

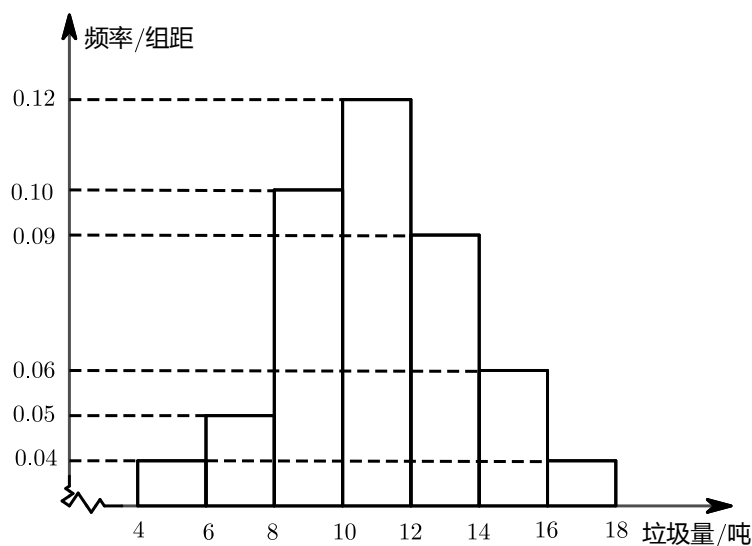
套卷

一、2021和平三模

二、选择题

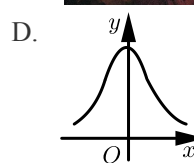
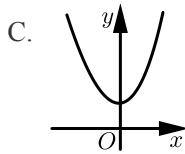
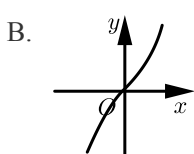
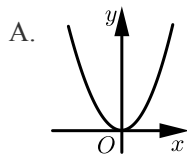
(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | x < 1\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.
A. $(-\infty, 2]$ B. $[-2, 2]$ C. $(1, 2]$ D. $[-2, 1)$
2. “直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的 $(\quad)$.
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 某市通过统计50个大型社区产生的日均垃圾量, 绘制了如下图所示的频率分布直方图, 数据的分组依次为: $[4, 6)$, $[6, 8)$, $[8, 10)$, $[10, 12)$, $[12, 14)$, $[14, 16)$, $[16, 18]$. 为了鼓励率先实施垃圾分类回收, 将日均垃圾量不少于14吨的社区划定为试点社区, 则这样的试点社区个数是 $(\quad)$.



- A. 4 B. 10 C. 19 D. 40
4. 意大利画家列奥纳多·达·芬奇的画作《抱银鼠的女子》(如右图所示)中, 女士颈部的黑色珍珠项链与她怀中的白貂形成对比, 光线和阴影衬托出人物的优雅和柔美. 达·芬奇提出: 固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 形成的曲线是什么? 这就是著名的“悬链线问题”. 后人研究得出,

悬链线并不是抛物线，而是与解析式为 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的“双曲余弦函数”相关下列选项为“双曲余弦函数”图象的是（ ）。



5. 设 $a = 3^{\frac{1}{3}}$, $b = \left(\frac{1}{5}\right)^3$, $c = \log_3 \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为（ ）。

A. $b < a < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

6. 在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O , 球 O 分别与圆柱 O_1O_2 的上、下底面及母线均有且只有一个公共点. 若 $O_1O_2 = 2$, 则圆柱 O_1O_2 的表面积为（ ）。

A. 4π

B. 5π

C. 6π

D. 7π

7. 已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点, 若双曲线实轴的一个端点、虚轴的一个端点与点 F 恰好是直角三角形的三个顶点, 则双曲线的离心率为（ ）。

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $1+\sqrt{2}$

D. $1+\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x) = (a \sin x + \cos x) \cos x - \frac{1}{2}$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$, 则下列结论中正确的是（ ）。

A. $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

B. $f(x)$ 是最小正周期为 π 的奇函数

C. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

D. 先将函数 $y = 2 \sin 2x$ 图象上各点的纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后把所得函数图象再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 而可得到函数 $f(x)$ 的图象

