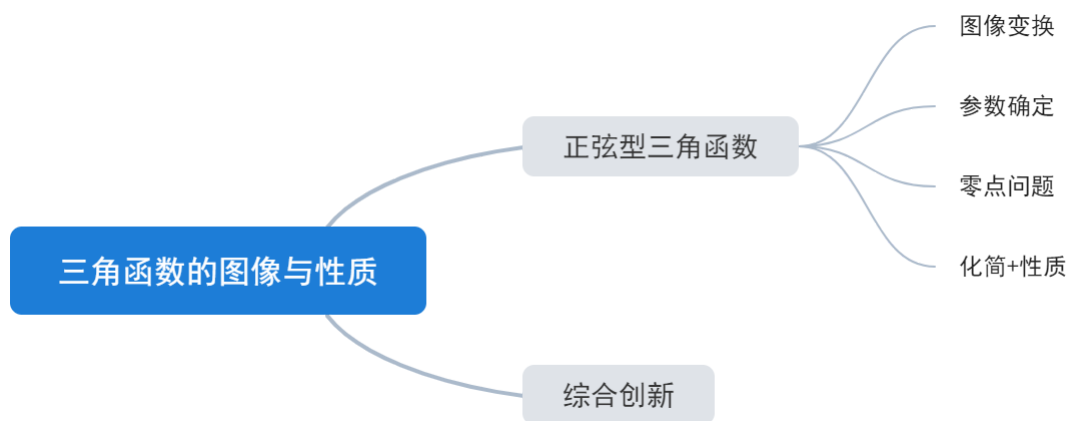


第三讲-三角函数图像性质

1. 知识梳理



一、正弦型三角函数性质综合

1. 真题分析

图像变换

1 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数（ ）。

- A. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增
- B. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递减
- C. 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增
- D. 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 上单调递减

答案 A

解析 方法一： $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度得 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{10}\right) + \frac{\pi}{5}\right] = \sin 2x$ ，
 $2x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递增，即 $x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ 时单调递增；

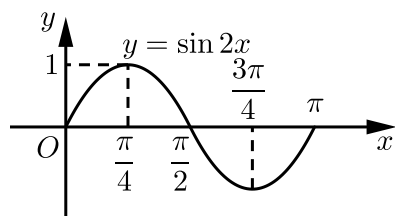
$2x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 时单调递减, 即 $x \in \left[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$ 时单调递减;

当 $k=1$ 时, y 在 $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增, 则 A 正确.

方法二: 因为将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度,

得到函数 $y = \sin 2x$ 的图象,

用五点法作出草图, 如图:



从图中可以看出选项 A 正确, 其他都不正确.

备注: 2018 年高考真题天津卷理科第 6 题

2 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 所得图象经过点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, 则 ω 的最小值是 ().

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. $\frac{5}{3}$

D. 2

答案 D

解析 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,

所得对应的函数为 $y = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\omega\right)$.

$\therefore$ 所得图象经过点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$,

$\therefore \sin\left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\omega\right) = \sin \frac{\omega\pi}{2} = 0$,

$\therefore \frac{\omega\pi}{2} = k\pi$, 即 $\omega = 2k$, ($k \in \mathbf{Z}$),

$\therefore \omega$ 的最小值为 2.

故选: D.

备注: 2012 年高考真题天津卷文科第 7 题

分析: 本题考察平移变换和性质综合, 首先根据题目给出的图像变换要求结合图像变换规则可得

出变换之后函数解析式为 $y = \sin\left(\omega\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, 又图像满足的性质是经过点 $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$, 可得

$\sin \frac{\pi\omega}{2} = 0$, 则有 $\frac{\pi\omega}{2} = k\pi$, 即 $\omega = 2k$, 又因为 $k \in \mathbf{Z}, \omega > 0$, 故而 $k = 1$ 时, ω 的最小值为 2.

参数确定

3 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x (\omega > 0), x \in \mathbf{R}$, 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ().

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. π

D. 2π

答案 C

解析 方法一: $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$.

