根据复合函数“同增异减”可得．

$\ln |t|$  在  $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$  上单增， $(-1, 1)$  上单减，

故选D．

方法三：由定义域  $\frac{1-x}{x+1} \neq 0$ ，得  $x \neq \pm 1$ ，

根据A、B、C、D答案代入特值2和-2，

$f(2) = \ln \left| \frac{1-2}{1+2} \right| = \ln \frac{1}{3} < 0$ ，

排除B、C，

$$f(-2) = \ln \left| \frac{1+2}{1-2} \right| = \ln 3 > 0, \text{ 排除A,}$$

故选D.

【标注】 【知识点】对数函数与分式函数复合

6. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的（ ）.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 C

【解析】  $\because$  函数  $f(x) = \cos x$  在  $(0, \pi)$  上单调递减，

$$A \in (0, \pi), B \in (0, \pi),$$

$$\therefore " \cos A < \cos B " \Leftrightarrow " A > B " \Leftrightarrow " a > b " ,$$

$$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R ,$$

$$\therefore " \sin A > \sin B " \Leftrightarrow " a > b " \Leftrightarrow " \cos A < \cos B " ,$$

故 “ $\cos A < \cos B$ ” 是 “ $\sin A > \sin B$ ” 的充分必要条件 .

故选C .

【标注】 【知识点】充要条件与三角函数结合

7. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，点  $P$  是  $C$  的右支上一点，连接  $PF_1$  与  $y$  轴交于点  $M$ ，若  $|F_1O| = 2|OM|$  ( $O$  为坐标原点)， $PF_1 \perp PF_2$ ，则双曲线  $C$  的渐近线方程为（ ）.

A.  $y = \pm 3x$

B.  $y = \pm 2x$

C.  $y = \pm \sqrt{3}x$

D.  $y = \pm \sqrt{2}x$

【答案】 B

【解析】 设  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，

由  $|F_1O| = 2|OM|$ ， $\triangle OMF_1$  与  $\triangle PF_2F$  相似，

$$\text{所以 } \frac{|F_1O|}{|OM|} = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 2 ,$$

$$\text{即 } |PF_1| = 2|PF_2| ,$$

$$\text{又因为 } |PF_1| - |PF_2| = 2a ,$$

$$\text{所以 } |PF_1| = 4a, |PF_2| = 2a ,$$

所以  $4c^2 = 16a^2 + 4a^2$ , 即  $c^2 = 5a^2$ ,  $b^2 = 4a^2$ ,

所以双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ .

**【标注】** 【知识点】求双曲线的渐近线

**【素养】** 直观想象；数学运算

8. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x (\omega > 0)$  在  $[0, \pi]$  上的值域为  $\left[\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$ , 则实数  $\omega$  的取值范围为 ( ).
- A.  $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$       B.  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$       C.  $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$       D.  $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

**【答案】** C

**【解析】**  $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 当  $x \in [0, \pi], \omega x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right]$ , 则  $\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ,  
 $\therefore \frac{\pi}{2} \leq \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi$ , 求得  $\frac{1}{6} \leq \omega \leq \frac{1}{3}$ .

**【标注】** 【知识点】正弦函数的图象和性质；正弦型函数的图象与性质

9. 在四边形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 5$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle A = 60^\circ$ , 点  $E$  在线段  $CB$  的延长线上, 且  $AE = BE$ . 点  $M$  在边  $CD$  所在直线上, 则  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ME}$  的最大值为 ( ).
- A.  $-\frac{71}{4}$       B.  $-24$       C.  $-\frac{51}{4}$       D.  $-30$

**【答案】** A

**【解析】** 依题意, 如图以  $A$  为坐标原点建立平面直角坐标系, 由  $AB = 2$ ,  $AD = 5$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  
 $\therefore A(0, 0)$ ,  $B(1, \sqrt{3})$ ,  $C(4, \sqrt{3})$ ,  $D(5, 0)$ ,  
因为点  $E$  在线段  $CB$  的延长线上, 设  $E(x_0, \sqrt{3})$ ,  $x_0 < 1$ ,  
 $\therefore AE = BE$ ,  $x_0^2 + (\sqrt{3})^2 = (1 - x_0)^2$  解得  $x_0 = -1$ ,  
 $\therefore E(-1, \sqrt{3})$ ,  
 $\therefore C(4, \sqrt{3})$ ,  $D(5, 0)$ ,  
 $\therefore CD$  所在直线的方程为  $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$ ,  
因为点  $M$  在边  $CD$  所在直线上, 故设  $M(x, -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3})$ ,  
 $\therefore \overrightarrow{AM} = (x, -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{ME} = (-1 - x, \sqrt{3}x - 4\sqrt{3})$ ,

∴

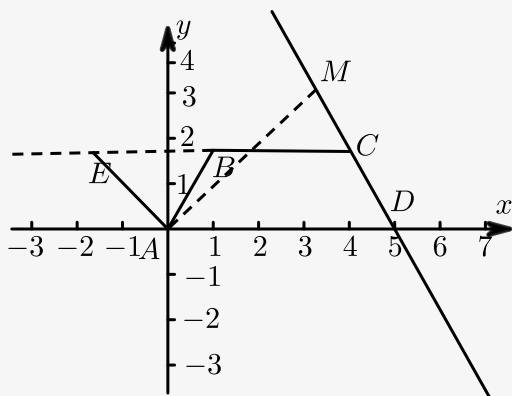
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ME} = x(-1-x) + (\sqrt{3}x - 4\sqrt{3})(-\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}) = -4x^2 + 26x - 60 = -4x^2 + 26x - 60$$

,

$$= -4\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{71}{4},$$

$$\text{当 } x = \frac{13}{4} \text{ 时 } (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{ME})_{\max} = -\frac{71}{4}.$$

故选A.



【标注】【知识点】平面向量数量积运算（非坐标）；数量积的坐标表达式

10. 设  $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$ , 则  $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】1

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } z &= \frac{1-i}{1+i} + 2i \\ &= \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} + 2i \\ &= \frac{1+i^2-2i}{1+i^2-2i} + 2i \\ &= \frac{1-i^2}{-2i} + 2i \\ &= \frac{-2i}{2} + 2i \\ &= -i + 2i \\ &= i, \\ |z| &= 1. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】复数的模

11. 有10件产品，其中3件是次品，从中任取两件，若  $X$  表示取得次品的个数，则  $P(X < 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ；随机变量  $X$  的数学期望  $EX = \underline{\hspace{2cm}}$ .



**【答案】**  $\frac{14}{15}; \frac{3}{5}$

**【解析】** 由题意知  $X$  取值为  $0, 1, 2$ ,

$$\text{即 } P(X=0) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, P(X=1) = \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15},$$

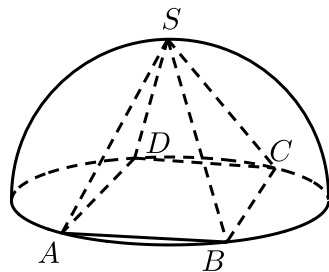
$$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15},$$

$$\text{于是 } P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15},$$

$$EX = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

**【标注】** 【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布

12. 如图，半球内有一内接正四棱锥  $S-ABCD$ ，该四棱锥的体积为  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，则该半球的体积为 \_\_\_\_\_.



**【答案】**  $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

**【解析】** 因为四棱锥的体积为  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，设球半径为  $R$ ，

$$\text{则 } \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} \times R \times \frac{1}{2} \times 2R \times 2R,$$

$$\therefore R = \sqrt{2},$$

$$\text{因此半球的体积为 } V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi.$$

**【标注】** 【知识点】空间几何体的体积；空间几何体的内切球、外接球问题

13. 过点  $M(2,2)$  的直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$  相交于  $A, B$  两点，则  $|AB|$  的最小值为 \_\_\_\_\_；此时直线  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $4; y = -\frac{1}{2}x + 3$

**【解析】**

圆化为 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ ，圆心为 $C(1,0)$ ， $r=3$ ，当 $|AB|$ 最小时，此时弦 $AB$ 的中点为 $M(2,2)$

，  
圆心到点 $M$ 的距离 $d = \sqrt{(2-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，则最短的弦长 $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 4$ ，此时直线 $l$ 与直线 $CM$ 垂直，

$$\therefore k_{CM} = 2,$$

$$\therefore k_{AB} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore l \text{ 的方程为 } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2), \text{ 即 } y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

**【标注】** 【知识点】圆的弦长的相关问题

14. 已知 $a, b$ 均为正数，且 $a + b = 1$ ，则 $\frac{a^2 + 1}{2ab} - 1$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $\sqrt{2}$

**【解析】** 因为 $a + b = 1$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \frac{a^2 + 1}{2ab} - 1 \\ &= \frac{a^2 + (a+b)^2}{2ab} - 1 \\ &= \frac{a}{b} + \frac{b}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{2a}} \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{a}{b} = \frac{b}{2a}$ 即 $a = \sqrt{2} - 1$ 、 $b = 2 - \sqrt{2}$ 时取等号，

故答案为： $\sqrt{2}$  .

**【标注】** 【知识点】基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{a}{x} + 1, & x < 0 \\ 2\ln x - 6x, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 $x$ 的方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 恰有四个不同的解，则实数 $a$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $(-2, 0)$

**【解析】** 设 $g(x) = f(x) + f(-x)$ ，则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 是偶函数，

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } g(x) = 2\ln x - 6x + 3x^2 - \frac{a}{x} + 1,$$

$$\text{由 } g(x) = 0 \text{ 得 } a = 2x \ln x - 6x^2 + 3x^3 + x,$$

$$\text{记 } h(x) = 2x \ln x - 6x^2 + 3x^3 + x,$$

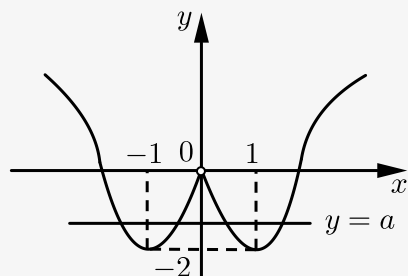
$$h'(x) = 2\ln x - 12x + 9x^2 + 3, h'(x) = \frac{2}{x} + 18x - 12 \geq 0,$$

故函数 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 增, 而 $h'(1) = 0$ ,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 减, 在 $(1, +\infty)$ 增,  $h(1) = -2$ ,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ , 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,  $h(x) \rightarrow 0^-$ ,

因此 $g(x)$ 图象为



因此实数 $a$ 的取值范围是 $(-2, 0)$ .

**【标注】** 【知识点】求参数范围 (含参指对型导函数)

## 五、标题

1. 已知集合 $U = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $A = \{1, 5\}$ ,  $B = \{-1, 5, 7\}$ , 则 $\complement_U(A \cup B) = (\quad)$ .

- A.  $\{3, 9\}$                       B.  $\{1, 5, 7\}$                       C.  $\{-1, 1, 3, 9\}$                       D.  $\{-1, 1, 3, 7, 9\}$

**【答案】** A

**【解析】**  $\because A = \{1, 5\}$ ,  $B = \{-1, 5, 7\}$ ,

$$\therefore A \cup B = \{1, 5, -1, 7\},$$

$$\complement_U(A \cup B) = \{3, 9\}.$$

故选A.

**【标注】** 【知识点】补集; 交、并、补集混合运算

2. 设 $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $x^2 - 3x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 2$ ”的 $(\quad)$ .

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

**【答案】** A

【解析】 $x^2 - 3x < 0$ ,

$$x(x-3) < 0,$$

$$0 < x < 3,$$

$$(x-1) < 2,$$

$$-1 < x < 3,$$

$$\therefore 0 < x < 3 \Rightarrow -1 < x < 3,$$

但 $-1 < x < 3$ , 且 $0 < x < 3$ ,

$\therefore$ 充分而不必要条件,

故选A.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 已知圆 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$ 截直线 $x + y + 2 = 0$ 所得弦的长度为4, 则 $a = ( )$ .