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, $\vec{AE} = 2\vec{EB}$, $|\vec{AB}| = \lambda |\vec{AC}|$, 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9\vec{AO} \cdot \vec{EC}$, 则实数 $\lambda =$ （ ）。

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、 填空题

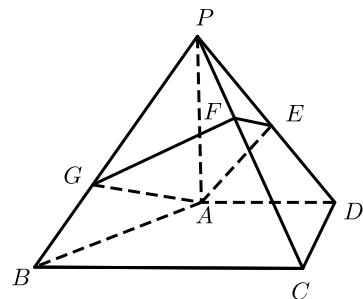
(本大题共6小题，每小题5分，共30分)

1. i 是虚数单位，复数 $z = (2 + i)(1 - 2i)$ ，则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ _____ .
2. 在 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项是_____ .
3. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2ax - 2\sqrt{3}y = 0$ 相切，则 $a =$ _____ .
4. 某校象棋社团开展竞赛活动，比赛中双方有一人获胜或者双方和棋则比赛结束．根据以往比赛结果，在一局比赛中，甲战胜乙的概率是 $\frac{1}{2}$ ，两人和棋的概率是 $\frac{1}{6}$ ，则乙战胜甲的概率是_____ . 甲乙两人比赛2局，每局胜方记3分，负方记0分，和棋双方各记1分，则甲得分不少于2分的概率是_____ .
5. 若正实数 x, y, z 满足 $x + 3y + 2z = 1$ ，则 $\frac{x+2y}{2y+4z} + \frac{4}{x+2y}$ 的最小值是_____ .
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0 \\ |x^2 + 4x + 3|, & x \leq 0 \end{cases}$ ，若 $g(x) = ax$ ($a \in \mathbf{R}$)使得方程 $f(x) = g(x)$ 恰有3个不同的实根，则实数 a 的取值范围为_____ .

四、 解答题

(本大题共5小题，共75分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $b \sin A = 2c \sin B$ ，且 $b = 3, \cos B = \frac{1}{4}$.
 - (1) 求 a 的长 .
 - (2) 求 $\tan C$ 的值 .
 - (3) 求 $\tan(2B - C)$ 的值 .
2. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \perp CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $PA = AD = CD = 2, BC = 3$ ，过点 A 做四棱锥 $P - ABCD$ 的截面 $AEFG$ ，分别交 PD, PC, PB 于点 E, F, G ，已知 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$ ， E 为 PD 的中点 .



- (1) 求证： $AG \parallel$ 平面 PCD .
 (2) 求 AF 与平面 PAB 所成角的正弦值 .

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $D(0, 1)$.

- (1) 求椭圆 C 的方程 .
 (2) 已知点 $A(-1, 0)$ 和点 $B(-4, 0)$, 过点 B 的动直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点 (M 在 N 左侧) , 试讨论 $\angle BAM$ 与 $\angle OAN$ 的大小关系 , 并说明理由 .

4. 已知 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等比数列 , $\{b_n\}$ 是等差数列 , $a_1 = b_1 = 1$, $5a_2 = 2 + 2a_3$, $a_2 = b_2$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
 (2) 设 $\prod_{k=1}^n a_k$ 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项乘积 , 即 $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

① 求 $\prod_{k=1}^n a_k$.

② 若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\prod_{k=1}^n b_k = \frac{c_n}{n}$, 求证： $\frac{c_{n+1}}{n+1} - S_n = 1$.

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}} - x \ln x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 .

(2) 证明 :

① $f(x) < 2$.

② 对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $e^{n-1} < (2n - \ln n)^n$.

五、南开二模

六、选择题

(本大题共9小题 , 每小题5分 , 共45分)

1. 已知集合 $A = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$, $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\emptyset$

B. $\{-3, -1, 0, 4\}$

C. $\{2, 3\}$

D. $\{0, 2, 3\}$

2. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $\frac{2}{x-1} < 0$ ”是“ $x^2 < 1$ ”的 () .

