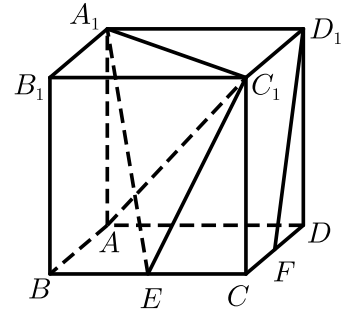


立体几何真题

1. 如图，在棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为棱 BC 的中点， F 为棱 CD 的中点．



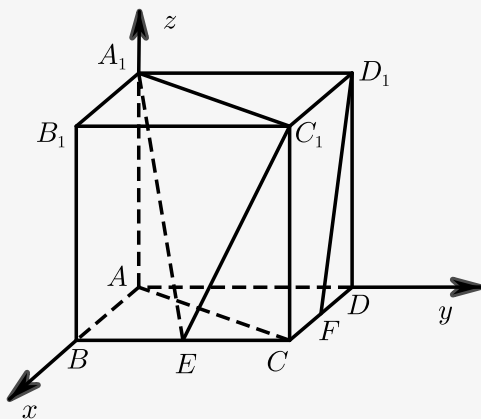
- (1) 求证： $D_1F \parallel$ 平面 A_1EC_1 ．
- (2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值．
- (3) 求二面角 $A - A_1C_1 - E$ 的正弦值．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ．

(3) $\frac{1}{3}$ ．

【解析】 (1) 以 A 为原点，分别以 AB ， AD ， AA_1 所在直线为 x ， y ， z 轴，建立如图空间直角坐标系，



则 $A_1(0, 0, 2)$ ， $E(2, 1, 0)$ ， $C_1(2, 2, 2)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0), \overrightarrow{EC_1} = (0, 1, 2),$$

设平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases},$$

故取 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

$$\text{而 } F(1, 2, 0), D_1(0, 2, 2), \overrightarrow{FD_1} = (-1, 0, 2),$$

$$\therefore \vec{n} \cdot \overrightarrow{FD_1} = 0, \text{ 又 } D_1F \notin \text{平面 } A_1EC_1,$$

故 $D_1F // \text{平面 } A_1EC_1$.

(2) 由(1)知平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2)$,

设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AC_1} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} \right|}{\left| \vec{n} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC_1} \right|} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

(3) 由(1)知 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (2, 2, 0)$,

设平面 AA_1C_1 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases},$$

故取 $\vec{m} = (1, -1, 0)$, $\therefore$ 平面 A_1EC_1 的法向量 $\vec{n} = (2, -2, 1)$,

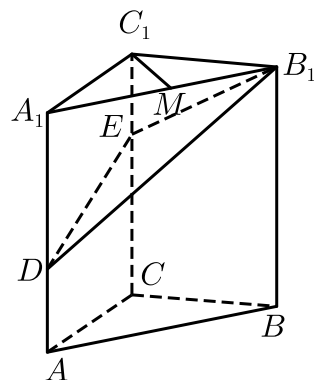
$$\therefore \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{\left| \vec{m} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \vec{m} \right| \cdot \left| \vec{n} \right|} = \frac{4}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

由图可知, 二面角 $A - A_1C_1 - E$ 为锐角,

故其正弦值为 $\frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】向量法解决线面角问题; 向量法解决二面角问题

2. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp \text{平面 } ABC$, $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, $CC_1 = 3$, 点 D, E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上, 且 $AD = 1$, $CE = 2$, M 为棱 A_1B_1 的中点.



- (1) 求证： $C_1M \perp B_1D$.
- (2) 求二面角 $B - B_1E - D$ 的正弦值 .
- (3) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值 .