A. -2

B. -4

C. -6

D. -8

【答案】B

【解析】将圆方程标准化得 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2-a$ , 圆的圆心为 $(-1, 1)$ ,

半径为 $\sqrt{2-a}$ , 圆心到直线距离为 $d = \frac{|1-1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$ ,

则根据弦长列出方程 $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = (\sqrt{2-a})^2 - (\sqrt{2})^2$ , 解得 $a = -4$ .

故选B.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

4. 某中学共有高中学生2000名, 各年级男、女生人数如下表. 已知在全体高中学生中随机抽取1名学生, 抽到高二年级女生的概率是0.19. 现用分层抽样的方法在全体高中学生抽取64名学生, 则应在高三年级抽取的女学生人数为:

|    | 一年级 | 二年级 | 三年级 |
|----|-----|-----|-----|
| 女生 | 373 | $x$ | $y$ |
| 男生 | 377 | 370 | 250 |

A. 24

B. 16

C. 12

D. 8

【答案】D

【解析】由高二女生概率为0.19得:

$$\frac{x}{2000} = 0.19 ,$$

$$x = 0.19 \times 2000 = 380 .$$

$$\therefore \text{高三女生人数} : y = 2000 - 373 - 377 - 380 - 370 - 250 = 250 .$$

$$\therefore \text{抽到女生人数} : 64 \times \frac{250}{2000} = 8 \text{人} .$$

故选D .

**【标注】** 【知识点】 分层随机抽样

5. 设 $l, m$ 是不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$ 是不同的平面, 则下列结论正确的是 ( ) .

A. 若 $l // \alpha, m // \alpha$ , 则 $l // m$ 或 $l$ 与 $m$ 相交 .

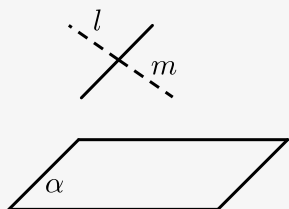
B. 若 $l // \alpha, \alpha \perp \beta$ , 则 $l \perp \beta$ 或 $l \subset \beta$

C. 若 $l \perp \gamma, \alpha \perp \gamma$ , 则 $l // \alpha$ 或 $l \subset \alpha$

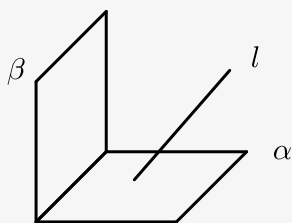
D. 若 $l \perp m, m \perp \alpha$ , 则 $l \perp \alpha$ 或 $l // \alpha$

**【答案】** C

**【解析】** A 选项:  $l$ 与 $m$ 可以异面 .

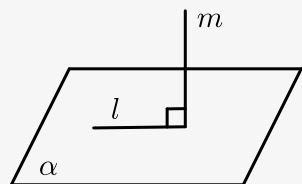


B 选项:  $l$ 可与 $\beta$ 成任意角 .



C 选项: 正确 .

D 选项:  $l$ 可在 $\alpha$ 内 .



故选 C .

**【标注】** 【知识点】 点、直线、平面之间的位置关系；已知线面位置关系判定结论的问题

6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ -x^2-1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $a = f(0.7^{-0.5})$ ,  $b = f(\log_{0.5} 0.7)$ ,  $c = f(\log_{0.7} 5)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( ).
- A.  $b > c > a$                       B.  $a > c > b$                       C.  $c > a > b$                       D.  $a > b > c$

**【答案】** D

**【解析】** 已知  $a = f(0.7^{-0.5})$ ,  $b = f(\log_{0.5} 0.7)$ ,  $c = f(\log_{0.7} 5)$ ,

则有  $a = 0.7^{-0.5} > 0.7^0 = 1$ ,

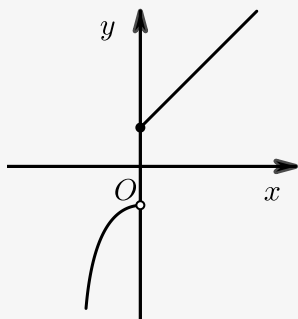
$1 = \log_{0.5} 1 > b = \log_{0.5} 0.7 > \log_{0.5} 1 = 0$ ,

$c = \log_{0.7} 5 < \log_{0.7} 1 = 0$ ,

所以可得  $a > 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $c < 1$ ,

已知  $\begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ -x^2-1, & x < 0 \end{cases}$

作出函数图象如下,



函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  上单调递增,

故选: D.

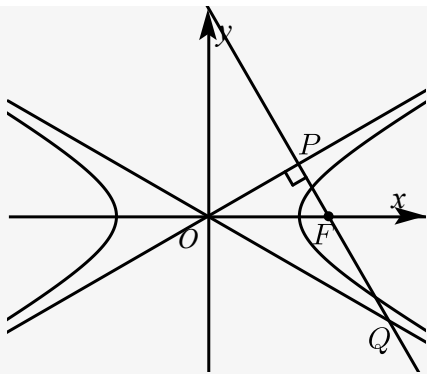
**【标注】** 【知识点】用单调性比较大小; 分段函数; 指对幂比较大小

**【素养】** 数学运算

7. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $O$  为坐标原点,  $F$  为  $C$  的右焦点, 过  $F$  的直线与  $C$  的两条渐近线的交点分别为  $P, Q$ , 若  $\triangle POQ$  为直角三角形, 则  $|PQ| = ( )$ .
- A. 2                      B. 3                      C. 6                      D. 9

**【答案】** D

**【解析】** 渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ,



$$\therefore \angle POF = \angle QOF = 30^\circ,$$

$$\therefore |OF| = c = \sqrt{27+9} = 6,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OFP \text{ 中, } |OP| = |OF| \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle OPQ \text{ 中, } |PQ| = |OP| \cdot \tan \angle POQ = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】 双曲线的焦点弦问题（小题）

8. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) + 2 \cos^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$  (其中  $\omega > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ) , 当  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$  时,  $|x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ , 将  $f(x)$  的图象上所有的点向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 所得图象对应的函数为  $g(x)$ , 则  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\quad)$  .
- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$                       B.  $\sqrt{3} + 1$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D. 2

【答案】 B

$$\text{【解析】 } f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) + 1 + \cos(\omega x + \varphi) = 2 \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$$f'(x) = 2\omega \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0, |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \pi \rightarrow \omega = 2.$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \rightarrow f(x) \text{ 关于 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 对称}.$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1, \text{ 向右平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 得到 } g(x) = 2 \sin 2x + 1,$$

$$\therefore g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 1.$$

故选 B.

【标注】 【知识点】 正余弦型、正切型函数图象变换

9.

已知实数  $a > 0$ ，函数  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \frac{a}{2}, & x < 0 \\ e^{x-1} + \frac{a}{2}x^2 - (a+1)x + \frac{a}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的方程

$f[-f(x)] = e^{-a} + \frac{a}{2}$  有三个不等的实根，则实数  $a$  的取值范围是 ( ) .

- A.  $\left(1, 2 + \frac{2}{e}\right)$       B.  $\left(2, 2 + \frac{2}{e}\right)$       C.  $\left(1, 1 + \frac{1}{e}\right)$       D.  $\left(2, 2 + \frac{1}{e}\right)$

**【答案】** B

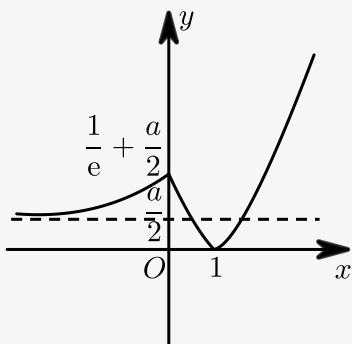
**【解析】** 当  $x < 0$  时， $f(x)$  为增函数，

当  $x \geq 0$  时， $f'(x) = e^{x-1} + ax - a - 1$ ， $f'(x)$  为增函数，

令  $f'(x) = 0$ ，解得  $x = 1$ ，

故函数在  $(0, 1)$  上递减，在  $(1, +\infty)$  上递增，最小值为  $f(1) = 0$ ，

由此画出函数图象如图所示，



令  $t = -f(x)$ ，

因为  $f(x) \geq 0$ ，

所以  $t \leq 0$ ，

$$\text{则有 } \begin{cases} f(t) = e^{-a} + \frac{a}{2} \\ f(t) = e^{t-1} + \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow -a = t - 1,$$

所以  $t = -a + 1 \leq 0$ ，

所以  $f(x) = a - 1$  要有三个不同实数根，

$$\text{则需 } \frac{a}{2} < a - 1 < \frac{1}{e} + \frac{a}{2},$$

$$\text{解得 } 2 < a < \frac{2}{e} + 2.$$

故选 B.

**【标注】** 【知识点】求参数范围（含参指对型导函数）

10. 设  $i$  是虚数单位， $a + i = (1 + 2i)bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ )，则  $b - a =$  \_\_\_\_\_ .

**【答案】** 3



【解析】  $a + i = (1 + 2i)bi$ ,

$$a + i = bi + 2bi^2,$$

$$\text{即 } a + i = -2b + bi,$$

$$\therefore \begin{cases} a = -2b \\ 1 = b \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore b - a = 1 + 2 = 3.$$

【标注】 【知识点】复数的四则运算综合；复数的乘法和除法；复数相等

11.  $\left(2x^3 - \frac{1}{2x}\right)^8$  的展开式中的常数项为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } T_{r+1} &= C_8^r (2x^3)^{8-r} \left(-\frac{1}{2x}\right)^r = C_8^r \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot 2^{8-r} \cdot x^{24-3r} \cdot x^{-r} \\ &= C_8^r \left(-\frac{1}{2}\right)^r \cdot 2^{8-r} \cdot x^{24-4r}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } 24 - 4r = 0 \text{ 时, } r = 6,$$

$$\therefore \text{常数项为 } T_7 = C_8^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 2^2 = \frac{7}{4}.$$

【标注】 【知识点】二项式定理的展开式

12. 已知棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的侧棱  $AA_1$  垂直于底面  $ABCD$ , 四边形  $ABCD$  为正方形,  $AA_1 = 2AB$ , 且棱柱的表面积为 20, 则以四边形  $A_1B_1C_1D_1$  的中心为顶点, 以四边形  $ABCD$  的内切圆面为底面的圆锥的体积为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

【解析】 设  $AB = a$ ,  $AA_1 = 2a$ ,

$$\text{设 } S = 2a^2 + 4 \times 2a \cdot a = 20,$$

$$\text{得 } a = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{底面 } ABCD \text{ 内切圆半径为 } r,$$

$$\text{则 } 2r = \sqrt{2}, r = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot AA_1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

【标注】 【知识点】 组合体求体积、表面积问题；空间几何体的体积；空间几何体的表面积

13. 设函数  $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ ，则  $f(x)$  在动点  $P(x_0, f(x_0))$  处的切线斜率的最小值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $2\sqrt{3}$

【解析】  $3x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{3}$

【标注】 【知识点】 导数的几何意义；导数的几何意义的实际应用；基本不等式的概念；利用基本不等式求最值

14. 已知一个袋子中装有1个黑球、2个白球、3个红球，假设每一个球被摸到的可能性是相等的，若从袋子中摸出3个球，则摸出白球比黑球多一个的概率为 \_\_\_\_\_；记摸到的白球的个数为  $X$ ，则随机变量  $X$  的数学期望是 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{7}{20}$  ; 1