A. 充分不必要条件

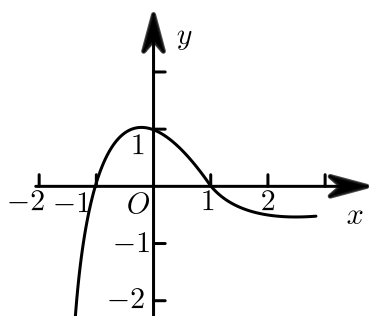
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

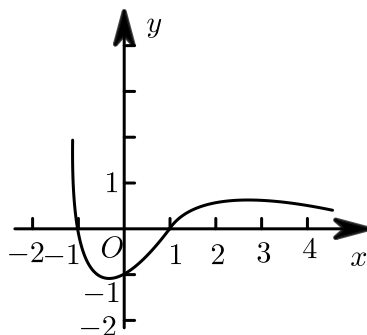
D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $f(x) = \frac{1-x^2}{e^x}$ 的图象大致为 () .

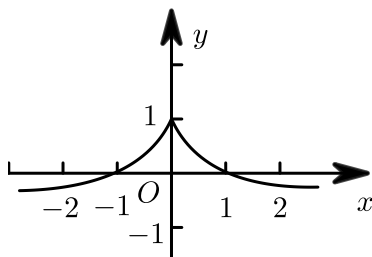
A.



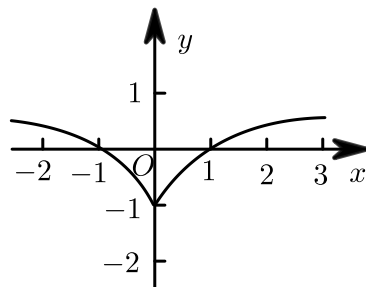
B.



C.



D.



4. 已知直线 l 与圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 交于 A, B 两点, 且线段 AB 的中点坐标为 $D(2, \sqrt{2})$, 则 $|AB| =$ () .

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 若 $a = f(\log_2 e)$, $b = f(\ln 2)$, $c = (\log_{\frac{1}{2}} 3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的离心率为 2, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在双曲线 C 上, 若 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 10, 则 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 () .

A. $\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{15}$

C. 15

D. 30

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$, 则下列四个结论中:

① $f(x)$ 的周期为 π ;② $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴;③ $[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}]$ 是 $f(x)$ 的一个单调递增区间;④ $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{7\pi}{12}]$ 上的最大值为 2 .

所有正确结论的序号是 () .

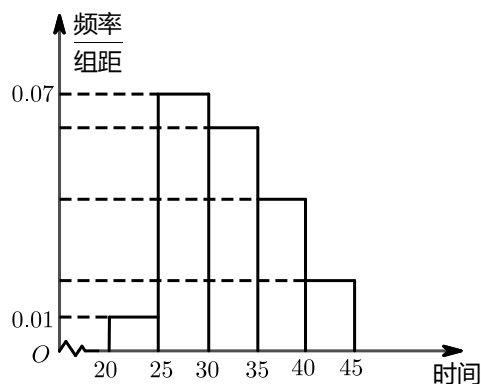
A. ①②

B. ①③

C. ①②④

D. ①③④

8. 某健身俱乐部统计学员经训练后的平板支撑的时间增加值都在 20s 到 45s 之间, 其频率分布直方图如图所示. 现已知时间增加值在 $[30, 35)$, $[35, 40)$, $[40, 45]$ 的健身人数呈递减的等差数列, 则学员时间增加值是 $[30, 35)$ 或 $[40, 45]$ 的频率之和为 () .



