

放缩练习

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$, $a_1 = 2$, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 证明: $a_n > 1$.

(2) 证明: $\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_3^2}{9} + \cdots + \frac{a_n^2}{n^2} < \frac{9}{5}$ ($n \geq 2$).

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由题意得 $(n+1)a_{n+1}^2 - (n+1) = na_n^2 + (-n) + a_n - 1$,

$$\therefore (n+1)(a_{n+1}+1)(a_{n+1}-1) = (a_n-1)(na_n+n+1),$$

又 $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\therefore (n+1)(a_{n+1}+1) > 0, na_n+n+1 > 0,$$

$\therefore a_{n+1}-1$ 与 a_n-1 同号,

$$\because a_1-1=1>0,$$

$$\therefore a_n > 1.$$

(2) 由(1)知, $(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n < (n+1)a_n^2$,

$$\therefore a_{n+1} < a_n, 1 < a_n \leq 2,$$

又由题意可得 $a_n = (n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2$,

$$\therefore a_1 = 2a_2^2 - a_1^2, a_2 = 3a_3^2 - 2a_2^2, \cdots, a_n = (n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2,$$

相加可得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n+1)a_{n+1}^2 - 4 \leq 2n$,

$$\therefore a_{n+1}^2 \leq \frac{2n+4}{n+1}, \text{ 即 } a_n^2 \leq \frac{2n+2}{n}, n \geq 2,$$

$$\therefore \frac{a_n^2}{n^2} \leq 2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) \leq 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right), n \geq 2,$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{a_2^2}{2^2} \leq \frac{3}{4} < \frac{9}{5},$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_3^2}{9} \leq \frac{3}{4} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} < \frac{3}{4} + \frac{1}{3} < \frac{9}{5},$$

$$\text{当 } n \geq 4 \text{ 时, } \frac{a_2^2}{4} + \frac{a_3^2}{9} + \cdots + \frac{a_n^2}{n^2} < 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{27} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{27} + \frac{1}{12} < \frac{9}{5},$$

从而，原命题得证．

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式

2. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ．已知 $a_1 = 1$ ， $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ．

(1) 求 a_2 的值．

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

(3) 证明：对一切正整数 n ，有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$ ．

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

(3) 见解析

【解析】 (1) 方法一：由题设知

$$\begin{aligned} 2S_n &= na_{n+1} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n \\ &= na_{n+1} - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

令 $n = 1$ ，解得 $a_2 = 4$ ．

方法二：当 $n = 1$ 时， $2S_1 = a_2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3}$ ， $\therefore a_2 = 2a_1 + 2 = 4$ ．

(2) 由(1)知，当 $n \geq 2$ 时，有 $2S_n = na_{n+1} - \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ ①，

$$2S_{n-1} = (n-1)a_n - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$
②，

①-②，并整理得 $na_{n+1} - (n+1)a_n = n(n+1)$ ，即 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1 (n \geq 2)$ ．

又 $\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1$ ，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为1，公差为1的等差数列．

于是得 $a_n = n^2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ．

(3) 证明：当 $n \geq 2$ 时， $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ．

对不小于3的一切正整数 n ，都有

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned}
 &< 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4}.
 \end{aligned}$$

又 $\frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4}$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4}$, 所以, 对一切正整数 n , 都有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

可以利用定积分的几何意义——曲边梯形的面积由矩形面积逼近来证明

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2^2} + \int_2^n \frac{1}{x^2} dx = \frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_2^n = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4}$$

【标注】 【知识点】裂项相消法求和；观察数列的项求通项公式；构造数列求通项

3. 求证： $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{5}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$.

【答案】 证明见解析.

【解析】 方法一：由 $\frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{4n(n-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$,

则 $n \geq 2$ 时, 原式

$$\begin{aligned}
 &< 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{5}{4},
 \end{aligned}$$

$n=1$ 时, 显然成立.

方法二： $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned}
 \because \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{1}{4n^2 - 4n + 1} < \frac{1}{4n^2 - 4n} = \frac{1}{4n(n-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right), \\
 \therefore 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} &< 1 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

【标注】 【素养】数学运算

【知识点】 放缩法；不等式的性质

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{2a_1-5} + \frac{2}{2a_2-5} + \frac{3}{2a_3-5} + \cdots + \frac{n}{2a_n-5} = \frac{n}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\frac{1}{22} \leq T_n < \frac{1}{6}$.

【答案】 (1) $a_n = \frac{3n+5}{2}$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\frac{1}{2a_1-5} + \frac{2}{2a_2-5} + \frac{3}{2a_3-5} + \cdots + \frac{n}{2a_n-5} = \frac{n}{3}$, ①

当 $n=1$ 时, $a_1=4$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{2a_1-5} + \frac{2}{2a_2-5} + \frac{3}{2a_3-5} + \cdots + \frac{n-1}{2a_{n-1}-5} = \frac{n-1}{3}$, ②

由①-②, 得 $a_n = \frac{3n+5}{2}$ ($n \geq 2$),

因为 $a_1=4$ 符合上式, 所以 $a_n = \frac{3n+5}{2}$.

(2) 证明: $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{4}{(3n+5)(3n+8)} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+8} \right)$,

$$T_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{4}{3} \times \left[\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+8} \right) \right]$$

$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3n+8} \right),$$

因为 $0 < \frac{1}{3n+8} \leq \frac{1}{11}$,

所以 $\frac{1}{22} \leq T_n < \frac{1}{6}$.

【标注】 【知识点】裂项相消法求和

5. 已知 $a_n = \frac{n}{2}$, $b_n = n^2$, 设 $c_n = \frac{1}{a_n + b_n}$, 求证: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{4}{3}$.

【答案】证明见解析 .