令 $f(x) = 1$, 则 $\omega x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

则 $|\omega x_1 - x_2|_{\min} = \frac{2}{3}\pi$, 故 $\omega = 2$, 最小正周期为 π .

方法二: $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + \cos\omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 得

$\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 设 x_1, x_2 分别为距离最小的相邻交点的横坐标, 则 $\omega x_1 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$,

$\omega x_2 + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$, 两式相减, 得 $x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\omega = 2$, 故

$f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π .

故选 C.

备注: 2014 年高考真题天津卷文科第 8 题

分析: 本题考察伸缩变化对于图像的影响, 据此可以确定函数周期的变化, $y = \sin x$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 的交点中, 相邻交点距离最小值为 $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, 考虑到平移变换对于图像形状无影响, 故而

$y = \sin(\omega x + \varphi)$ 与 $y = \frac{1}{2}$ 的交点中, 相邻交点距离的最小值为 $\frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{\omega} = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}$, 则可得 $\omega = 2$, 进一步可通过 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 求出周期.

4 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi)$ 是奇函数, 将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$, 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π , 且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = ()$.

A. -2

B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

答案 C

解析 $\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore \varphi = 0$,

$$\text{则 } f(x) = A \sin(\omega x)$$

将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$.

$$\text{即 } g(x) = A \sin\left(\frac{1}{2}\omega x\right)$$

$\because g(x)$ 的最小正周期为 2π ,

$$\therefore \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\omega} = 2\pi, \text{ 得 } \omega = 2,$$

$$\text{则 } g(x) = A \sin x, f(x) = A \sin 2x,$$

$$\text{若 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 则 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} A = \sqrt{2}, \text{ 即 } A = 2,$$

$$\text{则 } f(x) = 2 \sin 2x, \text{ 则 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

故选: C.

备注: 2019年高考真题天津卷文科第7题

分析: 本题考察正弦型三角函数参数确定, 首先根据函数为奇函数可得 $f(0) = 0$, 即 $\sin \varphi = 0$, 则 $\varphi = k\pi$, 又 $-\pi < \varphi < \pi$, 则可得 $-1 < k < 1$, 又因为 $k \in \mathbb{Z}$, 所以 $k = 0$, 可得 $\varphi = 0$, 根据伸缩变换可得 $g(x) = A \sin x, f(x) = A \sin 2x$, 因为 $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 则 $A = 2$, 故而 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$.

5 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbb{R}$, 其中 $\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$, 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π , 且当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 ().

A. $f(x)$ 在区间 $[-2\pi, 0]$ 上是增函数

B. $f(x)$ 在区间 $[-3\pi, -\pi]$ 上是增函数

C. $f(x)$ 在区间 $[3\pi, 5\pi]$ 上是减函数

D. $f(x)$ 在区间 $[4\pi, 6\pi]$ 上是减函数

答案 A

解析 $\because \frac{2\pi}{\omega} = 6\pi, \therefore \omega = \frac{1}{3}$.

$$\text{又 } \because \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 且 } -\pi < \varphi < \pi,$$

$$\therefore \text{当 } k = 0 \text{ 时, } \varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right),$$

要使 $f(x)$ 递增, 须有 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

解之得 $6k\pi - \frac{5\pi}{2} \leq x \leq 6k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k=0$ 时, $-\frac{5}{2}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{5}{2}\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上递增.

6 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2$, $f(\frac{11\pi}{8}) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则().

