

概率

1. 现有10道题，其中6道甲类题，4道乙类题，张同学从中任取3道题解答．

(1) 求张同学至少取到1道乙类题的概率；

(2) 已知所取的3道题中有2道甲类题，1道乙类题．设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立．用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望．

【答案】 (1) $\frac{5}{6}$

(2) X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$E(X) = 2.$$

【解析】 (1) 设事件 A = “张同学所取的3道题至少有1道乙类题”，则有 $\bar{A}$ = “张同学所取的3道题都是甲类题”．

$$\text{因为 } P(\bar{A}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, \text{ 所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{5}{6}.$$

(2) X 所有的可能取值为0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125};$$

$$P(X=1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{1}{5} + C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{125};$$

$$P(X=2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{1}{5} + C_2^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{125};$$

$$P(X=3) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{125}.$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{4}{125} + 1 \times \frac{28}{125} + 2 \times \frac{57}{125} + 3 \times \frac{36}{125} = 2.$$

【标注】 【知识点】 n 次独立重复试验与二项分布；离散型随机变量的数学期望

2. 某区选派7名队员代表本区参加全市青少年围棋锦标赛，其中3名来自A学校且1名为女棋手，另外4名来自B学校且2名为女棋手．从这7名队员中随机选派4名队员参加第一阶段的比赛．
- (1) 求在参加第一阶段比赛的队员中，恰有1名女棋手的概率．
- (2) 设X为选出的4名队员中A、B两校人数之差的绝对值，求随机变量X的分布列和数学期望．

【答案】 (1) $\frac{12}{35}$.

(2) 随机变量X的分布列为

X	0	2	4
P	$\frac{18}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{1}{35}$

随机变量X的数学期望 $E(X) = \frac{36}{35}$.

【解析】 (1) 由题意知，7名队员中分为两部分，3人为女棋手，4人为男棋手，

设事件A“恰有1位女棋手”，则 $P(A) = \frac{C_3^1 C_4^3}{C_7^4} = \frac{12}{35}$,

所以参加第一阶段的比赛的队员中，恰有1位女棋手的概率为 $\frac{12}{35}$.

(2) 随机变量X的所有可能取值为0, 2, 4 ,

其中 $P(X=0) = \frac{C_3^2 C_4^2}{C_7^4} = \frac{18}{35}$,

$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_4^3 + C_3^3 C_4^1}{C_7^4} = \frac{16}{35}$,

$P(X=4) = \frac{C_3^0 C_4^4}{C_7^4} = \frac{1}{35}$,

所以，随机变量X的分布列为

X	0	2	4
P	$\frac{18}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{1}{35}$

随机变量X的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{16}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{36}{35}$.

【标注】 【知识点】超几何分布

3. 已知箱中装有4个白球和5个黑球，且规定：取出一个白球得2分，取出一个黑球得1分．现从该箱中任取（无放回，且每球取到的机会均等）3个球，记随机变量X为取出3球所得分数之和．

- (1) 求 X 的分布列；
- (2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

【答案】 (1) 分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

(2) $\frac{13}{3}$.

【解析】 (1) X 的可能取值有：3 , 4 , 5 , 6 .

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}; P(X=4) = \frac{C_4^1 C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{21}; P(X=5) = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}; P(X=6) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$$

故所求 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

(2) 所求 X 的数学期望为 $E(X) = 3 \times \frac{5}{42} + 4 \times \frac{10}{21} + 5 \times \frac{5}{14} + 6 \times \frac{1}{21} = \frac{13}{3}$.

【标注】 【知识点】超几何分布

4. 为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加．现有来自甲协会的运动员3名，其中种子选手2名；乙协会的运动员5名，其中种子选手3名．从这8名运动员中随机选择4人参加比赛．
- (1) 设事件 A 为“选出的4人中恰有2名种子选手，且这2名种子选手来自同一个协会”，求事件 A 发生的概率；
- (2) 设 X 为选出的4人中种子选手的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

【答案】(1) $\frac{6}{35}$

(2) 分布列见解析, $E(X) = \frac{5}{2}$

【解析】(1) 由题意可知, $P(A) = \frac{C_2^2 C_3^2 + C_3^2 C_2^2}{C_8^4} = \frac{6}{35}$.

(2) 由题意, X 的可能取值为1, 2, 3, 4.