【解析】

$$c_n = \frac{2}{2n^2 + n} = \frac{2}{n(2n+1)} = \frac{4}{2n(2n+1)} < \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

,

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < \frac{2}{3} + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{2n+1} < \frac{4}{3}$$

.

故不等式得证 .

【标注】 【知识点】 数列的函数特性；数列与不等式综合

6. 求证： $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

【答案】证明见解析 .

【解析】构造等比数列 $\{a_n\}$,

有 $\frac{p}{1-q} = 2$, 令 $q = \frac{1}{2}$,

则 $p = 1$, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

只需证 $\frac{1}{2^n - 1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

【标注】 【知识点】 数列与不等式综合；不等式的性质

7. 求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{29}{24}$.

【答案】 证明见解析 .

【解析】 因为 $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)} \right] (k \geq 2)$,

所以

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{29}{24}$$

. 故不等式得证 .

【标注】 【知识点】 放缩法 ; 数列与不等式综合 ; 数列的函数特性

8. 求证 : $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{3}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$

【答案】 由 $\frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{(2n-1)(2n-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right)$

则 $n \geq 2$, 原式

$$\begin{aligned} &< 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right) < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$n = 1$, 显然成立 .

【解析】 略

【标注】 【素养】 逻辑推理

【知识点】 不等式的性质

9. 证明 : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k - 1} < \frac{5}{3}$.

【答案】证明见解析.

【解析】证明： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k - 1} < \frac{5}{3}$.

令 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ ，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2^n - 1}{2^n - \frac{1}{2}} \right) < \frac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n$ ，又因为 $a_1 = 1$ ， $a_2 = \frac{1}{3}$ ，由于不等式右边分母为3，因此从第三项开始放缩，得

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &< a_1 + a_2 + \frac{1}{2}a_2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} a_2 \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

故不等式得证.

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $2S_n = (n+2)a_n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{1}{4a_n^2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $T_n < 1$.

【答案】(1) $a_n = \frac{n+1}{2}$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 因为 $2S_n = (n+2)a_n - 1$ ，①

所以当 $n=1$ 时， $2S_1 = 3a_1 - 1$ ，得 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} = (n+1)a_{n-1} - 1$ ，②

$$\textcircled{1}-\textcircled{2}\text{得}, 2a_n = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1},$$

$$\text{即} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n},$$

$$\text{所以} a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

$$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{且} a_1 = 1 \text{符合上式, 故} a_n = \frac{n+1}{2}.$$

$$(2) b_n = \frac{1}{4a_n^2} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以} T_n < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

【标注】 【知识点】裂项相消法求和；利用累乘法求数列通项公式问题

11. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{10} = 100$, 数列 $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}$ 的前5项和为9.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , $b_n = \frac{a_n + 3}{n^2 \cdot (n+2)^2}$, 求证 $T_n < \frac{5}{8}$.

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}_+)$.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because$ 数列 $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}$ 的前5项和为9,

$$\therefore a_5 = 9,$$

$$\therefore S_{10} = 5(a_5 + a_6) = 100,$$

$$\therefore a_6 = 11,$$

$$\therefore d = 2, a_1 = 1,$$

$$\therefore a_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}_+).$$

$$(2) \because b_n = \frac{a_n + 3}{n^2 \cdot (n+2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2n+2}{n^2 \cdot (n+2)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{4n+4}{n^2 \cdot (n+2)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right], \\
\therefore T_n &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right] \\
&< \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式；等差数列求通项问题；裂项相消法求和

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列，其前8项和为64。 $\{b_n\}$ 是公比大于0的等比数列， $b_1 = 4$ ，

$$b_3 - b_2 = 48.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

① 求证： $\{c_n^2 - c_{2n}\}$ 为等比数列。

② 证明： $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2}$ ， $k \in \mathbf{N}^*$ 。

【答案】 (1) $a_n = 2n - 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ； $b_n = 4^n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(2) ① 证明见解析。

② 证明见解析。

【解析】 (1) 由题意知， $S_8 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4(2a_1 + 7d) = 8a_1 + 56 = 64$ ，

解得： $a_1 = 1$ ，

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$\therefore b_3 - b_2 = b_1(q^2 - q) = 4(q^2 - q) = 48,$$

$$\therefore q^2 - q - 12 = 0, \text{ 故 } q = 4 \text{ 或 } -3 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore b_n = a_1 q^{n-1} = 4^n, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \textcircled{1} c_n = 4^{2n} + \frac{1}{4^n},$$

$$\text{则 } c_n^2 - c_{2n} = \left(4^{2n} + \frac{1}{4^n}\right)^2 - \left(4^{4n} + \frac{1}{4^{2n}}\right) = 2 \times 4^n,$$

$$\therefore \frac{c_{n+1}^2 - c_{2(n+1)}}{c_n^2 - c_{2n}} = \frac{2 \times 4^{n+1}}{2 \times 4^n} = 4,$$

$$\text{则 } c_1^2 - c_2 = \left(4^2 + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(4^4 + \frac{1}{4^2}\right) = 8,$$

$\therefore \{c_n^2 - c_{2n}\}$ 是以 8 为首项, 4 为公比的等比数列.

$$\textcircled{2} \text{ 由 (1) 知 } c_n^2 - c_{2n} = 2 \times 4^n,$$

$$\text{即证 } \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{(2k-1)(2k+1)}{2 \times 4^k}} < 2\sqrt{2}, k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{即证 } \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < 4, k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < \sqrt{\frac{4k^2}{4^k}} = \frac{2k}{2^k} = \frac{k}{2^{k-1}},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\text{令 } S_n = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} \textcircled{1}$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{2} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n},$$

$$\therefore S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k^2-1}{4^k}} < 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} < 4,$$

得证.

【标注】 【知识点】放缩法证明数列不等式；等比数列的判定与证明