- A. 0.5 B. 0.3 C. 0.6 D. 0.4

9. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB$, $CD \parallel AB$, $AB = 2AD = 2DC = 2$, E 为 BC 边上一点, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{EC}$, F 为直线 AE 上一点, 则 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FB}$ 的最大值为 () .
- A. $\frac{6}{13}$ B. $-\frac{6}{13}$ C. $\frac{9}{20}$ D. $-\frac{9}{20}$

七、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

- 若复数 $z = 2i + \frac{2}{1+i}$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 z 的模为 _____ .
- $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, 含 x^3 项的系数等于 _____ .
- 某长方体的长、宽、高分别为4, 4, 2, 则该长方体的体积与其外接球的体积之比为 _____ .
- 甲、乙两人参加一次历史知识竞赛, 已知在备选的10道试题中, 甲、乙分别都能答对其中的8道题. 规定每人都从备选题中随机抽出3道题进行回答, 至少答对2道题才算合格. 则甲不合格的概率是 _____; 甲、乙两人中恰有一人合格的概率是 _____ .
- 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + 2b = 1$, 则 $a^2 + 4b^2 + \frac{1}{4ab}$ 的最小值是 _____ .
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & x \leq 4 \\ \log_2 x, & x > 4 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 _____; 若函数 $g(x) = f[f(x)] - m$ 恰有5个零点, 则 m 的取值范围为 _____ .

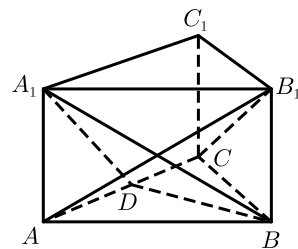
八、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 且满足 $a = 3$, $b = \sqrt{2}$, $c \sin A = a \cos C$.
(1) 求角 C 的大小.

- (2) 求边 c 的长 .
- (3) 求 $\cos (C-2A)$ 的值 .

2. 如图所示, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 ABC , 且底面是边长为2的正三角形, 侧棱长为1, D 是 AC 的中点 .



- (1) 求证: $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD .
- (2) 求直线 AB_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值 .
- (3) 求二面角 $A-BD-A_1$ 的大小 .

3. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 已知 $b_1 = 1$, $b_3 = b_2 + 2$, $b_4 = a_3 + a_5$, $b_5 = a_4 + 2a_6$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设数列 $\{(-1)^{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n , 记 $c_n = \frac{3+T_{2n-1}}{2}b_{2n-1} + \frac{3+T_{2n}}{2}b_{2n}$, 求 c_n .
- (3) 求 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{c_{n+1-i}}$.

4. 已知抛物线 $G_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 与离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个交点为 $P(1, t)$ ，点 P 到抛物线 C_1 的焦点的距离为 2.
- (1) 求 C_1 与 C_2 的方程.
- (2) 设 O 为坐标原点，在第一象限内，椭圆 C_2 上是否存在点 A ，使过 O 作 OA 的垂线交抛物线 C_1 于点 B ，直线 AB 交 y 轴于点 E ，且 $\angle OAE = \angle EOB$ ？若存在，求出点 A 的坐标；若不存在，请说明理由.
5. 已知函数 $f(x) = e^{2x}$ ， $g(x) = m(2x + 1)$ ($m \neq 0$) (e 为自然对数的底数)， $h(x) = f(x) - g(x)$.
- (1) 若 $m = e$ ，求函数 $h(x)$ 的单调区间.
- (2) 若 $h(x) \geq 1 - m$ 恒成立，求实数 m 的值.
- (3) 若直线 $y = g(x)$ 是曲线 $f(x) = e^{2x}$ 的一条切线，求证：对任意实数 $a > b$ ，都有 $\frac{h(a) - h(b)}{a - b} \geq 2e^{2b} - 2$.

九、和平二模

十、选择题

(本大题共9小题，每小题5分，共45分)

1. 已知集合 $U = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{x \in U \mid |x - 1| < 2\}$ ，则 $A \cap B =$ () .
- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $1 - x^2 < 0$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的 () .

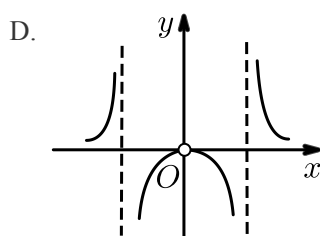
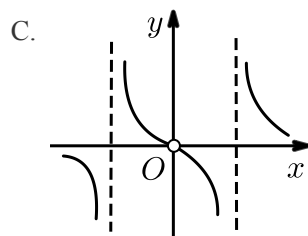
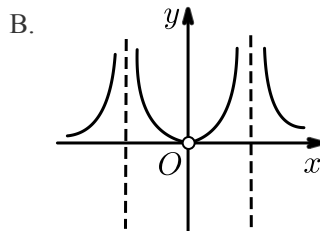
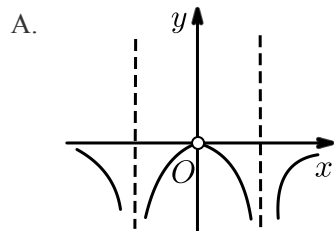
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

