

构造函数

1. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是().
- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

由题意知, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

$\because f(x)$ 是奇函数, $f(-1) = 0$,

$\therefore f(1) = -f(-1) = 0$,

$\therefore g(1) = \frac{f(1)}{1} = 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0$, 从而 $f(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 从而 $f(x) < 0$.

又 $\because g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$,

$\therefore g(x)$ 是偶函数,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g(x) < 0$, 从而 $f(x) > 0$;

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g(x) > 0$, 从而 $f(x) < 0$.

综上, 所求 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

【标注】 【知识点】 幂函数型导数构造

2. 已知函数 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 且 $(x+1)f(x) + xf'(x) \geq 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 则下列不等式一定成立的是().
- A. $f(1) < 2ef(2)$ B. $ef(1) < f(2)$ C. $f(1) < 0$ D. $ef(e) < 2f(2)$

【答案】 A

【解析】 由 $(x+1)f(x) + xf'(x) \geq 0$ 得 $(x+1)e^x f(x) + xe^x f'(x) \geq 0$,

$\therefore [xe^x f(x)]' \geq 0$,

设 $F(x) = xe^x f(x)$,

$\therefore F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增,

$$\therefore F(0) < F(1) < F(2),$$

$$\therefore 0 < ef(1) < 2e^2f(2),$$

$$\therefore 0 < f(1) < 2ef(2).$$

故选A.

【标注】【素养】数学运算；逻辑推理

【知识点】用单调性比较大小；幂函数型导数构造

3. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的可导函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f(x) > f'(x)$, 且 $f(0) = 1$, 则不等式 $\frac{f(x)}{e^x} < 1$ 的解集为().

A. $(-\infty, 0)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(-\infty, 2)$

D. $(2, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 设 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,
 则 $F'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

$$\therefore f(x) > f'(x),$$

$$\therefore F'(x) < 0, \text{ 即函数 } F(x) \text{ 在定义域上单调递减.}$$

$$\therefore f(0) = 1,$$

$$\therefore \text{不等式 } \frac{f(x)}{e^x} < 1 \text{ 等价于 } F(x) < F(0),$$

$$\text{解得 } x > 0,$$

$$\text{故不等式的解集为 } (0, +\infty).$$

故选B.

【标注】【知识点】指对型导数构造；利用函数单调性解不等式

4. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 内的可导函数, 且满足: $f(x) > 0$, $xf'(x) - f(x) > 0$, 对于任意的正实数 a , b , 若 $a > b$, 则有().

A. $bf(a) > af(b)$

B. $af(a) < bf(b)$

C. $af(a) \leq bf(b)$

D. $bf(a) < af(b)$

【答案】 A

【解析】 令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$,

$$\therefore f(x) \text{ 是定义在 } (0, +\infty) \text{ 上的可导函数,}$$

$$\text{且满足 } xf'(x) - f(x) > 0,$$

$$\therefore g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $a > b > 0$,

$$\therefore g(a) > g(b),$$

$$\therefore \frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b},$$

$$\therefore a > b > 0,$$

$$\therefore bf(a) > af(b).$$

故选A.

【标注】 【知识点】幂函数型导数构造

5. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $f(x) = f(-x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 2x$, 则关于 x 的不等式 $f(2-x) - f(x) > 4 - 4x$ 的解集为 ().

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-1, 1)$

【答案】 C

【解析】 当 $x > 0$ 时, $f'(x) - 2x > 0 \Rightarrow (f(x) - x^2)' > 0$, 令 $g(x) = f(x) - x^2$,

则函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $g(-x) = f(-x) - (-x)^2 = f(x) - x^2 = g(x)$, 故 $g(x)$ 为偶函数,

则 $f(2-x) - f(x) > 4 - 4x$, 即 $f(2-x) - (2-x)^2 > f(x) - x^2$, 即 $g(2-x) > g(x)$,

所以 $|2-x| > |x|$, 解得 $x < 1$.

故选C.

【标注】 【知识点】幂函数型导数构造; 利用函数单调性解不等式

6. 若 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$, 且满足 $f'(x) < f(x)$, 则 $f(3)$ 与 $e^3 f(0)$ 的大小关系是 ().

- A. $f(3) < e^3 f(0)$ B. $f(3) = e^3 f(0)$ C. $f(3) > e^3 f(0)$ D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

则由已知可得 $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$

所以 $g(x)$ 为减函数, 则 $g(0) > g(3)$, 即 $f(0) > \frac{f(3)}{e^3}$ 则选A.