- A. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$
- B. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$
- C. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$
- D. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

答案 A

解析 $f(\frac{5\pi}{8}) = 2\sin(\frac{5\pi}{8} \times \omega + \varphi) = 2$, $f(\frac{11\pi}{8}) = 2\sin(\frac{11\pi}{8} \times \omega + \varphi) = 0$,
 所以 $\begin{cases} \frac{5\pi}{8} \times \omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbf{Z} \\ \frac{11\pi}{8} \times \omega + \varphi = n\pi, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} \omega = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}(n-2m), n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z} \\ \varphi = \frac{11\pi}{12} + (\frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n)\pi, n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z} \end{cases}$,
 选项A, $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$, 即 $\begin{cases} n-2m=1 \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{5}{6} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$, 合题;
 选项B, $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$, 即 $\begin{cases} n-2m=1 \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{11}{6} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=-\frac{1}{2} \\ n=0 \end{cases}$, 不合题;
 选项C, $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$, 即 $\begin{cases} n-2m=\frac{3}{4} \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{11}{8} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=-\frac{3}{8} \\ n=0 \end{cases}$, 不合题;
 选项D, $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$, 即 $\begin{cases} n-2m=\frac{3}{4} \\ \frac{11}{3}m - \frac{5}{6}n = -\frac{5}{8} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=0 \\ n=\frac{3}{4} \end{cases}$, 不合题;
 综上, 故选A.

零点问题

7 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} (\omega > 0)$, $x \in \mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是().

- A. $(0, \frac{1}{8}]$

- B. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{5}{8}, 1)$
 C. $(0, \frac{5}{8}]$
 D. $(0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{5}{8}]$

答案 D

解析

$$f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos \omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

$$\text{所以, } x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega} \notin (\pi, 2\pi), k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因此 } \omega \notin \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{4} \right) \cup \left(\frac{9}{8}, \frac{9}{4} \right) \cup \dots = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{8}, +\infty \right),$$

$$\omega = \left(0, \frac{1}{8} \right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{8} \right], \text{ 选D.}$$

备注：2016年高考真题天津卷文科第8题

分析：本题考察含参正弦型三角函数的零点，在处理思路我们需要先带着参数写出函数的零

点，就本题而言，可以得到零点表示为 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{\omega}$ ，两个相邻的零点之间距离为 $\frac{\pi}{\omega}$ ，故而要保证

在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则区间长度需要小于等于相邻零点之间的距离，即 $\frac{\pi}{\omega} \geq \pi$ ，则 $\omega \leq 1$ ，

令 $k \leq -1$ 或者 $k \geq 2$ 时，此时对应的零点一定不在给定区间，故而只要保证 $k = 0, 1$ 所对应的零点

$$\frac{\pi}{4\omega}, \frac{5\pi}{4\omega} \text{ 均不在区间 } (\pi, 2\pi) \text{ 内，即可得 } \begin{cases} \frac{\pi}{4\omega} \leq \pi \text{ 或者 } \frac{\pi}{4\omega} \geq 2\pi \\ \frac{5\pi}{4\omega} \leq \pi \text{ 或者 } \frac{5\pi}{4\omega} \geq 2\pi \end{cases} \text{ 即可求解出来 } \omega \text{ 的范围.}$$

化简+性质

8 已知函数 $f(x) = 4 \tan x \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期；

(2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ 上的单调性.

答案

(1) 定义域为 $\left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $T = \pi$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right)$ 上单调递增，

在 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12} \right)$ 上单调递减

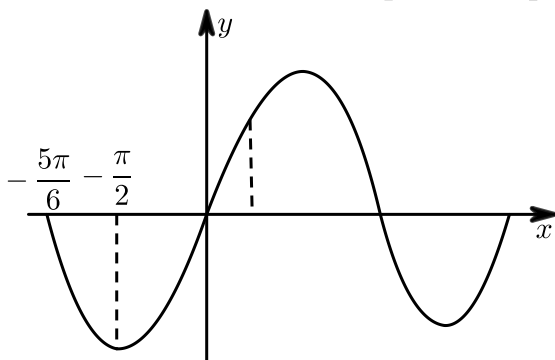
解析

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= 4 \tan x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \\
 &= 4 \sin x \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) - \sqrt{3} \\
 &= \sin 2x + \sqrt{3}(1 - \cos 2x) - \sqrt{3} \\
 &= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x \\
 &= 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).
 \end{aligned}$$

所以定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $T = \pi$.

$$(2) \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6},$$

设 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$, $\therefore y = \sin t$ 在 $t \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 时单调递减, 在 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时单调递增



由 $-\frac{5\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{2}$ 解得 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{12}$, 由 $-\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$ 解得 $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递减

9

已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

答案

(1) $f(x)$ 的最小正周期 $T = \pi$.