【解析】 白1，黑0，

白2，黑1，

$$\frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} = \frac{7}{20} ,$$

$X = 0, 1, 2$  ,

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} ,$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20} ,$$

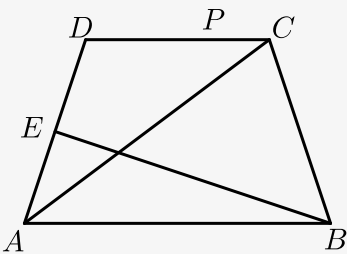
$$E(X) = 1 .$$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望；超几何分布

15. 在四边形  $ABCD$  中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 6$ ， $AD = 2$ ， $CD = 3$ ， $E$  为  $AD$  的中点， $\vec{BE} \cdot \vec{AC} = -19$ ，则  $\cos \angle BAD =$  \_\_\_\_\_，设点  $P$  为线段  $CD$  上的动点，则  $\vec{AP} \cdot \vec{BP}$  的最小值为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{1}{3}$  ;  $-\frac{49}{9}$

【解析】



$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -19,$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = -19,$$

$$\text{即 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4,$$

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \angle BAD = 4,$$

$$\cos \angle BAD = \frac{1}{3}.$$

$$\text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC} (0 \leq \lambda \leq 1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + \lambda \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\lambda \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\lambda \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left[\overrightarrow{AD} + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)\overrightarrow{AB}\right]$$

$$= \overrightarrow{AD}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 + \frac{1}{2}\lambda\right)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{1}{2}\lambda - 1\right)\overrightarrow{AB}^2$$

$$= 4 + (\lambda - 1) \times 6 \times 2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\right) \times 36$$

$$= 9\lambda^2 - 14\lambda = 9\left(\lambda - \frac{14}{18}\right)^2 - \frac{49}{9},$$

$$\therefore \lambda = \frac{14}{18} \text{ 时, } \min = -\frac{49}{9}.$$

【标注】 【知识点】 线性运算和数量积综合问题；平面向量数量积的运算律

## 六、标题

1. 已知集合  $A = \{-2, 0, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$ , 则  $A \cap B = ( )$ .

A.  $\emptyset$

B.  $\{2\}$

C.  $\{0\}$

D.  $\{-2\}$

【答案】 B

【解析】 $\because A = \{-2, 0, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$ ,

$\therefore A \cap B = \{2\}$ .

故选B.

【标注】【知识点】交集

2. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】因为 $a, b$ 都是实数, 由 $a > b$ , 不一定有 $a^2 > b^2$ ,

如 $-2 > -3$ , 但 $(-2)^2 < (-3)^2$ , 所以“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的不充分条件,

反之, 由 $a^2 > b^2$ 也不一定得 $a > b$ , 如 $(-3)^2 > (-2)^2$ , 但 $-3 < -2$ ,

所以“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的不必要条件.

故选D.

【标注】【知识点】充要条件与不等式结合

3. 曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线的斜率等于( ).

A.  $2e$

B.  $e$

C.  $2$

D.  $1$

【答案】C

【解析】因为 $y' = e^{x-1} + xe^{x-1}$ , 且点 $(1, 1)$ 在曲线 $y = xe^{x-1}$ 上, 所以曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$

处的切线的斜率 $k = e^{1-1} + e^{1-1} = 2$ , 故选C.

【标注】【知识点】导数的几何意义

4. 已知 $a = 2^{-\frac{1}{3}}$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ , 则( ).

A.  $a > b > c$

B.  $a > c > b$

C.  $c > a > b$

D.  $c > b > a$

【答案】C

【解析】 $\because 0 < a = 2^{-\frac{1}{3}} < 2^0 = 1$ ,

$b = \log_2 \frac{1}{3} < \log_2 1 = 0$ ,

$$c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > \log_2 2 = 1,$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选：C.

【标注】 【知识点】 指数函数的图象及性质

5. 设 $F$ 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点，过 $F$ 且倾斜角为 $30^\circ$ 的直线交 $C$ 于 $A, B$ 两点，则 $|AB| = ( )$ .

A.  $\frac{\sqrt{30}}{3}$

B. 6

C. 12

D.  $7\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 方法一：  $\because y^2 = 3x$ ,

$$\therefore \text{焦点为 } F\left(\frac{3}{4}, 0\right), \text{ 准线为 } x = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{直线方程为 } y = \tan 30^\circ \left(x - \frac{3}{4}\right),$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right), \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y^2 = 3x \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow 16x^2 - 168x + 9 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{168}{16} = \frac{21}{2},$$

$$\therefore |AB| = x_1 + x_2 + p$$

$$= \frac{21}{2} + \frac{3}{4} \times 2$$

$$= 12.$$

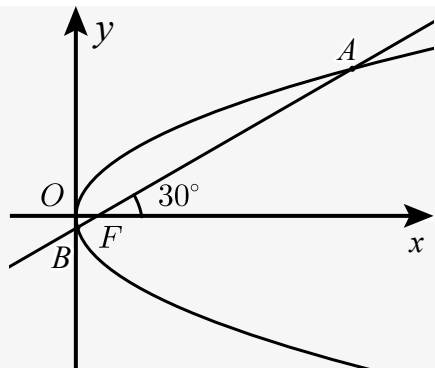
故选C.

方法二：

$$\text{因为 } |AF| = \frac{p}{1 - \cos 30^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = 3(2 + \sqrt{3}),$$

$$|BF| = \frac{p}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} = 3(2 - \sqrt{3}),$$

$$\text{所以 } |AB| = |AF| + |BF| = 3(2 + \sqrt{3}) + 3(2 - \sqrt{3}) = 12.$$



【标注】 【知识点】直线和抛物线的位置关系

6. 某市生产总值连续两年持续增加，第一年的增长率为 $p$ ，第二年的增长率为 $q$ ，则该市这两年生产总值的年平均增长率为（ ）.

A.  $\frac{p+q}{2}$       B.  $\frac{(p+1)(q+1)}{2}$       C.  $pq$       D.  $\sqrt{(p+1)(q+1)} - 1$

【答案】 D

【解析】 设该市这两年生产总值的年平均增长率为 $x$ ，

$$\text{则 } (1+p)(1+q) = (1+x)^2,$$

$$\text{解 } x = \sqrt{(1+p)(1+q)} - 1,$$

故选D.

【标注】 【知识点】指数函数模型

7. 有6名男医生、5名女医生，从中选出2名男医生、1名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有 \_\_\_\_\_ 种（用数字作答）.

【答案】 75

【解析】 根据题意，先从6名男医生中选2人，有 $C_6^2 = 15$ 种选法，

再从5名女医生中选出1人，有 $C_5^1 = 5$ 种选法，

则不同的选法共有 $15 \times 5 = 75$ 种.

【标注】 【素养】直观想象；数学运算

【知识点】分步乘法计数原理；简单的组合问题

8. 若 $\log_4(3a+4b) = \log_2\sqrt{ab}$ ，则 $a+b$ 的最小值是（ ）.

A.  $6+2\sqrt{3}$       B.  $7+2\sqrt{3}$       C.  $6+4\sqrt{3}$       D.  $7+4\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】 $\because \log_4(3a+4b) = \log_2 \sqrt{ab}$ ,

$$\therefore \log_2 \sqrt{3a+4b} = \log_2 \sqrt{ab},$$

$$\therefore \sqrt{3a+4b} = \sqrt{ab},$$

$$\therefore 3a+4b = ab, a, b > 0.$$

$$\therefore b = \frac{3a}{a-4} > 0, \text{解得 } a > 4.$$

$$a+b = a + \frac{3a}{a-4} = a-4 + \frac{12}{a-4} + 7 \geq 7 + 2\sqrt{(a-4) \cdot \frac{12}{a-4}} = 7 + 4\sqrt{3},$$

当且仅当  $a = 4 + 2\sqrt{3}$  时取等号.

$$\therefore a+b \text{ 的最小值是 } 7 + 4\sqrt{3}.$$

故选D.

【标注】 【知识点】 基本不等式成立的条件；基本不等式的实际应用；对数的概念及其运算

9. 已知函数  $f(x) = |x-2|+1$ ,  $g(x) = kx$ . 若方程  $f(x) = g(x)$  有两个不相等的实根, 则实数  $k$  的取值范围是 ( ).

A.  $(0, \frac{1}{2})$

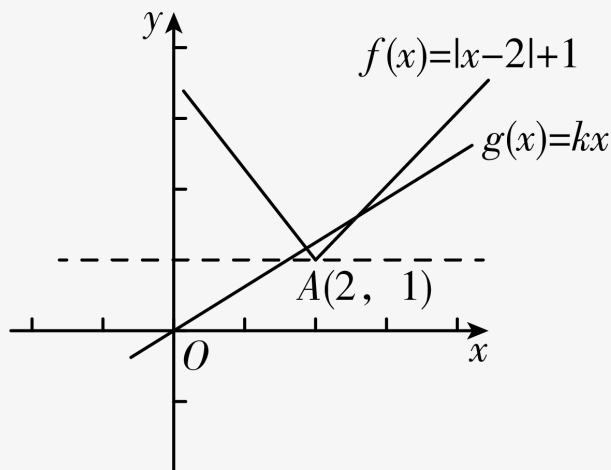
B.  $(\frac{1}{2}, 1)$

C.  $(1, 2)$

D.  $(2, +\infty)$

【答案】B

【解析】由题意可得函数  $f(x)$  的图象和函数  $g(x)$  的图象有两个交点,



如图所示:  $k_{OA} = \frac{1}{2}$ , 数形结合可得  $\frac{1}{2} < k < 1$ , 故选B.

【标注】 【知识点】 利用函数图象研究方程根的分布问题 (图象与零点综合)

10.

$i$ 是虚数单位，复数 $\frac{1+3i}{1-i} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】  $-1+2i$

【解析】  $\frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+2i$  .

故答案为： $-1+2i$  .

【标注】 【知识点】 复数的四则运算综合；复数的乘法和除法

11.  $(x-2)^6$ 的展开式中 $x^3$ 的系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$  . (用数字作答)

【答案】  $-160$

【解析】  $(x-2)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^r (-2)^{6-r}$ ，由题意令 $6-r=3$ ，解得 $r=3$  . 所以 $x^3$ 的系数为 $C_6^3 (-2)^{6-3} = C_6^3 (-2)^3 = -160$  .

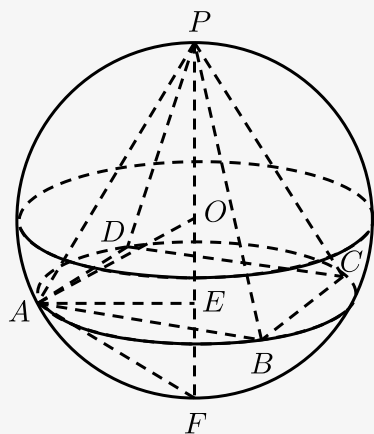
【标注】 【素养】 数学运算

【知识点】 求项的系数或二项式系数

12. 正四棱锥的顶点都在同一球面上 . 若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】  $\frac{81}{4}\pi$

【解析】 如图，



四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PE$ 为高， $PF$ 为球的直径，由射影定理知 $PA^2 = PF \cdot PE$ ， $AE = \sqrt{2}$

$PF = 2R$ ， $|AP| = 3\sqrt{2}$ ，则 $R = \frac{9}{4}$ ，

$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{81}{16} = \frac{81}{4}\pi$  .



【标注】 【知识点】 圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征

13. 已知直线  $ax + y - 2 = 0$  与圆心为  $C$  的圆  $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点, 且  $\triangle ABC$  为等边三角形, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】  $4 \pm \sqrt{15}$

【解析】 由题意得圆心  $C(1, a)$ , 半径为 2,

圆心  $C$  到直线  $ax + y - 2 = 0$  的距离等于  $\sqrt{3}$ .