由题意可知, $P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$,

$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$,

$P(X=3) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$,

$P(X=4) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

所以 $E(X) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{5}{2}$.

【标注】 【知识点】 超几何分布

5. 某大学志愿者协会有6名男同学, 4名女同学. 在这10名同学中, 3名同学来自数学学院, 其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这10名同学中随机选取3名同学, 到希望小学进行支教活动(每位同学被选到的可能性相同).

(1) 求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率.

(2) 设 X 为选出的3名同学中女同学的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

【答案】(1) $\frac{49}{60}$.

(2) 随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$
-----	---------------	---------------	----------------	----------------

$$E(X) = \frac{6}{5}.$$

【解析】(1) 设“选出的3名同学来自互不相同的学院”为事件A，则

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^2 + C_3^0 \cdot C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{49}{60}.$$

所以，选出的3名同学来自互不相同学院的概率为 $\frac{49}{60}$.

(2) 随机变量X的所有可能值为0, 1, 2, 3 .

$$P(x=k) = \frac{C_4^k \cdot C_6^{3-k}}{C_{10}^3} (k=0, 1, 2, 3).$$

所以，随机变量X的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布

6. 端午节吃粽子是我国的传统习俗，设一盘中装有10个粽子，其中豆沙粽2个，肉粽3个，白粽5个，这三种粽子的外观完全相同，从中任意选取3个 .

(1) 求三种粽子各取到1个的概率 .

(2) 设X表示取到的豆沙粽个数，求X的分布列与数学期望 .

【答案】(1) $\frac{1}{4}$.

(2) X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(X) = \frac{3}{5}.$$

【解析】(1) 令事件A表示“三种粽子各取到1个”，

$$\text{则由古典概型的概率计算公式有 } P(A) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}.$$

所以三种粽子各取到1个的概率为 $\frac{1}{4}$.

(2) X 的所有可能值为0 , 1 , 2 ,

$$\text{且 } P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15} .$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5} .$$

【标注】 【知识点】超几何分布

7. 为推动乒乓球运动的发展, 某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加, 现有来自甲协会的运动员3名, 其中种子选手2名; 乙协会的运动员5名, 其中种子选手3名, 从这8名运动员中随机选择4人参加比赛 .

(1) 设 A 为事件“选出的4人中恰有2名种子选手, 且这2名种子选手来自同一个协会”, 求事件 A 发生的概率 .

(2) 设 X 为选出的4人中种子选手的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望 .

【答案】 (1) $\frac{6}{35}$.

(2)

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$E(X) = \frac{5}{2} .$$

【解析】 (1) 由已知, $P(A) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^2 + C_3^2 \cdot C_2^2}{C_8^4} = \frac{6}{35}$,

所以事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{35}$.

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为1 , 2 , 3 , 4 ,

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14},$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} = \frac{3}{7},$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14},$$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$E(X) = \frac{5}{2}.$$

【标注】 【知识点】超几何分布

8. 有甲、乙两位同学进入新华书店购买数学课外阅读书籍，经过筛选后，他们都对 A, B, C 三种书籍有购买意向．已知甲同学购买书籍 A, B, C 的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ，乙同学购买书籍 A, B, C 的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ，假设甲、乙是否购买 A, B, C 三种书籍相互独立．
- (1) 求甲同学至少购买2种书籍的概率．
- (2) 设甲、乙同学购买2种书籍的人数为 X ，求 X 的概率分布和数学期望．

【答案】 (1) $\frac{13}{24}$.

(2)

X	0	1	2
P	$\frac{49}{144}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{25}{144}$

$$E(X) = \frac{5}{6}.$$

【解析】 (1) $P = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{24}$.