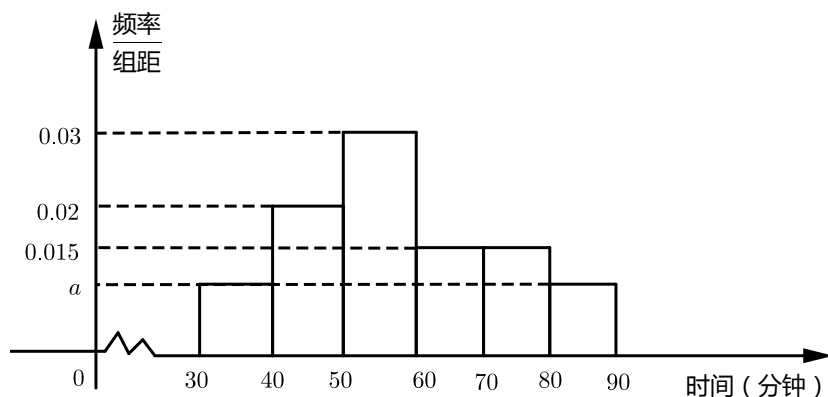
C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y = \frac{1}{\log_2 |x|}$ 的部分图象大致为 () .



4. 某校通过问卷调查了解500名学生周末参加体育锻炼的时间, 频率分布直方图如下图所示, 数据的分组依次为: $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90]$, 则在调查的学生中周末参加体育锻炼的时间不少于60分钟的人数是 () .



A. 125

B. 175

C. 200

D. 300

5. 设 $a = 2^{\log_2 3}$, $b = \log_{0.3} 0.4$, $c = 3 \ln 2$, 则 a, b, c 的大小关系为 () .

A. $b < a < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $a < b < c$

6. 已知圆柱 OO_1 的两底面圆周上的所有点都在球 C 的表面, 且圆柱 OO_1 的底面半径为1, 高为 $2\sqrt{3}$, 则球 C 的表面积为 () .

A. 2π

B. 8π

C. 12π

D. 16π

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于点 A , 点 B 是抛物线的准线上一点, 抛物线的焦点 F 为双曲线的一个焦点, 且 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则双曲线的方程为 () .

A.

B.

C.

D.

$$\frac{7x^2}{3} - \frac{7y^2}{4} = 1$$

$$\frac{7x^2}{4} - \frac{7y^2}{3} = 1$$

$$\frac{3x^2}{7} - \frac{4y^2}{7} = 1$$

$$\frac{7x^2}{12} - \frac{7y^2}{16} = 1$$

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示，其中 $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \pi$ 。给出下列结论：

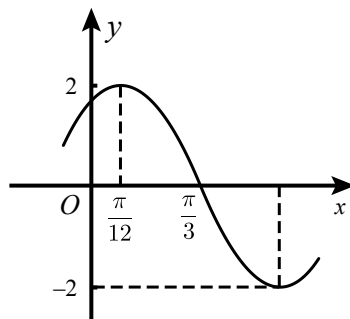
① ω 的值为 2；

② φ 的值为 $-\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ ；

③ 直线 $x = -\frac{7\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴；

④ 函数 $f(x)$ 的解析式可表示为 $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 。

其中所有正确结论的序号是 ()。



A. ①②

B. ①④

C. ①②③

D. ①②④

9. 已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(x)$ ，且当 $-1 \leq x < 1$ 时， $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \notin \mathbf{Z} \\ e^x, & x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} |\log_a x|, & x > 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 。若关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 恰有 5 个互异的实数解，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $(7, 9]$