【标注】 【知识点】指对型导数构造

7. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $f'(x) < f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，则下列不等式均成立的是（ ）.
- A. $f(\ln 2) < 2f(0)$ ， $f(2) < e^2 f(0)$ B. $f(\ln 2) > 2f(0)$ ， $f(2) > e^2 f(0)$
- C. $f(\ln 2) < 2f(0)$ ， $f(2) > e^2 f(0)$ D. $f(\ln 2) > 2f(0)$ ， $f(2) < e^2 f(0)$

【答案】 A

【解析】 令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$ ，

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减，

而 $\ln 2 > 0$ ， $2 > 0$ ，故 $g(\ln 2) < g(0)$ ， $g(2) < g(0)$ ，

即 $\frac{f(\ln 2)}{2} < \frac{f(0)}{1}$ ， $\frac{f(2)}{e^2} < \frac{f(0)}{1}$ ，

即 $f(\ln 2) < 2f(0)$ ， $f(2) < e^2 f(0)$ 。

【标注】 【知识点】指对型导数构造；用单调性比较大小

【素养】 逻辑推理；数学运算；数学抽象

【方法】 构造法

8. 已知可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ， $f(0) = 2018$ ，若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) > f'(x)$ ，则不等式 $f(x) < 2018e^x$ 的解集为（ ）.
- A. $(0, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{e^2}\right)$ D. $(-\infty, 0)$

【答案】 A

【解析】 根据题意，设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，其导数 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ，

又由对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) > f'(x)$ ，

则有 $g'(x) < 0$ ，则函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，

又由 $f(0) = 2018$ ，得 $g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 2018$ ，

$f(x) < 2018e^x \Rightarrow \frac{f(x)}{e^x} < 2018 \Rightarrow g(x) < g(0)$ ，

又由函数 $g(x)$ 为减函数，则有 $x > 0$ ，

即不等式的解集为 $(0, +\infty)$ 。

故选A。

【标注】 【知识点】指对型导数构造；直接求函数的单调性（不含参）；利用函数单调性解不等式

9.

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是().

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)$ 的导数为: $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时总有 $xf'(x) - f(x) < 0$ 成立,

即当 $x > 0$ 时, $g'(x)$ 恒小于0,

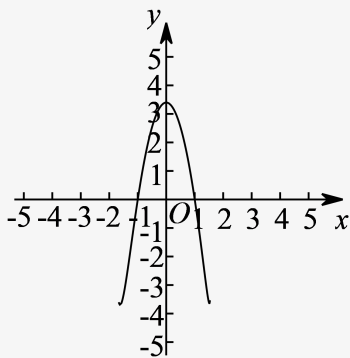
$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 为减函数,

又 $\because g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数,

又 $\because g(-1) = \frac{f(-1)}{-1}$,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的图象性质类似如图:



数形结合可得, 不等式 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot g(x) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ 或 } x < -1.$$

故选A.

【标注】 【知识点】 幂函数型导数构造

10. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $xf'(x) + 2f(x) = \frac{e^x}{x}$, 且 $f(1) = e$, 已知 $a = (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}$, $b = \ln \frac{3}{2}$, $c = \sin \frac{2}{3}$, 则().

- A. $f(c) < f(a) < f(b)$ B. $f(a) < f(b) < f(c)$ C. $f(b) < f(a) < f(c)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$

【答案】 A

【解析】 $\because xf'(x) + 2f(x) = \frac{e^x}{x}$,

$$\therefore x^2 f'(x) + 2xf(x) = e^x ,$$

$$\therefore [x^2 f(x)]' = e^x ,$$

$$\therefore x^2 f(x) = e^x + c \text{ (} c \text{ 为常数) ,}$$

$$\text{又} \because f(1) = e ,$$

$$\therefore f(1) = e + c \Rightarrow e = e + c ,$$

$$\therefore c = 0 ,$$

$$\therefore x^2 f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2} ,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3} ,$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

接下来比较 a, b, c 的大小,

$$a = (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} = (\sqrt{8})^{-\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} ,$$

$$b = \ln \frac{3}{2} < \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \text{ 且 } \ln \frac{3}{2} > 0 ,$$

$$\therefore 0 < b < \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore c = \sin \frac{2}{3} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ 且 } \sin \frac{2}{3} < 1 ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} < c < 1 ,$$

$$\therefore b < a < c ,$$

又因为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$$\therefore f(c) < f(a) < f(b) .$$

故选 A .

【标注】 【知识点】用单调性比较大小；指对型导数构造

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$. 若 $f(x) + f'(x) < 1$, $f(0) = 2015$, 则不等式

$e^x f(x) - e^x > 2014$ (其中 e 为自然对数的底数) 的解集为 () .