于是有  $\frac{|1 \times a + a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{3}$ ,

即  $a^2 - 8a + 1 = 0$ , 解得  $a = 4 \pm \sqrt{15}$ .

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

14. 若将函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位, 所得图象关于  $y$  轴对称, 则  $\varphi$  的最小正值是 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{3\pi}{8}$

【解析】 方法一: 将函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位得到函数

$y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} - 2\varphi\right)$  的图象,

由函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} - 2\varphi\right)$  的图象关于  $y$  轴对称可知  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\varphi\right) = \pm 1$ ,

即  $\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$ , 故  $2\varphi - \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ,

即  $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ . 又  $\varphi > 0$ ,

所以  $\varphi_{\min} = \frac{3\pi}{8}$ .

方法二: 由函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位所得图象关于  $y$

轴对称可知  $2\varphi + \frac{\pi}{4} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ,

故  $\varphi = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} (k \in \mathbf{Z})$ .

又  $\varphi > 0$ ,

故  $\varphi_{\min} = \frac{3\pi}{8}$ .

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数性质求解析式

15.

已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 $120^\circ$ ，且 $|\overrightarrow{AB}| = 3$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 2$ ，若 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ，且 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ ，则实数 $\lambda$ 的值为\_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{7}{12}$

**【解析】** 方法一：把 $\overrightarrow{BC}$ 转化为 $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ，再通过 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 求解.

$$\because \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore (\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\text{即 } (\lambda - 1)\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 0$$

$$\therefore (\lambda - 1)|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos 120^\circ - 9\lambda + 4 = 0$$

$$\therefore (\lambda - 1) \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 9\lambda + 4 = 0.$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{7}{12}.$$

$$\text{方法二：由题意可知：}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}, \text{ 所以 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \text{ 所以 } \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = (\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \lambda\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \lambda \times 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \lambda \times 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -12\lambda + 7 = 0.$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{7}{12}.$$

$$\text{方法三：}\because \overrightarrow{AB} \text{ 与 } \overrightarrow{AC} \text{ 的夹角为 } 120^\circ, |\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{AC}| = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 120^\circ = 3 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3,$$

$$\because \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = (\lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0,$$

$$\therefore (\lambda - 1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \lambda|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 0,$$

$$\therefore -3(\lambda - 1) - 9\lambda + 4 = 0,$$

$$\text{解得：}\lambda = \frac{7}{12}.$$

【标注】 【知识点】 坐标表示平面向量的垂直；平面向量数量积运算（非坐标）；向量的数量积的定义；线性运算和数量积综合问题；向量的模

## 七、标题

1. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ , 则集合  $\complement_U(A \cup B) = ($   
 ) .  
A.  $\{5\}$                       B.  $\{1, 5\}$                       C.  $\{2, 4\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

【答案】 A

【解析】 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ ,

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ;

又集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ ,

$\therefore$  集合  $\complement_U(A \cup B) = \{5\}$ .

故选A.

【标注】 【知识点】 补集；交、并、补集混合运算；并集

2. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 则 “ $a > 2$ ” 是 “ $a^2 > 4$ ” 的(    )  
A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A

【解析】 解： $\because a^2 > 4$ ,

$\therefore a > 2$  或  $a < -2$ ,

根据充分必要条件的定义判断：“ $a > 2$ ” 是 “ $a^2 > 4$ ” 的充分不必要条件.

故选：A.

【标注】 【知识点】 一元二次不等式

【知识点】 充要条件与不等式结合

【素养】 逻辑推理

【素养】 数学运算

3. 已知直线  $l: x + ay = 2$  与圆  $C: x^2 + y^2 = 4$  相交于  $M, N$  两点, 若  $|MN| = 2\sqrt{3}$ , 则直线  $l$  的斜率为 ( ).
- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $-\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 圆  $x^2 + y^2 = 4$  的圆心坐标为  $(0, 0)$ , 半径为  $2$ ,  
 圆心到直线  $l: x + ay = 2$  的距离  $d = \frac{|-2|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ ,  
 由题意,  $2\sqrt{3} = 2\sqrt{4 - \frac{4}{1+a^2}}$ , 得  $a = \pm\sqrt{3}$ ,  
 $\therefore$  直线  $l$  的斜率为  $k = -\frac{1}{a} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
 故选 B.

【标注】 【知识点】 圆的弦长的相关问题

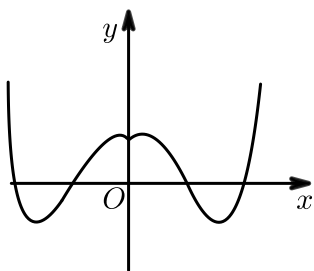
4. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的焦距为  $4$ ,  $A(2, 3)$  为  $C$  上一点, 则  $C$  的渐近线方程为 ( ).
- A.  $y = \pm \frac{1}{2}x$                       B.  $y = \pm x$                       C.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$                       D.  $y = \pm \sqrt{3}x$

【答案】 D

【解析】 由题  $2c = 4$ , 即  $c = 2$ ,  
 又  $A(2, 3)$  为  $C$  上一点, 则  $\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$ ,  
 解得  $a^2 = 1, b^2 = 3$ ,  
 故  $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ,  
 故渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ .  
 故选 D.

【标注】 【知识点】 求双曲线的渐近线

5. 已知某函数的大致图象如图所示, 则该图象所对应的函数可能是 ( ).



A.  $y = \frac{x}{2^{|x|}}$

B.  $y = 2^{|x|} - 2$

C.  $y = e^{|x|} - |x|$

D.  $y = 2^{|x|} - x^2$

【答案】D

【解析】A 选项：函数  $y = \frac{x}{2^{|x|}}$ ，当  $x > 0$  时， $y > 0$ ；当  $x < 0$  时， $y < 0$ ，所以不满足题意。

B 选项：函数  $y = 2^{|x|} - 2$ ，当  $x \geq 0$  时， $f(x)$  单调递增，不满足题意。

C 选项：函数  $y = e^{|x|} - |x|$ ，当  $x \geq 0$  时， $f(x) > 0$ ，不满足题意。

D 选项：函数  $y = 2^{|x|} - x^2$  为偶函数，且易知当  $x > 0$  时，函数有两个零点，满足题意。

故选 D。

【标注】【知识点】函数图象的识别问题；图象法

6. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数，且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调递增，设  $a = f\left(\frac{3}{2}\right)$ ， $b = f(\log_3 7)$ ， $c = f(-0.8^3)$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )。

A.  $b < a < c$

B.  $c < b < a$

C.  $c < a < b$

D.  $a < c < b$

【答案】C

【解析】 $\because f(x)$  是偶函数，

$$\therefore c = f(-0.8^3) = f(0.8^3),$$

$$\text{又 } 0 < 0.8^3 < 1, \log_3 7 > \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} > 1,$$

$$\therefore 0.8^3 < \frac{3}{2} < \log_3 7,$$

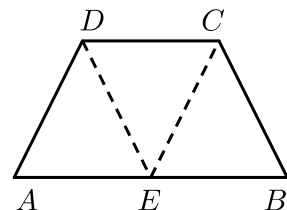
而  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上递增，

$$\therefore c < a < b.$$

故选：C。

【标注】【知识点】指数函数的图象及性质；指对幂比较大小；对数函数的图象及性质；用单调性比较大小

7. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AB = 2DC = 2AD = 2$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $E$ 为 $AB$ 的中点，将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 $ED$ 、 $EC$ 向上折起，使 $A$ 、 $B$ 重合为点 $F$ ，则三棱锥 $F - DCE$ 的外接球的体积是（ ）。



A.  $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$

B.  $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi$

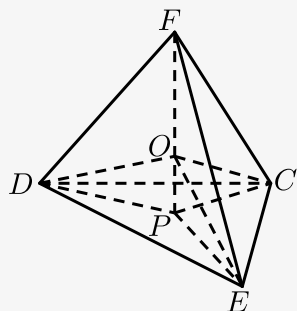
C.  $\frac{3}{2}\pi$

D.  $\frac{2}{3}\pi$

【答案】A

【解析】作 $PF \perp$ 平面 $DCE$ 于点 $P$ ，连接 $PD$ ， $PE$ ， $PC$ ，

在 $PF$ 上取一点 $O$ ，使得 $FO = OD$ ，连接 $OD$ ， $OE$ ， $OC$ ，如图所示：



因为 $FD = AD$ ， $FE = BE$ ， $FC = BC$ ，

且 $AD = AE = BE = BC$ ，

所以 $FD = FE = FC$ ，

又因为 $PF \perp$ 平面 $DCE$ ，

所以 $\angle FPD = \angle FPE = \angle FPC = 90^\circ$ ，

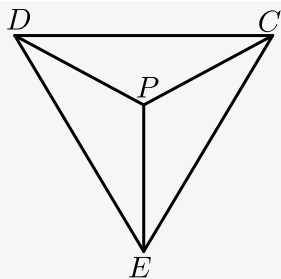
且 $PF$ 是公共边，

所以 $\triangle PFD \cong \triangle PFE \cong \triangle PFC$ ，

所以 $PD = PE = PC$ ，

即点 $P$ 为等边 $\triangle DCE$ 的中心，

由 $DE = 1$ 可求得 $DP = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ，



$$DF = 1,$$

$$\text{所以 } PF = \sqrt{DF^2 - DP^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} > DP,$$

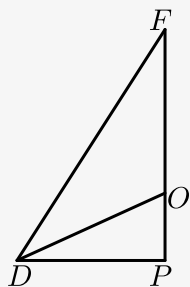
所以, 可以在线段  $PF$  上找一点  $O$ ,

使得  $FO = DO$ ,  $PD = PE = PC$ ,  $OP$  为公共边,

易得  $\triangle ODP \cong \triangle OEP \cong \triangle OCP$ ,

所以  $OF = OD = OE = OC$ ,

所以  $O$  即为外接球的球心, 球的半径为  $OD$ ,



$$\text{设 } FO = OD = x,$$

$$\text{所以 } OP = \sqrt{\frac{2}{3}} - x,$$

$$\text{又由 } DP = \sqrt{\frac{1}{3}}, OD^2 = OP^2 + DP^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{即半径 } R = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{球的体积公式 } V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\text{求得体积为 } \frac{\sqrt{6}}{8}\pi.$$

故选 A.

**【标注】** 【知识点】空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；空间几何体的内切球、外接球问题；圆柱、圆锥、圆台和球的结构特征；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

8. 将函数  $f(x) = \cos \frac{\omega x}{2} \left( 2 \sin \frac{\omega x}{2} - 2\sqrt{3} \cos \frac{\omega x}{2} \right) + \sqrt{3}$  ( $\omega > 0$ ) 的图象向左平移  $\frac{\pi}{3\omega}$  个单位长度, 得到函数  $y = g(x)$  的图象, 若  $y = g(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上为增函数, 则  $\omega$  的最大值为 ( ).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**【答案】** B

**【解析】** 由题意,  $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ ,  
 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3\omega}\right) = 2\sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{3\omega}\right) - \frac{\pi}{3}\right]$ ,  
 即  $g(x) = 2\sin \omega x$ ,

其图象可视为  $y = \sin x$  仅仅通过放缩而得到的图象.

若  $\omega$  最大, 则要求周期  $T$  取最小, 由  $y = g(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上为增函数可得:

$x = \frac{\pi}{4}$  应恰好为  $g(x)$  的第一个正的最大值点,  
 $\therefore \frac{\pi}{4}\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2$ .