(2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$, 最小值为 $-\frac{1}{2}$.

解析

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{由已知, 有 } f(x) &= \cos x \cdot \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x = \frac{1}{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \\
 \text{所以, } f(x) \text{ 的最小正周期 } T &= \frac{2\pi}{2} = \pi.
 \end{aligned}$$

(2) 方法一：因为 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}]$ 上是减函数，在区间 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ 上是增函数。

$$f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{4}, f(-\frac{\pi}{12}) = -\frac{1}{2}, f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}.$$

所以，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$ ，最小值为 $-\frac{1}{2}$ 。

方法二： $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时， $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ ，

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) \in [-1, \frac{1}{2}], \text{从而 } f(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}].$$

即函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值为 $\frac{1}{4}$ ，最小值为 $-\frac{1}{2}$ 。

2. 思路总结

题型总结：

- 1、图像变换；熟练掌握三角函数伸缩变换和图像变换的规则
- 2、参数确定；根据周期确定 ω ，根据最值确定 A ，根据函数图像上的特殊点确定 φ
- 3、零点问题；带参数表示零点，结合零点情况确定参数范围
- 4、化简+性质；化简需要熟练掌握正余弦的和差角公式、二倍角降次公式以及辅助角公式，性质求解需要熟练掌握正弦型三角函数的对称轴和对称中心、单调区间、值域、最小正周期的求解方式

3. 模拟演练

图像变换

10 将函数 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，所得图象对应的函数 ()。

- A. 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减
- B. 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递增
- C. 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减
- D. 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增

答案 B

解析

由题可知，将函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到函数

$y = 3 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图像.

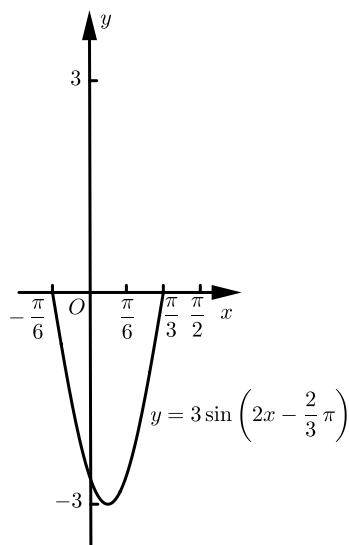
由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

得 $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

则函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

令 $k = 0$ 得函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的一个递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$, 故B正确.

画出函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的简图, 如图,



可知 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上不具有单调性, 故C, D错误.

故选B.

11 要得到函数 $y = 3 \cos x$ 的图象, 只需将函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点 ().

- A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 所得图象再向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位
- B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 所得图象再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
- C. 横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 所得图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位
- D. 横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 所得图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

答案 C

解析 将函数 $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 可得到函数 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

再向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位，

可得到函数 $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos x$ 的图象。

故选C。

- 12 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍 (纵坐标不变)，再向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y = \cos x$ 的图象，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 ()。

- A. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{12}, 2k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$ B. $\left[2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$
C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$ D. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$

答案 C

解析 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 图象上每一点的横坐标伸长为原来的2倍 (纵坐标不变)，

可得 $y = \sin\left(\frac{1}{2}\omega x + \varphi\right)$ 的图象；

再向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度，可得 $y = \sin\left(\frac{1}{2}\omega x + \frac{5\omega\pi}{12} + \varphi\right)$ 的图象，

再根据得到 $y = \cos x$ 的图象，可得 $\frac{1}{2} \cdot \omega = 1$ ，

$\therefore \omega = 2$ ，且 $\frac{5\omega\pi}{12} + \varphi = \frac{5\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，

令 $k = 0$ ，可得 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ ，

$\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，解得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$ ，

可得函数的增区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$ ，

故选C。

- 13 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位，所得图象经过点 $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$ ，则 ω 的最小值是 ()。

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

答案 B

解析 因为函数 $f(x) = \sin \omega x$ (其中 $\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个长度单位得 $y = \sin \omega \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,
 所以 $0 = \sin \omega \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{3\pi}{2}\omega = k\pi (k \in \mathbf{Z})$,
 $\therefore \omega = \frac{2}{3}k$,
 因为 $\omega > 0$, 所以 $\omega_{\min} = \frac{2}{3}$,
 故选 B.