A. $(2014, 2015)$

B. $(-\infty, 0) \cup (2015, +\infty)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】 D

【解析】 构造函数 $F(x) = e^x f(x) - e^x$,

则 $F'(x) = (f'(x) + f(x) - 1)e^x$.

由题意得, 函数 $F(x) = e^x f(x) - e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

所以 $e^x f(x) - e^x > 2014$,

即 $F(x) > F(0)$, 解得 $x < 0$,

因此 $e^x f(x) - e^x > 2014$ 的解集是 $(-\infty, 0)$.

故选D.

【标注】 【知识点】 指对型导数构造

12. 设定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - f(x) = x \ln x$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, 则 $f(x)$ ().
- A. 有极大值, 无极小值
B. 有极小值, 无极大值
C. 既有极大值, 又有极小值
D. 既无极大值, 也无极小值

【答案】 D

【解析】 $\because xf'(x) - f(x) = x \ln x$,

$$\therefore \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{\ln x}{x},$$

$$\therefore \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{\ln x}{x},$$

$$\text{而} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]' = \frac{\ln x}{x},$$

$$\therefore \frac{f(x)}{x} = \frac{(\ln x)^2}{2} + c,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{2} + cx,$$

$$\text{由} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}, \text{解得} c = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{2} + \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2 \geq 0,$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

故函数 $f(x)$ 无极值.

故选D.

【标注】 【知识点】 直接求函数的极值 (不含参); 指对型导数构造

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(2) = 0$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) + xf'(x) < 0$, 则不等式 $xf(x) > 0$ 的解集是 _____.

【答案】 $\{x|x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2\}$

【解析】 设 $g(x) = x \cdot f(x)$,

$$\therefore g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x),$$

$$\therefore \text{当} x < 0 \text{ 时}, f(x) + x \cdot f'(x) < 0,$$

即 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单减,

$\therefore f(x)$ 是偶函数,

$\therefore g(x) = x \cdot f(x)$ 是奇函数,

$\therefore f(2) = 0$ 且 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调,

$\therefore g(2) = g(-2) = 0, g(0) = 0,$

$\therefore g(x) = x \cdot f(x) > 0$ 的解集为: $\{x | x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 2\}.$

【标注】 【素养】数学抽象; 数学运算

【知识点】 利用导数求单调性证不等式; 直接求函数的单调性(不含参); 幂函数型导数构造

14. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x}f(x)$, 则使得 $(x^2 - 4)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ().
- A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

【答案】 D

【解析】 设函数 $g(x) = f(x) \ln x$, 则 $g'(x) = f'(x) \ln x + \frac{1}{x}f(x)$. 于是, 当 $x > 0$ 时, 由 $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x}f(x)$ 可得 $g'(x) < 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 从而, 当 $x > 1$ 时, 有 $g(x) < g(1) = 0$, 即 $f(x) \ln x < 0$, 又 $\ln x > 0$, 所以此时 $f(x) < 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, 有 $g(x) > g(1) = 0$, 即 $f(x) \ln x > 0$, 又 $\ln x < 0$, 所以此时 $f(x) < 0$. 在题设不等式中取 $x = 1$ 可得 $f'(1) \ln 1 < -\frac{1}{1}f(1)$, 化简得 $f(1) < 0$, 即当 $x = 1$ 时, $f(x) < 0$ 于是, 由上述讨论可知: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 故由 $(x^2 - 4)f(x) > 0$ 得 $x^2 - 4 < 0$, 结合 $x > 0$, 解得 $0 < x < 2$; 当 $x < 0$ 时, 由 $f(x)$ 为奇函数及当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 可得 $f(x) > 0$, 故由 $(x^2 - 4)f(x) > 0$ 得 $x^2 - 4 > 0$, 结合 $x < 0$, 解得 $x < -2$. 易知 $f(0) = 0$, 所以 $x = 0$ 不满足 $(x^2 - 4)f(x) > 0$. 综上, x 的取值范围是 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. 故选 D.

【标注】 【知识点】指对型导数构造

15. 已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上非负可导, 且满足 $xf'(x) + f(x) \leq 0$ 若对任意正数 m, n , 若 $m < n$, 则必有 ().
- A. $nf(m) \leq mf(n)$ B. $mf(m) \leq nf(n)$ C. $nf(n) \leq mf(m)$ D. $mf(n) \leq nf(m)$

【答案】 C

【解析】 令 $g(x) = xf(x)$, 则 $g'(x) = [xf(x)]' = xf'(x) + f(x) \leq 0$,

所以函数 $g(x) = xf(x)$ 为单调递减函数或常函数，

因为 $m < n$ ，所以 $mf(m) \geq nf(n)$ ，

故选：C．

【标注】 【知识点】用单调性比较大小；幂函数型导数构造