**【标注】** 【知识点】正弦型函数  $\omega$  求最值问题

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的方程  $f(x) = ax - a$  恰有 1 个实根, 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

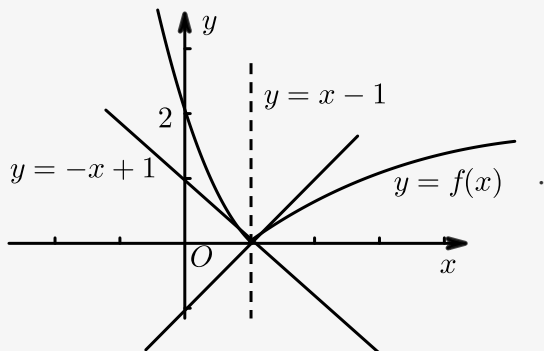
A.  $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$     B.  $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$     C.  $[-1, 1]$     D.  $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

**【答案】** A

**【解析】** 由  $y = x^2 - 3x + 2$  得  $y' = 2x - 3$ ,  $y'|_{x=1} = 2 - 3 = -1$ ,

由  $y = \ln x$  得  $y' = \frac{1}{x}$ ,  $y'|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$ ,

作出函数  $f(x)$  的图象和直线  $y = x - 1$ , 直线  $y = -x + 1$ , 又直线  $y = a(x - 1)$  恒过  $(1, 0)$  点, 知  $a \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$  时, 关于  $x$  的方程  $f(x) = ax - a$  恰有 1 个实根,



故选 A.

**【标注】** 【素养】数学运算；数学抽象

**【知识点】** 求函数零点（含参一次型导函数）；零点、交点、根的等价转化；已知零点情况求参数的取值范围



【思想】数形结合思想

10. 设复数  $z = \frac{1-i}{1+i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】1

【解析】由已知  $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i$ ,

$\therefore |z| = |-i| = 1$ .

故答案为: 1.

【标注】【知识点】复数的模

11. 在  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数为 \_\_\_\_\_ .

【答案】80

【解析】 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$  的展开式中, 通项公式

$$T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r 2^{5-r} C_5^r x^{5-\frac{3}{2}r},$$

令  $5 - \frac{3}{2}r = 2$ , 解得  $r = 2$ ,

$\therefore x^2$  的系数  $= 2^3 C_5^2 = 80$ .

故答案为: 80.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项; 求项的系数或二项式系数

12. 从某班的4名男生, 2名女生中任选3人参加学校组织的社会实践活动. 设所选3人中女生人数为  $X$ ,  $P(X=2) =$  \_\_\_\_\_, 数学期望  $E(X) =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 $\frac{1}{5}$ ; 1

【解析】所选3人中女生人数为  $X$ ,  $X=2$ , 就是所选3人中女生人数为2,

$$\text{则 } P(X=2) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5};$$

随机变量  $X$  的所有可能的取值为 0, 1, 2,  $P(X=0) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$ ,

$$P(X=1) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}; P(X=2) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

所有随机变量 $\xi$ 的分布列为：

|     |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| $X$ | 0             | 1             | 2             |
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

所以 $\xi$ 的期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1$ .

故答案为： $\frac{1}{5}, 1$ .

【标注】 【知识点】 超几何分布

13. 已知 $a, b$ 为正实数, 且 $a + b = 2$ , 则 $\frac{a^2 + 2}{a} + \frac{b^2}{b + 1}$ 的最小值为 \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{6 + 2\sqrt{2}}{3}$

【解析】 方法一： $\frac{a^2 + 2}{a} + \frac{b^2}{b + 1} = a + \frac{2}{a} + \frac{b^2}{b + 1}$

$$= 1 + \frac{2}{a} + \frac{(a - 1)(b + 1) + b^2}{b + 1}$$

$$= 1 + \frac{2}{a} + \frac{(1 - b)(b + 1) + b^2}{b + 1}$$

$$= 1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{b + 1},$$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b + 1} = \left( \frac{2}{a} + \frac{1}{b + 1} \right) (a + b + 1) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left( 3 + \frac{2(b + 1)}{a} + \frac{a}{b + 1} \right) \geq \frac{1}{3} (3 + 2\sqrt{2}),$$

当且仅当 $\frac{2(b + 1)}{a} = \frac{a}{b + 1}$ , 即 $a = 6 - 3\sqrt{2}$ ,  $b = 3\sqrt{2} - 4$ 时等号成立,

$$\text{故 } 1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{b + 1} \geq \frac{6 + 2\sqrt{2}}{3}.$$

方法二： $\because a + b = 2, \therefore b = 2 - a > 0$ ,

故 $0 < a < 2$ .

$$\text{从而 } \frac{a^2 + 2}{a} + \frac{b^2}{b + 1} = \frac{a^2 + 2}{a} + \frac{(2 - a)^2}{3 - a}$$

$$= \left( a + \frac{2}{a} \right) + \left( 3 - a + \frac{1}{3 - a} - 2 \right)$$

$$= 1 + \left( \frac{2}{a} + \frac{1}{3 - a} \right)$$

$$= 1 + \frac{6 - a}{a(3 - a)},$$

令 $t = 6 - a \in (4, 6)$ ,

$$\text{则 } \frac{a^2 + 2}{a} + \frac{b^2}{b + 1}$$

$$= 1 + \frac{t}{-t^2 + 9t - 18}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{9 - \left(t + \frac{18}{t}\right)} \\
&\because t \in (4, 6) \text{ 时, } t + \frac{18}{t} \geq 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}, \\
&\text{当且仅当 } t = \frac{18}{t}, \\
&\text{即 } t = 3\sqrt{2} \text{ 时等号成立,} \\
&\therefore \left(\frac{a^2 + 2}{a} + \frac{b^2}{b + 1}\right)_{\min} = 1 + \frac{1}{9 - 6\sqrt{2}} \\
&= 1 + \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{6 + 2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

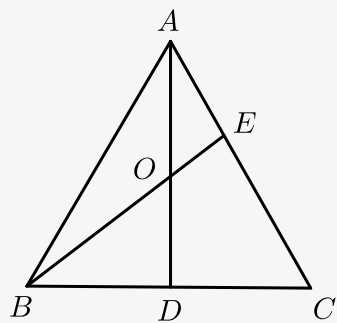
【标注】【素养】逻辑推理

【知识点】基本不等式的实际应用

14. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形,  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ , 且 $AD$ 与 $BE$ 相交于点 $O$ , 则  
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $-\frac{3}{4}$

【解析】如图所示：



因为 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ ,

所以 $D$ 是 $BC$ 的中点,

所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ,

因为 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ ,

所以 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ,

设 $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AD}$ ,

则 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}k\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}$ ,

因为 $B, O, E$ 共线, 所以存在实数 $\lambda$ ,

$$\text{使得 } \overrightarrow{AO} = \lambda \overrightarrow{AB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(1 - \lambda) \overrightarrow{AC},$$

因为  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  不共线,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{1}{2}k = \lambda \\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{3}(1 - \lambda) \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO}$$

$$= \left( \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left( -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= -\frac{3}{16} |\overrightarrow{AB}|^2 - \frac{1}{8} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{16} |\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= \frac{3}{16} \times 2^2 - \frac{1}{8} \times 2 \times 2 \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{16} \times 2^2$$

$$= -\frac{3}{4}.$$

**【标注】** 【知识点】平面向量基本定理及其意义；向量分解中的待定系数法；向量的数量积的定义；线性运算和数量积综合问题

15. 某同学在研究函数  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 时, 给出下面几个结论:

①等式  $f(-x) + f(x) = 0$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立;

②函数的值域为  $(-1, 1)$ ;

③若  $x_1 \neq x_2$ , 则一定  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;

④函数  $g(x) = f(x) - x$  在  $\mathbf{R}$  上有三个零点.

其中正确的结论的序号是 \_\_\_\_\_ (写出所有正确结论的序号).

**【答案】** ①②③

**【解析】** ①项,  $f(-x) + f(x) = \frac{-x}{1 + |x|} + \frac{x}{1 + |x|} = 0$ , 故①正确.

②项, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \frac{x}{1 + x} = 1 - \frac{1}{1 + x}$ , 则  $0 \leq f(x) < 1$ ,

当  $x < 0$  时,  $f(x) = \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - 1$ , 则  $-1 < f(x) < 0$ .

$\therefore f(x)$  值域为  $(-1, 1)$ , 故②正确.

③项, 当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0$ .

当  $x \leq 0$  时,  $f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} > 0$ , 故  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上严格单调递增.

$\therefore$  若  $x_1 \neq x_2$ , 则一定有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 故③正确.

④项, 函数  $g(x) = f(x) - x$  在  $\mathbf{R}$  上有三个零点, 即  $f(x) - x = 0$  有几个根,  
即  $\frac{x}{1+|x|} = x$  有几个根,

显然, 当  $x = 0$  时, 等号成立, 故  $0$  是  $g(x)$  的一个零点;

当  $x \neq 0$  时, 即  $\frac{1}{1+|x|} = 1$ , 解得  $x = 0$ , 不合题.

$\therefore$  函数  $g(x) = f(x) - x$  在  $\mathbf{R}$  上只有一个零点, 故④错误.

**【标注】** 【知识点】零点、交点、根的等价转化

## 八、标题

1. 设全集  $I = \{x | -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{-2, 0, 2\}$ , 则  $A \cup (\complement_I B) = ( )$ .

A.  $\{-1, 1, 2\}$

B.  $\{1\}$

C.  $\{2\}$

D.  $\{0, 1, 2\}$

**【答案】** A

**【解析】**  $\because I = \{x | -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$ ,

$\therefore I = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,

$\therefore \complement_I B = \{-1, 1\}$ ,

即  $A \cup \complement_I B = \{-1, 1, 2\}$ .

故选A.

**【标注】** 【知识点】补集; 并集; 交、并、补集混合运算

2. " $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ " 是 " $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ " 的 ( ).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**【答案】** C

**【解析】** 由三角函数性质得:  $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

$\therefore \alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ,

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ,

$\therefore$  " $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ " 是 " $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ " 的充分必要条件.

故选C.

【标注】 【知识点】 充要条件与三角函数结合

3. 已知 $[x]$ 表示不超过实数 $x$ 的最大整数,  $g(x) = [x]$ 为取整函数,  $x_0$ 是函数 $f(x) = \ln x + x - 4$ 的零点, 则 $g(x_0) = ( )$ .
- A. 5                      B. 4                      C. 3                      D. 2

【答案】 D

【解析】  $\because f(x) = \ln x + x - 4$ ,  
 $\therefore f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ ,  
又 $\because x \in (0, +\infty)$ ,  
 $\therefore f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,  
 $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,  
又 $: f(2) = \ln 2 + 2 - 4 = \ln 2 - 2 < 0$ ,  
 $f(3) = \ln 3 + 3 - 4 = \ln 3 - 1 > 0$ ,  
 $\therefore x_0 \in (2, 3)$ ,  
即 $g(x_0) = [x_0] = 2$ .  
故选: D.