- 14 将函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 象上各点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变), 再把得到的函数向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 所得的函数图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 则 φ 的值为 ().
- A. $-\frac{5}{12}\pi$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

答案 B

解析 函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍后得到 $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right)$ 的图象,
 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得 $y = \cos\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right]$ 的图象,
 因为 $y = \cos\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right]$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称,
 $\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$,
 当 $k = 0$ 时, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.
 故选 B.

参数确定

- 15 已知 $\omega > 0$, 在函数 $y = 2\sin(\omega x + \theta)$ 与 $y = 2\cos(\omega x + \theta)$ 的图象的交点中, 距离最短的两个交点间的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 $\omega =$ ().
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\theta}{2}$ D. 1

答案 B

解析 $\because y = 2 \sin(\omega x + \theta)$ 与 $y = 2 \cos(\omega x + \theta)$ 图像的交点,

$\therefore$ 根据三角函数线可得出交点,

$$\left(\frac{k_1 \pi + \frac{\pi}{4} - \theta}{\omega}, \sqrt{2} \right);$$

$$\left(\frac{k_2 \pi + \frac{5}{4} \pi - \theta}{\omega}, -\sqrt{2} \right);$$

$k, k_2 \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ 距离最短的两个交点距离为 $2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 这两个交点在同一周期内,

$$\therefore 12 = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\pi}{4} - \theta - \frac{5}{4} \pi + \theta \right)^2 + (-\sqrt{2} - \sqrt{2})^2,$$

$$\therefore \omega = \frac{\pi}{2}.$$

故选 B.

16 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位以后得到一个偶函数, 则下列判断正确的是 ().

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi \right]$ 上单调递增

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0 \right)$ 对称

D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 对称

答案 B

解析 A选项: $\because$ 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$),

其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \omega = 2, f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

将函数的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后,

得到的图象对应的函数为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \varphi\right)$ 为偶函数,

$$\therefore \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 故 A 错误;

B选项：在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上， $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}\right]$ ，

故函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 上单调递增，故B正确；

C选项：当 $x = \frac{7\pi}{12}$ 时， $f(x) = -1$ ，故C错误；

D选项：当 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 时， $f(x) = -\frac{1}{2}$ ，故D错误；

故选B.

17 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) + 2\cos^2\left(\frac{\omega x}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$ (其中 $\omega > 0$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$)，当

$f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ 时， $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ， $f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ ，将 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象对应的函数为 $g(x)$ ，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = ()$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

B. $\sqrt{3} + 1$

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

答案 B

解析

$$f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) + 1 + \cos(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$$f'(x) = 2\omega \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0, |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \pi \rightarrow \omega = 2.$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \rightarrow f(x) \text{ 关于 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 对称.}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1, \text{ 向右平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 得到 } g(x) = 2\sin 2x + 1,$$

$$\therefore g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + 1.$$

故选B.

18 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{\pi}{18}, 3\right)$, $\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$ ，则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 () .

A. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$

B. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{4\pi}{9}, \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{9}\right), k \in \mathbf{Z}$

C. $\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{7\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$

D. $\left(\frac{2k\pi}{3} - \frac{5\pi}{18}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}\right), k \in \mathbf{Z}$

答案 D

解析

由题意得, 对称中心 $\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$,

可得 $b = 0$,

图象上相邻的一个最大值点与对称中心分别为 $\left(\frac{\pi}{18}, 3\right)$, $\left(\frac{2\pi}{9}, 0\right)$,

$$\therefore \frac{1}{4}T = \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{18},$$

$$\text{即 } T = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 3,$$

$$\therefore A = -3,$$

$$\therefore f(x) = -3\sin(3x + \varphi) = 0,$$

$$\text{得 } \frac{2\pi}{3} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{令 } -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } \frac{2}{3}k\pi - \frac{5\pi}{18} \leq x \leq \frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{18}.$$

故选D.