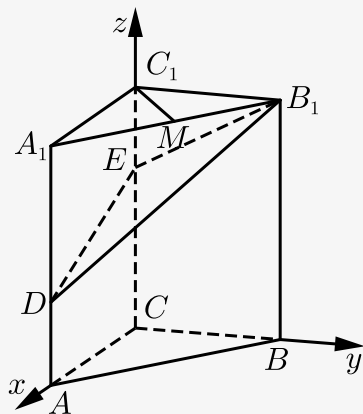
【答案】(1) 见解析

$$(2) \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【解析】(1) 以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图所示,

则 $C(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C_1(0,0,3)$,
 $A_1(2,0,3)$, $B_1(0,2,3)$, $D(2,0,1)$, $E(0,0,2)$, $M(1,1,3)$,
 依题意, $\overrightarrow{C_1M} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{B_1D} = (2,-2,-2)$,
 $\therefore \overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{B_1D} = 2 - 2 + 0 = 0$,
 $\therefore C_1M \perp B_1D$.



(2) 依题意, $\overrightarrow{CA} = (2,0,0)$ 是平面 BB_1E 的一个法向量,

$$\overrightarrow{EB_1} = (0,2,1), \overrightarrow{ED} = (2,0,-1),$$

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}, \text{ 不妨设 } x = 1, \text{ 则 } \vec{n} = (1, -1, 2),$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore \sin \langle \overrightarrow{CA}, \vec{n} \rangle = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6},$$

$$\therefore \text{二面角 } B - B_1E - D \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

(3) 依题意, $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$,

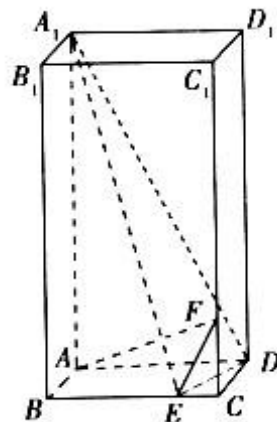
由(2)知, $\vec{n} = (1, -1, 2)$ 为平面 DB_1E 的一个法向量,

$$\therefore \sin \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \left| \cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【标注】 【知识点】线线垂直的证明问题；向量法解决二面角问题；向量法解决线面角问题

3. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 BC, CC_1 上的点, $CF = AB = 2CE, AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 4$.



- (1) 求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值.
- (2) 证明 $AF \perp$ 平面 A_1ED .
- (3) 求二面角 $A_1 - ED - F$ 的正弦值.

【答案】 (1) $\frac{3}{5}$.

(2) 证明见解析.

(3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

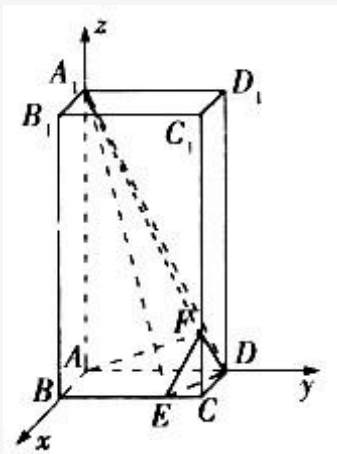
【解析】(1) 如图所示, 建立空间直角坐标系, 点 A 为坐标原点,

设 $AB = 1$, 依题意得 $D(0, 2, 0)$, $F(1, 2, 1)$, $A_1(0, 0, 4)$, $E\left(1, \frac{3}{2}, 0\right)$.

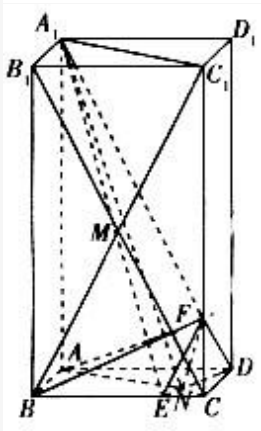
易得 $\overrightarrow{EF} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\overrightarrow{A_1D} = (0, 2, -4)$.

于是 $\cos(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{A_1D}) = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{A_1D}|} = -\frac{3}{5}$.

所以异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.