(2) $X = 0, 1, 2$,

设 D_1, D_2 分别表示甲、乙的2本书，

$$\text{由 (1) } P(D_1) = \frac{13}{24} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12},$$

$$P(D_2) = \frac{2}{3} \cdot C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12},$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X=0) &= \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{49}{144}, \\ P(X=1) &= C_2^1 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{72}, \\ P(X=2) &= \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144},\end{aligned}$$

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{49}{144}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{25}{144}$

$$E(X) = \frac{35}{72} + \frac{25}{72} = \frac{5}{6}.$$

【标注】 【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量的分布列

9. 甲、乙两人各射击一次，击中目标的概率分别是 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$. 假设两人射击是否击中目标，相互之间没有影响；每人各次射击是否击中目标，相互之间也没有影响 .
- (1) 求甲射击4次，至少1次未击中目标的概率 .
- (2) 求两人各射击4次，甲恰好击中目标2次且乙恰好击中目标3次的概率 .
- (3) 假设某人连续2次未击中目标，则停止射击 . 问：乙恰好射击5次后，被中止射击的概率是多少？

【答案】 (1) $\frac{65}{81}$
 (2) $\frac{1}{8}$
 (3) $\frac{45}{1024}$

【解析】 (1) 记“甲连续射击4次，至少1次未击中目标”为事件 A_1 ,

由题意知两人射击是否击中目标，相互之间没有影响，

射击4次，相当于4次独立重复试验，

$$\text{故 } P(A_1) = 1 - P(\bar{A}_1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}.$$

即甲射击4次，至少1次未击中目标的概率为 $\frac{65}{81}$.

(2) 记“甲射击4次，恰好击中目标2次”为事件 A_2 ,

“乙射击4次，恰好击中目标3次”为事件 B_2 ,

$$P(A_2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-2} = \frac{8}{27},$$

$$P(B_2) = C_4^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{4-3} = \frac{27}{64}.$$

由于甲、乙设计相互独立，

$$\text{故 } P(A_2 B_2) = P(A_2) P(B_2) = \frac{8}{27} \cdot \frac{27}{64} = \frac{1}{8}.$$

即两人各射击4次，甲恰好击中目标2次且乙恰好击中目标3次的概率为 $\frac{1}{8}$.

(3) 记“乙恰好射击5次后，被中止射击”为事件 A_3 ,

“乙第 i 次射击为击中”为事件 D_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) , 则 $A_3 = D_5 D_4 \overline{D_3} (\overline{D_2 D_1})$, 且 $P(D_i) = \frac{3}{4}$,

由于各事件相互独立，

$$\text{故 } P(A_3) = P(D_5) P(D_4) P(\overline{D_3}) P(\overline{D_2 D_1}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{45}{1024},$$

即乙恰好射击5次后，被中止射击的概率是 $\frac{45}{1024}$.

【标注】 【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；互斥事件与对立事件；对立事件的概率和为1； n 次独立重复试验与二项分布

10. 某小组共10人，利用假期参加义工活动，已知参加义工活动次数为1, 2, 3的人数分别为3, 3, 4 .

现从这10人中随机选出2人作为该组代表参加座谈会 .

(1) 设 A 为事件“选出的2人参加义工活动次数之和为4”，求事件 A 发生的概率 .

(2) 设 X 为选出的2人参加义工活动次数之差的绝对值，求随机变量 X 的分布列和数学期望 .

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$.

(2) 随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

$$E(X) = 1.$$

【解析】 (1) 由题意知 $P(A) = \frac{C_3^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$.

(2) 随机变量 X 可能取值0, 1, 2 ,

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{15},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1 + C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{15}.$$

随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

随机变量 X 的期望为 $E(X) = \frac{7}{15} + \frac{8}{15} = 1$.

【标注】 【知识点】离散型随机变量的分布列；古典概型的概率计算（涉及计数原理）

11. 一个袋子中装有大小形状完全相同的编号分别为1, 2, 3, 4, 5的5个红球与编号为1, 2, 3, 4的4个白球，从中任意取出3个球．
- （1）求取出的3个球颜色相同且编号是三个连续整数的概率．
 - （2）求取出的3个球中恰有2个球编号相同的概率．
 - （3）记 X 为取出的3个球中编号的最大值，求 X 的分布列与数学期望．

【答案】（1）取出的3个球的编号恰好是3个连续的整数，且颜色相同的概率为 $\frac{5}{84}$ ．

（2）取出的3个球中恰有两个球编号相同的概率为 $\frac{1}{3}$ ．

（3） X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

数学期望 $EX = \frac{85}{21}$ ．

【解析】（1）设“取出的3个球颜色相同且编号是三个连续整数”为事件 A ，则

$$P(A) = \frac{3+2}{C_9^3} = \frac{5}{84}.$$

答：取出的3个球的编号恰好是3个连续的整数，且颜色相同的概率为 $\frac{5}{84}$ ．

（2）设“取出的3个球中恰有两个球编号相同”为事件 B ，则

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_7^1}{C_9^3} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}.$$