零点问题

19 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$, ($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$

B. $\left(0, \frac{5}{12}\right]$

C. $\left(0, \frac{5}{6}\right]$

D. $\left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$

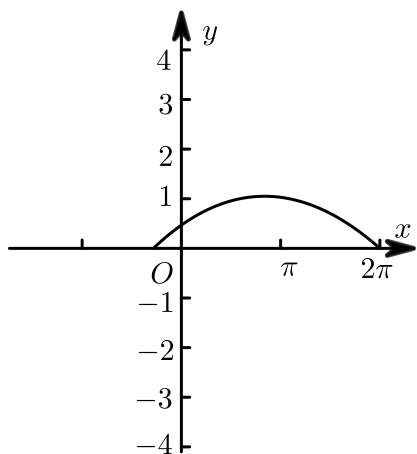
$\cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right)$

答案 D

解析

$$\text{函数 } f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right),$$

可得 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi, 0 < \omega \leq 2$, $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 函数的图象如图两种类型,



结合三角函数可得： $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq 0 \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq \pi \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases}$ ，

解得 $\omega \in \left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$ 。

故选：D。

- 20 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$)，($x \in \mathbf{R}$)，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是 _____。

答案 $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$

解析 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right)$
 $= \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$
 $= \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= \frac{1}{2} \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 。
 $f(x) = 0$ 时， $2\omega x + \frac{\pi}{3} = k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ 。
 $x = \frac{k\pi - \frac{\pi}{3}}{2\omega} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ，
 $\omega x \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{6}, k - \frac{1}{3}\right)$ $k \in \mathbf{Z}$ 。
 此时 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内有零点，
 故当 $\omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ 时无零点，
 故答案为： $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ 。



21 已知函数 $f(x) = -\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 6\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 1, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

答案 (1) π .

(2) $2\sqrt{2}, -2$.

解析

$$(1) \because \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\therefore f(x) = -\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 6\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 1$$

$$= -\sin 2x - \cos 2x + 3\sin 2x - (1 + \cos 2x) + 1$$

$$= 2\sin 2x - 2\cos 2x = 2\sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4}),$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

$$(2) \because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4},$$

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \text{ 取得最小值 } -\frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ 当 } x = \frac{3\pi}{8} \text{ 时, } \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \text{ 取得最大值 } 1$$

$$\therefore \text{由此可得, } f(x) \text{ 在区间 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上的最大值为 } f(\frac{3\pi}{8}) = 2\sqrt{2}; \text{ 最小值为 } f(0) = -2.$$

22 设函数 $f(x) = -\sin(\frac{3\pi}{2} - x) \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和对称中心.

(2) 若函数 $g(x) = f(x + \frac{\pi}{4})$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最值.

答案

(1) 最小正周期为 $T = \pi$, 对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0), k \in \mathbf{Z}$.

(2) 最大值为 $\frac{1}{2}$, 最小值为 $-\frac{1}{4}$.

解析

(1) 由题知,

$$f(x) = \cos x \cdot \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

∴最小正周期为 $T = \pi$,

由 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$, 得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$,

∴对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, 0 \right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

(2) 由 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 得 $g(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$,

可得 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减,

$$\therefore g(x)_{\max} = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} < g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore g(x)_{\min} = g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}.$$

二、综合创新

23 设函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数, $A > 0$, $\omega > 0$). $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.

答案 π

解析 方法一: 由 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 可知,

$f(x)$ 有对称中心 $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right), 0\right) = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, 对称轴 $x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{7\pi}{12}$;

故 $f(x)$ 的周期为 $4\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \pi$.