【标注】 【知识点】 函数零点存在定理; 判定函数零点所在区间(存在性定理); 导数与单调性

4. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与抛物线 $C_2: y^2 = 2px(p > 0)$ 的准线分别交于 $A, B$ 两点. 若双曲线 $C$ 的离心率为2,  $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ,  $O$ 为坐标原点, 则抛物线 $C_2$ 的焦点坐标为( ).
- A.  $(\sqrt{2}, 0)$                       B.  $(1, 0)$                       C.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$                       D.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

【答案】 B

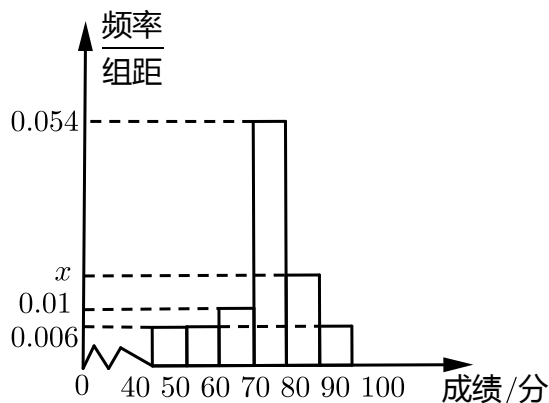
【解析】 双曲线 $C_1$ 的两条渐近线分别为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ,  
设点 $A$ 在 $x$ 轴上方, 则 $A\left(-\frac{p}{2}, \frac{b}{2a}p\right), B\left(-\frac{p}{2}, -\frac{b}{2a}p\right)$ ,  
 $\therefore |AB| = \frac{b}{a}p$ ,  
 $\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{p}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot p \cdot \frac{p}{2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot p^2 = \sqrt{3}, \\
&\therefore \frac{c}{a} = 2, c^2 = a^2 + b^2, \\
&\therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \\
&\therefore p = 2, \\
&\therefore C_2 \text{ 的焦点坐标为 } (1, 0).
\end{aligned}$$

故选B.

**【标注】** 【知识点】抛物线与双曲线结合

5. 某班50名学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是：[40, 50)，[50, 60)，[60, 70)，[70, 80)，[80, 90)，[90, 100]。从样本成绩不低于80分的学生中随机选取2人，记这2人成绩在90分以上（含90分）的人数为 $\xi$ ，则 $\xi$ 的数学期望为（ ）。



A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{2}{3}$

D.  $\frac{3}{4}$

**【答案】** B

**【解析】** 由图知  $x = 0.018$ ,

则[80, 90)频率为0.18，人数为9人，

[90, 100)频率为0.06，人数为3人，

共  $(0.18 + 0.06) \times 50 = 12$  人，

则抽取2人分数在90分以上人数的分布列为：

$\xi = 0, 1, 2$ ,

$$P(\xi = 0) = \frac{C_9^2}{C_{12}^2} = \frac{36}{66} = \frac{6}{11},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_9^1 C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22},$$

|       |                |                |                |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| $\xi$ | 0              | 1              | 2              |
| $P$   | $\frac{6}{11}$ | $\frac{9}{22}$ | $\frac{1}{22}$ |

$$E(X) = 0 \times \frac{6}{11} + 1 \times \frac{9}{22} + 2 \times \frac{1}{22} = \frac{9}{22} + \frac{2}{22} = \frac{1}{2}.$$

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望；超几何分布

6. 已知函数  $f(x) = \sin 2x - 2\sin^2 x + 1$ ，给出下列四个结论，其中正确的结论是（ ）。

- A. 函数  $f(x)$  的最小正周期是  $2\pi$
- B. 函数  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$  上是减函数
- C. 函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{16}$  对称
- D. 函数  $f(x)$  的图象可由函数  $y = \sqrt{2}\sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位得到

【答案】 B

【解析】  $f(x) = \sin 2x - 2\sin^2 x + 1$

$$= \cos 2x + \sin 2x$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

A、 $\frac{2\pi}{2} = \pi = T$  最小正周期是  $\pi$ ，故A错误；

B、 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) \Rightarrow \frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), k = 0$   
时， $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}$ ，故B正确；

C、 $x = \frac{\pi}{16}$ ， $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8}\right) \neq \pm\sqrt{2}$ ，非对称轴，故C错误；

D、向左平移  $\frac{\pi}{8}$  时成立， $\sqrt{2} \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，故D错误。

故选B。

【标注】 【知识点】 辅助角公式；倍角、和差角公式综合；正弦型函数的图象与性质；正弦函数的图象和性质；正余弦型、正切型函数图象变换

7. 函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，对任意两个正数  $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$ ，都有  $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$ ，记  $a = 25f(0.2^2)$ ， $b = f(1)$ ， $c = -\log_5 3f\left(\log_{\frac{1}{3}} 5\right)$ ，则  $a, b, c$  大小关系为（ ）。

- A.  $c > b > a$
- B.  $b > c > a$
- C.  $a > b > c$
- D.  $a > c > b$

【答案】 C



【解析】构造函数  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  ,

则函数  $g(x)$  单减 ,

$$a = 25f(0.2^2)$$

$$= \frac{f(0.2^2)}{0.2^2}$$

$$= g(0.2^2) ,$$

$$b = f(1) = \frac{f(1)}{1} = g(1) ,$$

$\therefore f(x)$  为奇函数 ,

$$\therefore f\left(\log_{\frac{1}{3}}5\right) = -f\left(-\log_{\frac{1}{3}}5\right) = -f(\log_3 5) ,$$

$$c = -\log_5 3 \cdot f\left(\log_{\frac{1}{3}}5\right) = \frac{f(\log_3 5)}{\log_3 5} = g(\log_3 5) ,$$

$$\therefore 0.2^2 < 1 < \log_3 5$$

$$\therefore a > b > c .$$

故选C .

【标注】 【知识点】用单调性比较大小

8. 国际高峰论坛, 组委会要从6个国内媒体团和3个国外媒体团中选出3个媒体团进行提问, 要求这三个媒体团中既有国内媒体团又有国外媒体团, 且国内媒体团不能连续提问, 则不同的提问方式的种数为 ( ) .

A. 378

B. 306

C. 268

D. 198

【答案】 D

【解析】 两上国媒一个外媒, 有  $C_6^2 C_3^1 A_2^2 = 90$  种 ,

两个外媒, 一个国媒  $C_6^1 C_3^2 A_3^3 = 108$  种 .

共198种 .

故选D .

【标注】 【知识点】分步乘法计数原理; 加法原理与乘法原理的综合运用; 分类加法计数原理

9. 已知圆  $O$  的半径为2,  $P, Q$  是圆  $O$  上任意两点, 且  $\angle POQ = 60^\circ$ ,  $AB$  是圆  $O$  的一条直径, 若点  $C$  满足  $\overrightarrow{OC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{OQ} (\lambda \in \mathbf{R})$ , 则  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  的最小值为 ( ) .

A. -1

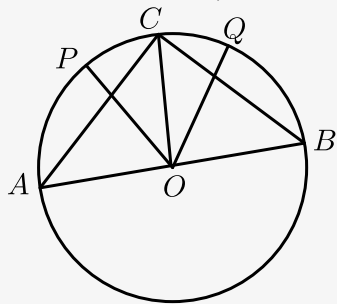
B. -2

C. -3

D. -4

【答案】 C

【解析】由题意可得  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$   
 $= \overrightarrow{CO}^2 + \overrightarrow{CO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB},$



$\because AB$  是圆  $O$  的任意一条直径,

$$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4,$$

$$\therefore \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO}^2 + 0 - 4 = \overrightarrow{CO}^2 - 4,$$

要求  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  的最小值问题就是求  $\overrightarrow{CO}^2$  的最小值,

$$\text{由于点 } C \text{ 满足 } \overrightarrow{OC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{OQ} (\lambda \in \mathbf{R}),$$

两边平方可得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CO}^2 &= (\lambda - 1)^2 \overrightarrow{OP}^2 + \lambda^2 \overrightarrow{OQ}^2 + 2\lambda(\lambda - 1) \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= 4(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 2\lambda(\lambda - 1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 4(3\lambda^2 - 3\lambda + 1) \\ &= 4 \left[ 3 \left( \lambda - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right], \end{aligned}$$

当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时,  $\overrightarrow{CO}^2$  取得最小值 1,

故  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  的最小值为  $1 - 4 = -3$ .

故选 C.

【标注】 【知识点】 数量积的最值问题

10. 已知  $a$  为实数,  $i$  为虚数单位, 若复数  $z = (a^2 - 1) + (a + 1)i$  为纯虚数, 则  $\left| \frac{a + i^{2020}}{1 + i} \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】  $\sqrt{2}$

【解析】  $\because z$  为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a + 1 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore \left| \frac{a+i^{2020}}{1+i} \right| = \left| \frac{1+(i^4)^{505}}{1+i} \right| = \left| \frac{2}{1+i} \right| = \left| \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \right| = |1-i| = \sqrt{2}.$$

故答案为： $\sqrt{2}$  .

**【标注】** 【知识点】复数中的周期问题；复数的四则运算综合；复数的乘法和除法；复数的模；复数的基本概念

11. 若  $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$  的展开式中  $x^4$  的系数为  $-488$  , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $-2$

**【解析】** 二项式  $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$  ,

展开式通项为

$$T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^r$$

$$= C_8^r a^r x^{8-\frac{4r}{3}},$$

$$\text{令 } 8 - \frac{4r}{3} = 4,$$

可得  $r = 3$  ,

由题意  $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$  的展开式中  $x^4$  的系数为  $C_8^3 a^3 = -488$  ,

得  $a = -2$  .

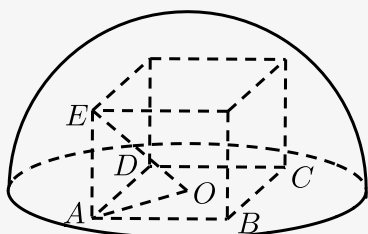
**【标注】** 【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

12. 已知一个体积为8的正方体内接于半球体，即正方体的上底面的四个顶点在球面上，下底面的四个顶点在半球体的底面圆内，则该半球体的体积为 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $4\sqrt{6}\pi$

**【解析】** 由题意，底面正方形  $ABCD$  的中心  $O$  , 即为半球的球心，

连接  $OA$  ,  $OE$  , 如图：



则半球的半径为  $EO$  ,

∵正方体的体积为8，

∴该正方体的棱长为2，正方形ABCD的对角线长为 $2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore AO = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

又EA = 2，

$$\therefore EO = \sqrt{EA^2 + AO^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6},$$

$$\text{该半球体的体积为 } \frac{2}{3}\pi \cdot EO^3 = \frac{2}{3}\pi (\sqrt{6})^3 = 4\sqrt{6}\pi.$$

故答案为： $4\sqrt{6}\pi$ 。

**【标注】** 【知识点】组合体求体积、表面积问题

13. 函数 $f(x) = x \ln x + a$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 截得弦长为2，  
则实数 $a$ 的值为 \_\_\_\_\_。

**【答案】** -6或2

**【解析】** ∵函数 $f(x) = x \ln x + a$ ，

$$f'(x) = \ln x + 1, f'(1) = \ln 1 + 1 = 1, f(1) = a,$$

∴函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处切线为 $y = x - 1 + a$ ，

$$\therefore \text{圆 } C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9,$$

由题意，圆心 $C(1, -2)$ 到直线 $y = x - 1 + a$ 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore 2\sqrt{2} = \frac{|1 + 2 - 1 + a|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|2 + a|}{\sqrt{2}}, \text{ 即 } |2 + a| = 4, \text{ 解得 } a = -6 \text{ 或 } a = 2.$$

**【标注】** 【知识点】圆的弦长的相关问题

14. 若 $x > 0, y > 0$ ，且 $\log_2 3^x + \log_2 9^y = \log_4 81$ ，则此时 $x + 2y =$  \_\_\_\_\_， $\frac{2}{x} + \frac{x + 3y}{3y}$ 的最小值为 \_\_\_\_\_。