答：取出的3个球中恰有两个球编号相同的概率为 $\frac{1}{3}$ 。

(3) X 的取值为23, 45。

$$P(X=2) = \frac{C_2^1 C_2^2 + C_2^2 C_2^1}{C_9^3} = \frac{1}{21}, \quad P(X=3) = \frac{C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_9^3} = \frac{4}{21},$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^1 C_6^2 + C_2^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{7}, \quad P(X=5) = \frac{C_1^1 C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3}.$$

所以 X 的分布列为：

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

$$X \text{ 的数学期望 } EX = 2 \times \frac{1}{21} + 3 \times \frac{4}{21} + 4 \times \frac{3}{7} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{85}{21}.$$

【标注】 【知识点】超几何分布

12. 某校设计了一个实验考察方案：考生从6道备选题中随机抽取3道题，按照题目要求独立完成全部实验操作，规定：至少正确完成其中的2道题便可通过，已知6道备选题中考生甲有4道能正确完成，2道题不能完成；考生乙每题正确完成的概率都是 $\frac{2}{3}$ ，且每题正确完成与否互不影响。

(1) 求甲、乙两考生正确完成题数的概率分布列和甲、乙两考生的数学期望。

(2) 请分析比较甲、乙两考生的实验操作能力。

【答案】(1) X, Y 的分布列和数学期望分别为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = 2,$$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(Y) = 2.$$

(2) 甲能力强。

【解析】(1) 设甲、乙各能完成 X, Y 道，

$$X = 1, 2, 3;$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

$$Y = 0, 1, 2, 3,$$

$$P(Y=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(Y=1) = C_3^1 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(Y=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(Y=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$\therefore X, Y$ 的分布列和数学期望分别为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = 2,$$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$E(Y) = \frac{2}{9} + \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = 2.$$

(2) ① $E(X) = E(Y)$ ，水平相当，

$$② D(X) = \frac{2}{5}, D(Y) = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > D(X), \therefore \text{甲更稳定},$$

$$③ P(X \geq 2) = \frac{4}{5} = \frac{20}{25}, P(Y \geq 2) = \frac{20}{27} < P(X \geq 2), \therefore \text{甲更易通过},$$

综上，甲能力强。

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

13. 一个袋子中有 k 个红球，4 个绿球，2 个黄球，这些球除颜色外其他完全相同。从中一次随机取出 2 个球，每取得 1 个红球记 1 分、取得 1 个绿球记 2 分、取得 1 个黄球记 5 分，用随机变量 X 表示取到 2 个球的总得分，已知总得分是 2 分的概率为 $\frac{1}{12}$ 。

(1) 求袋子中红球的个数。

(2) 求 X 的分布列和数学期望。

【答案】(1) 3个红球.

(2) X 的分布列为:

X	2	3	4	6	7	10
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = \frac{14}{3}.$$

【解析】(1) 当取到的2个球都是红球时, 总得分是2分,

$$\text{即 } P(X=2) = \frac{C_k^2}{C_{k+6}^2} = \frac{1}{12},$$

化简得 $11k^2 - 23k - 30 = 0$, 即 $(k-3)(11k+10) = 0$,

解得 $k=3$ 或 $k=-\frac{10}{11}$ (舍去).

故袋子中有3个红球.

(2) 依题意, X 的所有可能取值为2, 3, 4, 6, 7, 10.

$$P(X=2) = \frac{1}{12},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_9^2} = \frac{3 \times 4}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=6) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_9^2} = \frac{3 \times 2}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=7) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_9^2} = \frac{4 \times 2}{36} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=10) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}.$$

$\therefore X$ 的分布列为:

X	2	3	4	6	7	10
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{2}{9} + 10 \times \frac{1}{36} = \frac{14}{3}.$$

【标注】【知识点】超几何分布

14. 某小组共10人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为1, 2, 3的人数分别为3, 3, 4.

现从这10人中随机选出2人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设 A 为事件“选出的2人参加义工活动次数之和为4”, 求事件 A 发生的概率.

(2) 设 X 为选出的2人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$.

(2) 1 .

【解析】(1) 由已知, 有 $P(A) = \frac{C_3^1 C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}$. 所以, 事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{3}$.