(2)



连接 AC , 设 AC 与 DE 交于点 N .

因为 $\frac{CD}{BC} = \frac{EC}{AB} = \frac{1}{2}$,

所以 $Rt\triangle DCE \sim Rt\triangle CBA$.

从而 $\angle CDE = \angle BCA$,

又由于 $\angle CDE + \angle CED = 90^\circ$,

所以 $\angle BCA + \angle CED = 90^\circ$, 故 $AC \perp DE$,

又因为 $CC_1 \perp DE$ 且 $CC_1 \cap AC = C$,

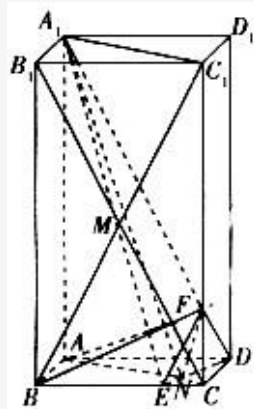
所以 $DE \perp$ 平面 ACF , 从而 $AF \perp DE$.

连接 BF , 同理可证 $B_1C \perp$ 平面 ABF ,

从而 $AF \perp B_1C$, 所以 $AF \perp A_1D$,

因为 $DE \cap A_1D = D$, 所以 $AF \perp$ 平面 A_1ED .

(3)



连接 A_1N , FN ,

由(2)可知 $DE \perp$ 平面 ACF ,

又 $NF \subset$ 平面 ACF , $A_1N \subset$ 平面 ACF ,

所以 $DE \perp NF$, $DE \perp A_1N$,

故 $\angle A_1NF$ 为二面角 $A_1 - ED - F$ 的平面角 .

易知 $\text{Rt}\triangle CNE \sim \text{Rt}\triangle CBA$,

所以 $\frac{CN}{CB} = \frac{EC}{AC}$,

又 $AC = \sqrt{5}$, 所以 $CN = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle CNF$ 中 , $NF = \sqrt{CF^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle A_1AN$ 中 , $A_1N = \sqrt{AN^2 + A_1A^2} = \frac{4\sqrt{30}}{5}$.

连接 A_1C_1 , A_1F , 在 $\text{Rt}\triangle A_1C_1F$ 中 , $A_1F = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{14}$.

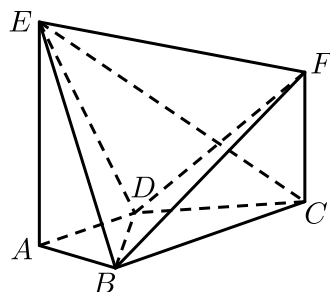
在 $\triangle A_1NF$ 中 , $\cos \angle A_1NF = \frac{A_1N^2 + FN^2 - A_1F^2}{2 \cdot A_1N \cdot FN} = \frac{2}{3}$.

所以 $\sin \angle A_1NF = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

所以二面角 $A_1 - ED - F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【标注】 【知识点】 向量法解决异面直线所成角问题；直线和平面垂直的判定；线面垂直的证明问题；点、直线、平面之间的位置关系；几何法求空间角

4. 如图 , $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = AD = 1$, $AE = BC = 2$.



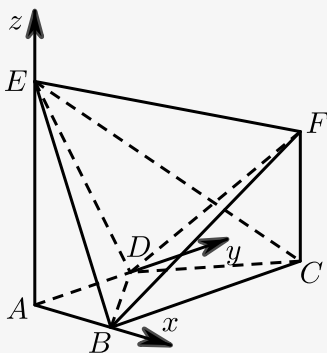
- (1) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE .
- (2) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值 .
- (3) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $\frac{4}{9}$.

(3) 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【解析】(1) 依题意, 可以建立以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴正方向的空间直角坐标系 (如图) ,



可得 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,2,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,2)$.

设 $CF = h (h > 0)$, 则 $F(1,2,h)$.