**【答案】**  $2; \frac{2\sqrt{6} + 6}{3}$

**【解析】** ∵ $\log_2 3^x + \log_2 9^y = \log_2 (3^x \cdot 9^y) = \log_2 (3^{x+2y}) = (x + 2y)\log_2 3$ ，

$$\log_4 81 = \log_2 9 = 2\log_2 3, \therefore x + 2y = 2,$$

$$\therefore x + 2y = 2,$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{x + 3y}{3y} = \frac{2}{x} + \frac{2 + y}{3y} = \frac{1}{1 - y} + \frac{2}{3y} + \frac{1}{3},$$

$$\therefore x + 2y = 2, x > 0, y > 0,$$

$$\therefore 0 < x < 2, 0 < y < 1,$$

$$\therefore 1 - y > 0,$$

$$\therefore 1 - y + y = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{1-y} + \frac{2}{3y} = \left( \frac{1}{1-y} + \frac{2}{3y} \right) (1-y+y) = \frac{y}{1-y} + \frac{2(1-y)}{3y} + \frac{2}{3} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{5}{3}$$

$$\text{当且仅当 } \frac{y}{1-y} = \frac{2(1-y)}{3y} \text{ 时取等号, 故 } \frac{2}{x} + \frac{x+2y}{3y} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{6}+6}{3},$$

$$\text{即 } \frac{2}{x} + \frac{x+3y}{3y} \text{ 的最小值为 } \frac{2\sqrt{6}+6}{3}.$$

【标注】【素养】逻辑推理；数学运算

【知识点】利用基本不等式求最值；解对数方程

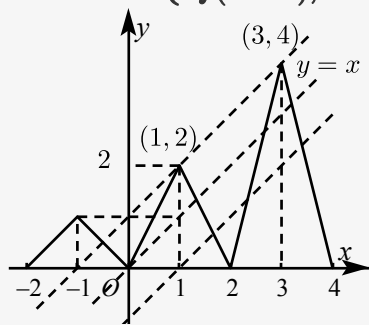
15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x-2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ , 则  $3^{\log_{f(3)} 256} = \underline{\hspace{2cm}}$ ; 若方程  $f(x) = x + a$  在区间  $[-2, 4]$  有三个不等实根, 则实数  $\frac{1}{a}$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $81; \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$

【解析】1 :  $f(3) = 2f(3-2) = 2f(1) = 2[2f(1-2)] = 4f(-1) = (1 - |-1+1|) \cdot 4 = 4$ ,

$$\therefore 3^{\log_4 256} = 3^{\log_4 4^4} = 3^4 = 81.$$

2 :  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x-2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ , 图象如下,



如图, 当  $y = x + 1$  与  $y = 1 - |x + 1|$  恰有三个交点,

$$\therefore a = 1, \frac{1}{a} = 1,$$

当直线过  $(2, 0)$  时,  $y = x + a \Rightarrow 0 = 2 + a \Rightarrow$  解得  $a = -2, \frac{1}{a} = -\frac{1}{2},$

此时  $y = x - 2$  与  $y = 1 - |x + 1|$  恰有 2 个交点,

$$\text{故 } \frac{1}{a} \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\}.$$

【标注】【知识点】函数零点的概念；已知零点情况求参数的取值范围；利用函数图象研究方程根的分布问题（图象与零点综合）；分段函数；函数求值问题

## 九、标题

1. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  , 集合  $S = \{1, 3, 5\}$  ,  $T = \{3, 6\}$  , 则  $\complement_U(S \cup T)$  等于 ( ) .  
A.  $\emptyset$                       B.  $\{1, 3, 5, 6\}$                       C.  $\{2, 4, 7\}$                       D.  $\{2, 4, 6\}$

【答案】 C

【解析】  $\because$  全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  ,  
 $S = \{1, 3, 5\}$  ,  $T = \{3, 6\}$  ,  
 $S \cup T = \{1, 3, 5, 6\}$  ,  
 $\therefore \complement_U(S \cup T) = \{2, 4, 7\}$  .  
故选 C .

【标注】 【知识点】 补集 ; 交、并、补集混合运算

2. 已知命题  $p: x^2 + 2x - 3 > 0$  , 命题  $q: x > a$  , 且  $q$  的一个必要不充分条件是  $p$  , 则实数  $a$  的取值范围是 ( ) .  
A.  $[1, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 1]$                       C.  $[-1, +\infty)$                       D.  $(-\infty, -3]$

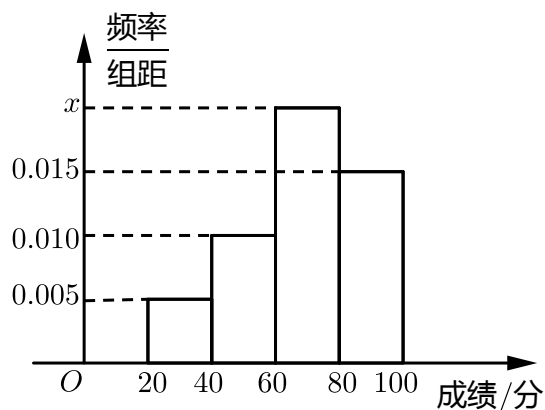
【答案】 A

【解析】 命题  $p: x^2 + 2x - 3 > 0$  ,  
则  $x > 1$  或  $x < -3$  ,  
命题  $q: x > a$  ,  
 $\because q$  的一个必要不充分条件是  $p$  ,  
则  $p$  是  $q$  的必要不充分条件 ,  
 $p \not\Rightarrow q$  但  $q \Rightarrow p$  ,  
 $\therefore$  实数  $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$  .  
故 A 正确 .

【标注】 【知识点】 充要条件与不等式结合

3. 为了调查学生的复习情况, 高三某班的全体学生参加了一次在线测试, 成绩的频率分布直方图如图所示, 数据的分组依次为  $[20, 40)$  ,  $[40, 60)$  ,  $[60, 80)$  ,  $[80, 100)$  . 若成绩在  $[60, 80)$  的人数是 16 , 则

低于60分的人数是( ) .



- A. 6                      B. 12                      C. 15                      D. 18

**【答案】** B

**【解析】** 成绩在 $[20, 40)$ ,  $[40, 60)$ ,  $[80, 100)$ 的频率分别是0.1, 0.2, 0.3 ,

$\therefore$ 成绩在 $[60, 80)$ 的频率为 $1 - 0.1 - 0.2 - 0.3 = 0.4$  ,

$\therefore$ 成绩在 $[60, 80)$ 的人数为16 ,

$\therefore$ 该班总人数为 $\frac{16}{0.4} = 40$ 人 ,

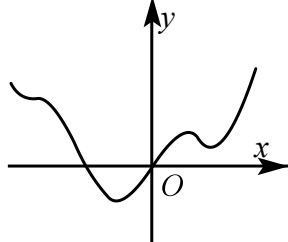
$\therefore$ 低于60分的人数为 $40 \times (0.1 + 0.2) = 12$ 人 .

故选B .

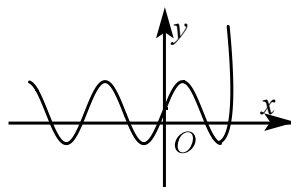
**【标注】** 【知识点】 频率分布直方图；用样本的数字特征估计总体的数字特征问题

4. 函数 $f(x) = \frac{e^x + \sin x}{3 + \cos x}$ 的部分图象可能是( ) .

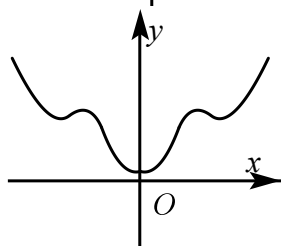
A.



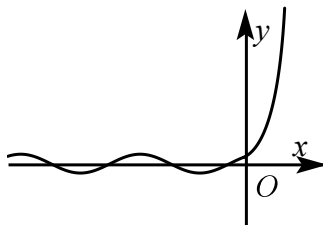
B.



C.



D.



**【答案】** D

【解析】 $\because f(0) = \frac{1+0}{3+1} = \frac{1}{4} > 0$ ,

$\therefore$ 排除A;

$\because$ 当 $x > 0$ 时,  $e^x > 1$ ,

$\therefore e^x + \sin x > 0$ , 又 $3 + \cos x > 0$ ,

$\therefore f(x) > 0$ ,

$\therefore$ 排除B;

$\because f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - 1}{3} < 0$ ,

$\therefore$ 排除C.

故选:D.

【标注】 【知识点】 函数图象的识别问题

5. 若圆 $C$ 的圆心在第一象限, 圆心到原点的距离为 $\sqrt{5}$ , 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 $x$ 轴都相切, 则该圆的标准方程是( ).

A.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

B.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

D.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

【答案】 B

【解析】 设圆 $C$ 圆心坐标为 $C(a, b)$ ,

$\because$ 圆 $C$ 的圆心在第一象限,

$\therefore a > 0, b > 0$ ,

又 $\because$ 圆心到原点的距离为 $\sqrt{5}$ ,

$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ ,

$\because$ 圆心 $C(a, b)$ 与直线 $4x - 3y = 0$ 相切, 且与 $x$ 轴相切,

$\therefore \frac{|4a - 3b|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = b$ ,

则 
$$\begin{cases} \sqrt{4^2 + 3^2} |4a - 3b| = 5b \\ a > 0 \text{ 且 } b > 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = 1$ ,

$\therefore$ 圆 $C$ 标准方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ .

故选B.

【标注】 【知识点】 圆的切线的相关问题; 圆的标准方程问题; 点到直线的距离公式



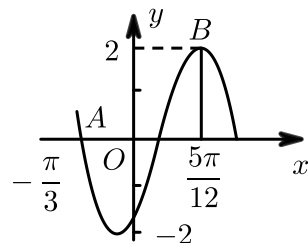
6. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ , 设  $a = f(0.31^2)$ ,  $b = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$ ,  $c = f(2\ln 2)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( ).
- A.  $a > c > b$                       B.  $a > b > c$                       C.  $b > c > a$                       D.  $b > a > c$

【答案】 D

【解析】  $\because$  函数  $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) (x \in \mathbf{R})$ ,  
 $f(-x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -f(x)$ .  
 $\therefore$  函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  
 又  $\because f'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$ ,  
 $\therefore$  函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,  
 $\because 0.31^2 = 0.0961$ ,  
 $\log_{\frac{1}{2}} 0.31 > 1$ ,  
 $2\ln 2 = \ln 4 > 1$ ,  
 $\therefore 2\ln 2 > 0.31^2 > -\log_{\frac{1}{2}} 0.31$ ,  
 则  $f(-\log_{\frac{1}{2}} 0.31) > f(0.31^2) > f(2\ln 2)$ ,  
 $\because f(-\log_{\frac{1}{2}} 0.31) = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$ ,  
 $\therefore -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31) > f(0.31^2) > f(2\ln 2)$ ,  
 $b > a > c$ .  
 故 D 正确.

【标注】 【知识点】 用单调性比较大小；指对幂比较大小

7. 已知函数  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, -\pi < \varphi < 0)$  的部分图象如图所示, 则  $f(x)$  的解析式为 ( ).



- A.  $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$                       B.  $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$   
 C.  $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$                       D.  $f(x) = 2 \cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right)$

【答案】C

【解析】 $\because$ 函数  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$ ),

如图所示, 函数  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{4}{3} \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \right) = \pi$ ,

$$\text{则 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

函数  $f(x)$  的图象经过点  $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ,

$$\text{则 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = A \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0,$$

$$-\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\varphi = \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\because -\pi < \varphi < 0, \text{ 则 } \varphi = -\frac{5\pi}{6},$$

$$\text{又 } \because \text{函数 } f(x) \text{ 经过点 } \left(\frac{5\pi}{12}, 2\right),$$

则函数  $f(x)$  最大值为 2,

$$\therefore A = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right).$$

故 C 正确.

【标注】 【知识点】 已知正弦型函数图象求参数值; 余弦函数的图象和性质

8. 已知点  $A$  是抛物线  $y^2 = 4x$  与双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的一个交点. 若抛物线的焦点为  $F$ , 且  $|AF| = 4$ , 则点  $A$  到双曲线两条渐近线的距离之和为 ( ).