(2) 随机变量 X 的所以可能取值为 0, 1, 2 .

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_3^2 + C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{4}{15} ,$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1 + C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{15} .$$

所以, 随机变量 x 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

随机变量 x 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{4}{15} = 1$.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的分布列；超几何分布；离散型随机变量的数学期望

15. 端午节吃粽子是我国的传统习俗, 设一盘中装有 9 个粽子, 其中豆沙粽 2 个, 枣粽 3 个, 白粽 4 个, 这三种粽子的外观完全相同, 从中任意选取 3 个 .

(1) 设 A 为事件“三种粽子各取到 1 个”, 求事件 A 发生的概率 .

(2) 设随机变量 x 表示取到的枣粽个数, 求 x 的分布列与数学期望 .

【答案】(1) $\frac{2}{7}$.

(2) 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$$EX = 1.$$

【解析】(1) 令 A 表示事件“三种粽子各取到1个”，则由古典概型的概率公式有：

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1}{C_9^3} = \frac{2}{7}.$$

(2) 随机变量 X 的取值为 0, 1, 2, 3 个，则

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_6^1}{C_9^3} = \frac{3}{14},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84},$$

∴ 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$$EX = 0 \times \frac{5}{21} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{14} + 3 \times \frac{1}{84} = 1.$$

【标注】 【知识点】 古典概型的概率计算（涉及计数原理）；离散型随机变量的分布列

16. 玉山一中篮球体育测试要求学生完成“立定投篮”和“三步上篮”两项测试，“立定投篮”和“三步上篮”各有2次投篮机会，先进行“立定投篮”测试，如果合格才能参加“三步上篮”测试．为了节约时间，每项测试只需且必须投中一次即为合格．小华同学“立定投篮”的命中率为 $\frac{1}{2}$ ，“三步上篮”的命中率为 $\frac{2}{3}$ ．假设小华不放弃任何一次投篮机会且每次投篮是否命中相互独立．

(1) 求小华同学两项测试均合格的概率．

(2) 设测试过程中小华投篮次数为 x ，求随机变量 x 的分布列和数学期望．

【答案】(1) $\frac{2}{3}$ ．

(2) 分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

$$\text{数学期望 } E(X) = \frac{5}{2}.$$

【解析】(1) 小华同学“立定投篮”合格的概率为 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$,

$$\text{“三步上篮”合格的概率为 } 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9},$$

$$\text{则小华同学两项测试均合格的概率为 } \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}.$$

(2) 由题意, 随机变量 X 所有可能取值为 2, 3, 4,

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{12},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

其分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

$$\text{数学期望 } E(X) = 2 \times \frac{7}{12} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} = \frac{5}{2}.$$

【标注】【知识点】相互独立事件的概率乘法公式；离散型随机变量的数学期望；离散型随机变量的分布列

17. 某工厂有甲乙两个车间, 每个车间各有3台机器. 甲车间每台机器每天发生故障的概率均为 $\frac{1}{3}$, 乙车间3台机器每天发生概率分别为 $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$. 若一天内同一车间的机器都不发生故障可获利2万元, 恰有一台机器发生故障仍可获利1万元, 恰有两台机器发生故障的利润为0万元, 三台机器发生故障要亏损3万元.

(1) 求乙车间每天机器发生故障的台数的分布列.

(2) 由于节能减排, 甲乙两个车间必须停产一个, 以工厂获得利润的期望值为决策依据, 你认为哪个车间停产比较合理.

【答案】(1) 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{25}{72}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{1}{72}$

(2) 甲.

【解析】(1) 设台数为 X , $\therefore X = 0, 1, 2, 3$.

$$P(X=0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{72},$$

$$P(X=1) = C_2^1 \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{72},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + C_2^1 \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{72},$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{72},$$

$\therefore$ 其分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{25}{72}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{1}{72}$

(2) 设甲、乙每天获利分别为 ξ, η (万元),

由(1) η 的分布列为：

η	-3	0	1	2
P	$\frac{1}{72}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{25}{72}$

$$\therefore E(\eta) = \frac{-3}{72} + 0 + \frac{35}{72} + \frac{50}{72} = \frac{41}{36},$$

又 $\xi = -3, 0, 1, 2$,

$$P(\xi = -3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(\xi = 0) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9},$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(\xi = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	-3	0	1	2
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$\text{期望 } E(\xi) = -\frac{3}{27} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} = \frac{25}{27},$$

$$\therefore E(\xi) < E(\eta),$$

$\therefore$ 甲停产合理.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的分布列；n次独立重复试验与二项分布

一个盒子里装有7张卡片，其中有红色卡片4张，编号分别为1, 2, 3, 4；白色卡片3张，编号分别为2, 3, 4. 从盒子中任取4张卡片（假设取到任何一张卡片的可能性相同）.