依题意, $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$ 是平面 ADE 的法向量, 又 $\overrightarrow{BF} = (0,2,h)$,

可得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

又因为直线 $BF \not\subset$ 平面 ADE ,

所以 $BF \parallel$ 平面 ADE .

(2) 依题意, $\overrightarrow{BD} = (-1,1,0)$, $\overrightarrow{BE} = (-1,0,2)$, $\overrightarrow{CE} = (-1,-2,2)$,

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量 ,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{即} \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} , \text{不妨令 } z = 1 ,$$

可得 $\vec{n} = (2,2,1)$,

$$\text{因此有 } \left| \cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{9}.$$

故直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

(3) 设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 BDF 的法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + hz = 0 \end{cases},$$

不妨令 $y = 1$, 可得 $\vec{m} = \left(1, 1, -\frac{2}{h}\right)$,

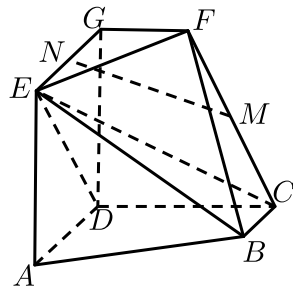
$$\text{由题意, 有 } \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\left|4 - \frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3},$$

解得 $h = \frac{8}{7}$, 经检验, 符合题意.

所以, 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【标注】 【知识点】向量法解决线面角问题; 向量法解决二面角问题

5. 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.



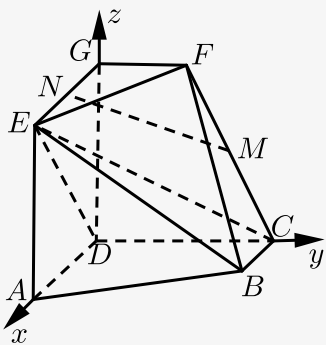
- (1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE .
 (2) 求二面角 $E - BC - F$ 的正弦值.
 (3) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60° , 求线段 DP 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

$$(2) \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【解析】(1) 建立以 D 为原点, 分别以 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DG}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向的空间直角坐标系 (如图),



可得 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,2,0)$, $E(2,0,2)$, $F(0,1,2)$, $G(0,0,2)$, $M\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$, $N(1,0,2)$.

依题意 $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{DE} = (2, 0, 2)$,

设 $\vec{n}_0 = (x, y, z)$ 为平面 CDE 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2y = 0, \\ 2x + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z = -1$, 可得 $\vec{n}_0 = (1, 0, -1)$,

$$\text{又} \overrightarrow{MN} = \left(1, -\frac{3}{2}, 1\right),$$

$$\text{可得} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}_0 = 0,$$

又因为直线 $MN \not\subset$ 平面 CDE ,

所以 $MN \parallel$ 平面 CDE .

(2) 依题意, 可得 $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (1, -2, 2)$, $\overrightarrow{CF} = (0, -1, 2)$.

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BCE 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x = 0, \\ x - 2y + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z = 1$, 可得 $\vec{n} = (0, 1, 1)$.

设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 BCF 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x = 0, \\ -y + 2z = 0, \end{cases}$$

不妨令 $z = 1$, 可得 $\vec{m} = (0, 2, 1)$.

$$\text{因此有} \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{于是} \sin \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

所以，二面角 $E-BC-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

(3) 设线段 DP 的长为 $h(h \in [0, 2])$ ，则点 P 的坐标为 $(0, 0, h)$ ，

可得 $\overrightarrow{BP} = (-1, -2, h)$ ，

易知， $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$ 为平面 $ADGE$ 的一个法向量，

$$\text{故} \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{DC} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{DC}|} = \frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}},$$

由题意，可得 $\frac{2}{\sqrt{h^2 + 5}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 2]$ 。

所以，线段 DP 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

【标注】 【知识点】向量法解决空间中的平行问题；向量法解决二面角问题；向量法求空间距离；直线的方向向量与平面的法向量