A.  $2\sqrt{6}$

B. 4

C.  $2\sqrt{3}$

D. 2

【答案】A

【解析】抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F(1, 0)$ ,

设  $A(x_0, y_0)$ , 则由  $|AF| = 4$  可得  $x_0 + 1 = 4$ ,

解得  $x_0 = 3$ , 将  $x_0 = 3$  代入  $y^2 = 4x$  得  $y_0 = \pm 2\sqrt{3}$ , 即  $A(3, \pm 2\sqrt{3})$ ,

又点  $A$  是抛物线  $y^2 = 4x$  与双曲线  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的一个交点, 则  $3 - \frac{12}{b^2} = 1$ ,

解得  $b = \sqrt{6}$ ,

$\therefore$  双曲线的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{2}x$ ,

$$\text{点 } A \text{ 到 } y = \sqrt{2}x \text{ 的距离 } d_1 = \frac{|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

$$\text{点 } A \text{ 到 } y = -\sqrt{2}x \text{ 的距离 } d_2 = \frac{|-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

则点A到双曲线两条渐近线的距离之和为  $d_1 + d_2 = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$  .

故选：A .

【标注】 【知识点】 抛物线与双曲线结合

9. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x \leq 0 \\ x^3 - (a+1)x^2 + 2ax, & x > 0 \end{cases}$  , 若方程  $f(x) = ax$  有4个不同的实数根, 则实数  $a$  的取值范围是 ( ) .

A.  $(-1, 0)$                       B.  $(0, 1)$                       C.  $(0, 1]$                       D.  $(1, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 若方程  $f(x) = ax$  有4个不同实数根,

$\because x = 0, f(0) = 0,$

$\therefore x \neq 0$ , 方程  $f(x) = ax$  有3个不同实数根,

即  $\frac{f(x)}{x} = a$  有3个不同实数根,

令  $g(x) = \frac{f(x)}{x} - a$ , 则  $g(x)$  有3个非零根,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - a = \begin{cases} \frac{x}{x-1} - a, & x < 0 \\ x^2 - (a+1)x + a, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(1-a)x+a}{x-1}, & x < 0 \\ (x-a)(x-1), & x > 0 \end{cases},$$

①  $a = 1$  时,  $g(x)$  没有负根, 有唯一正根  $x = 1$ , 矛盾;

②  $a \neq 1$ , 若  $g(x) = 0$ , 则  $x = \frac{a}{a-1}$  或  $x = a$  或  $x = 1$ ,

若  $g(x)$  恰有3个根, 则  $\begin{cases} \frac{a}{a-1} < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ ,

即  $\begin{cases} a(a-1) < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ ,

即  $0 < a < 1$ ,

综上所述,  $a$  的取值范围是  $(0, 1)$  .

故选B .

【标注】 【知识点】 分段函数; 函数零点的概念; 已知零点情况求参数的取值范围

10. 若  $\frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$  ( $i$  是虚数单位,  $a$  是实数), 则  $a =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】 2

【解析】 $\because \frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$ ，  
 则  $\frac{2-i}{a-i} = \frac{(2-i)(a+i)}{(a-i)(a+i)}$   
 $= \frac{2a+2i-ai-i^2}{a^2+1}$   
 $= \frac{2a+1+(2-a)i}{a^2+1}$ ，

$\therefore \begin{cases} \frac{2a+1}{a^2+1} > \frac{1}{2}, \\ a-2=0 \end{cases}$ ，

解得  $a=2$ 。

【标注】 【知识点】 复数的四则运算综合；复数的乘法和除法

11. 二项式  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$  的展开式中，常数项为 \_\_\_\_\_。

【答案】  $-\frac{5}{2}$

【解析】 二项式  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$  展开式通项为

$$T_{r+1} = C_5^r \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{5-r}$$

$$= C_5^r (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{5-r} x^{\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r} \quad (r=0, 1, 2, 3, 4, 5),$$

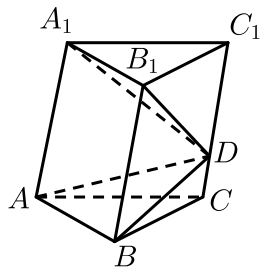
令  $\frac{5}{2} - \frac{5}{6}r = 0$ ，可得  $r=3$ ，

$$T_{3+1} = C_5^3 (-1)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{2}{5}.$$

所以二项式  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$  的展开式中，常数项为  $-\frac{5}{2}$ 。

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式；求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

12. 如图，在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $D$  是  $CC_1$  上一点，设四棱锥  $D-A_1ABB_1$  的体积为  $V_1$ ，三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的体积为  $V_2$ ，则  $V_1:V_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】2:3

【解析】设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $h$ ,

三棱锥 $D-ABC$ 的高为 $h_1$ ,

三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的高为 $h_2$ ,

则 $h = h_1 + h_2$ ,

设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面 $\triangle ABC$ 的面积为 $S$ ,

则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V_2 = Sh$ ,

三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3}Sh_1$ ,

三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积 $V_{D-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}Sh_2$ ,

所以四棱锥 $D-A_1ABB_1$ 的体积:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} - V_{D-ABC} - V_{D-A_1B_1C_1} = Sh - \frac{1}{3}Sh_1 - \frac{1}{3}Sh_2 = Sh - \frac{1}{3}S(h_1 + h_2) \\ &= Sh - \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}Sh = \frac{2}{3}V_2, \end{aligned}$$

故 $V_1 : V_2 = 2 : 3$ .

【标注】 【知识点】 空间几何体的体积；组合体求体积、表面积问题；棱柱、棱锥、棱台的结构特征

13. 甲、乙两名枪手进行射击比赛，每人各射击三次，甲三次射击命中率均为 $\frac{4}{5}$ ；乙第一次射击的命中率为 $\frac{7}{8}$ ，若第一次未射中，则乙进行第二次射击，射击的命中率为 $\frac{3}{4}$ ，如果又未中，则乙进行第三次射击，射击的命中率为 $\frac{1}{2}$ ，乙若射中，则不再继续射击．则甲三次射击命中次数 $\xi$ 的期望为 \_\_\_\_\_；乙射中的概率为 \_\_\_\_\_．

【答案】  $\frac{12}{5}$ ； $\frac{63}{64}$

【解析】由题意：甲三次射击命中次数 $\xi \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right)$ ，  
则甲三次射击命中次数 $\xi$ 的期望 $E(\xi) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$ ；

乙第一次射中的概率 $P_1 = \frac{7}{8}$ ，

乙第二次射中的概率 $P_2 = \left(1 - \frac{7}{8}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$ ，

乙第三次射中的概率 $P_3 = \left(1 - \frac{7}{8}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2}$   
 $= \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ ，

则乙射中的概率 $P = P_1 + P_2 + P_3$

$$= \frac{7}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

综上, 故答案为:  $\frac{12}{5}; \frac{63}{64}$  .

**【标注】** 【知识点】  $n$ 次独立重复试验与二项分布; 离散型随机变量的数学期望

14. 已知存在正数  $a, b$  使不等式  $\frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b} > \log_2(1-x)$  成立, 则  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $\left[1-2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}, 1\right)$

**【解析】** 分析题意, 可知:

$$\exists a \cdot b \in (0, +\infty) \left( \frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b} \right)_{\max} > \log_2(1-x),$$

对于  $\frac{\sqrt{4ab+2b^2}}{2a+3b}$  分子分母同除  $b$ ,

$$\text{得: } \frac{\sqrt{\frac{4a}{b}+2}}{\frac{2a}{b}+3};$$

$$\text{设 } \frac{a}{b} = t \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } y = \frac{\sqrt{4t+2}}{2t+3}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}(2t+3) \cdot \frac{1}{\sqrt{4t+2}} - 2\sqrt{4t+2}}{(2t+3)^2}$$

$$y' = \frac{2t+3+4(4t+2)}{2(2t+3)^2\sqrt{4t+2}}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{4t+2}}{2t+3} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减;}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{4t+2}}{2t+3} < \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$\therefore \log_2(1-x) \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{则 } \log_2(1-x) \leq \log_2 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$1-x \leq 2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$1-2^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \leq x;$$

$$\text{且 } 1-x > 0,$$

$$\text{故 } 1 > x;$$

$$\therefore \text{最终 } x \in \left[1-2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}, 1\right).$$

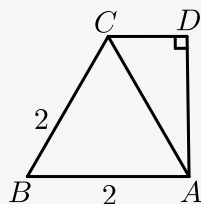
**【标注】** 【方法】 换元法

**【知识点】** 不等式中的恒成立与能成立问题; 直接求函数的最值 (不含参)

15. 在平面四边形 $ABCD$ 中,  $AB = BC = 2CD = 2$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ , 若  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$ , 则  $2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$  \_\_\_\_\_; 若 $P$ 为边 $BC$ 上一动点, 当  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 取最小值时, 则 $\cos \angle PDC$ 的值为 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\frac{13}{2}; \frac{5\sqrt{7}}{14}$

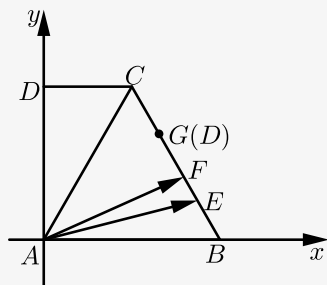
**【解析】** 因为 $AB = BC = 2$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,  $\therefore AC = 2$ , 且 $\angle BAC = 60^\circ$ ,



在 $\triangle ACD$ 中,  $AC = 2$ ,  $CD = 1$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle CAD = 30^\circ$ ,

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ , 即 $AB \perp AD$ ,

故可以 $A$ 为原点,  $AB$ ,  $AD$ 所在直线分别为 $x$ 轴,  $y$ 轴建立平面直角坐标系, 如下图所示,



①  $\because \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GC}$ ,

$\therefore E, F, G$ 是线段 $BC$ 的四等分点, 且 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,  $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ,

又 $AB = BC = 2CD = 2$ , 则 $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(1, \sqrt{3})$ ,  $D(0, \sqrt{3})$ ,

$\therefore \overrightarrow{AB} = (2,0)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{DC} = (1,0)$ ,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = (2,0) + \frac{1}{4}(-1, \sqrt{3}) = \left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (2,0) + \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{7}{4} \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 0 = \frac{7}{4},$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{7}{4} \times \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$$

$$\therefore 2\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{7}{2} + 3 = \frac{13}{2};$$

②  $\because P$  为边  $BC$  上一动点,  $\therefore$  设  $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ,

则  $\overrightarrow{BP} = \lambda(-1, \sqrt{3}) = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda)$ , 得点  $P$  的坐标为  $(2 - \lambda, \sqrt{3}\lambda)$ ,

$\therefore \overrightarrow{PA} = (\lambda - 2, -\sqrt{3}\lambda)$ ,  $\overrightarrow{PC} = (\lambda - 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$ ,

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - \sqrt{3}\lambda(\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda) = 4\lambda^2 - 6\lambda + 2$ ,

$\therefore$  当  $\lambda = \frac{3}{4}$  时,  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$  取最小值,

此时, 点  $P$  与  $G$  点重合, 且  $P$  点坐标为  $\left(\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ ,

$\therefore \overrightarrow{DP} = \left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ,

$\therefore \cos \angle PDC = \cos \langle \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP} \rangle$

$$= \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DP}|}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

综上, 故答案为:  $\frac{13}{2}; \frac{5\sqrt{7}}{14}$ .

**【标注】** 【知识点】平面向量加、减、数乘的坐标运算；线性运算和数量积综合问题；向量的数量积的定义；数量积的坐标表达式；平面向量的数乘运算及运算规则