(1) 求取出的4张卡片中，含有编号为3的卡片的概率.

(2) 在取出的4张卡片中，红色卡片编号的最大值设为 X ，求随机变量 X 的分布列.

【答案】 (1) $\frac{6}{7}$.

(2) 分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

【解析】 (1) $P = \frac{C_2^1 C_5^3 + C_2^2 C_5^2}{C_7^4} = \frac{6}{7}$.

(2) X 可能取1, 2, 3, 4.

$$P(X=1) = \frac{C_3^3}{C_7^4} = \frac{1}{35}.$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}.$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_7^4} = \frac{2}{7}.$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^3}{C_7^4} = \frac{4}{7}.$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

【标注】 【知识点】古典概型的概率计算（涉及计数原理）；离散型随机变量的分布列

19. 一盒中装有9张各写有一个数字的卡片，其中4张卡片上的数字是1，3张卡片上的数字是2，2张卡片上的数字是3，从盒中任取3张卡片.

(1) 求所取3张卡片上的数字完全相同的概率；

(2) X 表示所取3张卡片上的数字的中位数，求 X 的分布列与数学期望.

（注：若三个数 a, b, c 满足 $a \leq b \leq c$ 则称 b 为这三个数的中位数）.

【答案】(1) $\frac{5}{84}$

(2) 答案见解析

【解析】(1) 由古典概型中的概率计算公式知所求概率为 $P = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$.

(2) X 的所有可能值为 1, 2, 3, 且

$$P(X=1) = \frac{C_4^2 C_5^1 + C_4^3}{C_9^3} = \frac{17}{42}, \quad P(X=2) = \frac{C_3^1 C_4^1 C_2^1 + C_3^2 C_6^1 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{43}{84},$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^2 C_7^1}{C_9^3} = \frac{1}{12}.$$

故 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{17}{42}$	$\frac{43}{84}$	$\frac{1}{12}$

$$\text{从而 } E(X) = 1 \times \frac{17}{42} + 2 \times \frac{43}{84} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{47}{28}.$$

【标注】【知识点】离散型随机变量的数学期望；超几何分布

20. 已知某校有歌唱和舞蹈两个兴趣小组，其中歌唱组有 4 名男生，1 名女生，舞蹈组有 2 名男生，2 名女生，学校计划从两兴趣小组中各选 2 名同学参加演出。

(1) 求选出的 4 名同学中至多有 2 名女生的选派方法数。

(2) 记 X 为选出的 4 名同学中女生的人数，求 X 的分布列和数学期望。

【答案】(1) 56 种。

(2) 分布列为：

--	--	--	--	--

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{15}$

期望 $E(X) = \frac{7}{5}$.

【解析】(1) ①2名女生： $(C_4^1 \cdot C_1^1)(C_2^1 \cdot C_2^1) + C_4^2 \cdot C_2^2 = 22$,

②1名女生： $(C_4^1 \cdot C_1^1) \cdot C_2^2 + C_4^2 \cdot (C_2^1 \cdot C_2^1) = 28$,

③0名女生： $C_4^2 \cdot C_2^2 = 6$,

$\therefore$ 共 $22 + 28 + 6 = 56$ 种 .

(2) $X = 0, 1, 2, 3$,

$$P(X=0) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_4^2} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} ,$$

$$P(X=1) = \frac{28}{C_5^2 \cdot C_4^2} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} ,$$

$$P(X=2) = \frac{22}{C_5^2 \cdot C_4^2} = \frac{22}{60} = \frac{11}{30} ,$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^1}{C_5^2 \cdot C_4^2} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15} ,$$

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{15}$

期望 $E(X) = 0 + \frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{5}$.

【标注】 【知识点】 离散型随机变量的数学期望；组合；加法原理与乘法原理的综合运用