方法二: 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性,

$$\text{且 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6},$$

且函数的图象关于直线 $x = \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{7\pi}{12}$ 对称,

且一个对称点为 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

$$\text{可得 } 0 < \omega \leq 3 \text{ 且 } \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega},$$

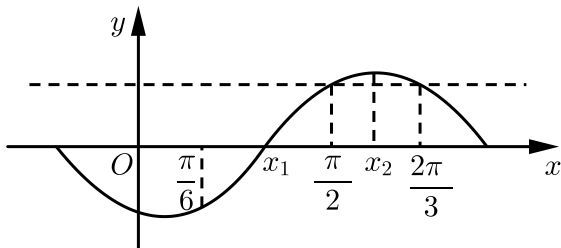
求得 $\omega = 2$,

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

方法三：记 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

由题意知 $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 且 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$,

可作出示意图如图所示 (一种情况) ,



所以 $x_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{7\pi}{12}$,

所以 $\frac{T}{4} = x_2 - x_1 = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$,

所以 $T = \pi$.

24 已知 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增 , 则 ω 的取值范围是 () .

A. $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$

B. $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]$

C. $\left[\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right]$

D. $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$

答案 D

解析 函数 $y = \cos x$ 的单调递增区间为 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi]$, 其中 $k \in \mathbf{Z}$,

依题意 , 则有 $-\pi + 2k\pi \leq \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \omega\pi + \frac{\pi}{4} < \omega\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi (\omega > 0)$,

得 $4k - \frac{5}{2} \leq \omega \leq 2k - \frac{1}{4}$,

由 $\left(4k - \frac{5}{2}\right) - \left(2k - \frac{1}{4}\right) \leq 0$ 且 $4k - \frac{5}{2} > 0$ 得 $k = 1$, 因此 ω 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$.

故选 D .

25 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$, $x \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega, \omega)$ 内单调递增 , 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \omega$ 对称 , 则 ω 的值为 _____ .

答案

$\frac{\sqrt{6\pi}}{6}$

解析

$$f(x) = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{结论已知可得 } -\omega \geq \frac{-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi}{\omega}, \omega \leq \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{\omega}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{再由 } \omega x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \omega = \frac{\frac{\pi}{6} + k\pi}{\omega},$$

$$\text{可得 } k = 0, \omega^2 = \frac{\pi}{6}, \omega = \frac{\sqrt{6\pi}}{6}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{6\pi}}{6}.$$

26 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + 3 \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 对任意的 x_1, x_2 , 当 $f(x_1)f(x_2) = -12$ 时,

$|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$. 则下列判断正确的是 ().

A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增

C. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{7\pi}{6}$

D. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

答案

D

解析

$$\because f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + 3 \cos \omega x = 2\sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{又 } \because -1 \leq \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \text{ 即 } -2\sqrt{3} \leq 2\sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 有且仅有 $-2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = -12$ 满足条件;

$$\text{又 } |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi,$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

A选项: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 3$, 故A错误;

$$\text{B选项: 由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故B错误;

$$\text{C选项: 当 } x = \frac{7\pi}{6} \text{ 时, } f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3}, \text{ 故C错误;}$$

$$\text{D选项: 由 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \text{ 故D正确.}$$

故选D.

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $B(0, \sqrt{3})$ ，且在 $(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ 上单调，把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位之后与原来的图象重合，当 $x_1, x_2 \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时， $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $f(x_1 + x_2) = ()$.

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. -1 D. 1

答案 B

解析 $\because$ 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $B(0, \sqrt{3})$ ，

$$\therefore 2\sin \varphi = \sqrt{3},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ 上单调，

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12},$$

$$\therefore 0 < \omega \leq 3.$$

把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位之后与原来的图象重合，

$$\therefore k \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore \omega = 2, f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

当 $x_1, x_2 \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} \in (\frac{5\pi}{3}, 3\pi)$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{5\pi}{2} = 5\pi,$$

$$f(x_1 + x_2) = 2\sin\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

故选 B.