B. $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right) \cup (7, 9]$

C. $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 11]$

D. $\left[\frac{1}{11}, \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{9}\right) \cup (9, 10) \cup (10, 11]$

十一、填空题

(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

1. i 是虚数单位，则 $\left|\frac{3-i}{1+i}\right|$ 的值为 _____。

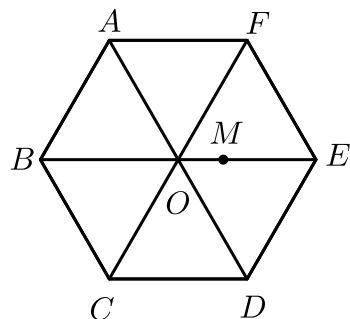
2. 在 $\left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中， x^3 的系数是 _____。

3. 设 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$ ，若直线 $l: 2x - y + m = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 相切，则 $m =$ _____。

4. 某校从 5 名学生中选派 3 人参加劳动技能大赛。已知这 5 名学生中有高一年级学生 2 名，高二年级学生 2 名，高三年级学生 1 名，则所选 3 人分别来自不同年级的概率为 _____。记所选 3 人中高一年级学生的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____。

5. 已知正实数 x, y 满足 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{9}{y} + 6$ ，则 $x + y$ 的最小值是 _____。

6. 如图所示，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为2，线段 AD ， BE ， CF 交于点 O ，则 $|\vec{OA} + \vec{CE}| = \underline{\hspace{1cm}}$ ；若点 M 是线段 BE 上一点，且 $\vec{AD} \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{DM} + \frac{1}{3} \vec{FM} \right) = -2$ ，则 $|\vec{OM}| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



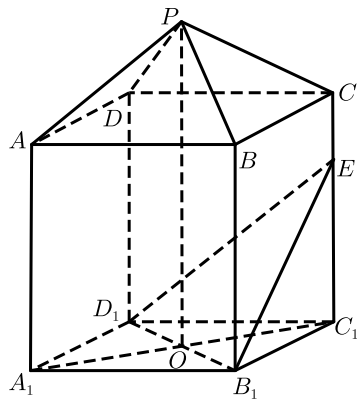
十二、解答题

(本大题共5小题，共75分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ， $\tan B = 1$ ， $a = \sqrt{2}$ ， $b = 3$ 。

- (1) 求 $\sin A$ 。
- (2) 求 $\cos(2A - B)$ 。
- (3) 求 c 的长。

2. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 和四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 组合而成的几何体中，侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形， A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O ， $PO \parallel AA_1$ ，点 E 是棱 CC_1 上一点， $AA_1 = 3$ ， $CE = 1$ 。



- (1) 证明： $PA \perp B_1D_1$.
- (2) 求二面角 $B_1 - D_1E - C_1$ 的正弦值 .
- (3) 若直线 $PA \parallel$ 平面 B_1D_1E , 求直线 PA 和 B_1E 所成角的余弦值 .

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $A(-a, 0)$ 与点 $B(0, b)$ 是椭圆的顶点 ,
 $|BF| = \frac{2}{3}|AF|$.

- (1) 求椭圆 C 的离心率 e .
- (2) 设以离心率 e 为斜率的直线 l 经过点 A , 与椭圆 C 相交于点 P (点 P 不在坐标轴上) .
- ① 证明：点 F 在以线段 AP 为直径的圆上 .
- ② 若 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 8$, 求椭圆 C 的方程 .

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列 , $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{1}{a_1}$, $2S_2$, $8a_3$ 成等差数列 , $3a_2 = a_1 + 2a_3$,
 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 满足 $T_n = n^2 + n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 :
- (2) 若 $c_n = \begin{cases} a_nb_n, n \text{ 是奇数} \\ \frac{(3n+8)a_n}{b_nb_{n+2}}, n \text{ 是偶数} \end{cases}$, 求 $\sum_{i=1}^{2n} c_i$.

5. 已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = x^n + 1$, $h(x) = f(x) - a \cdot g(x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 当 $n = 1$ 时 , 讨论函数 $h(x)$ 的单调性 .

(2) 当 $n = 2$ 时 ,

① 若 $x \in [0, +\infty)$ 时 , $h(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围 .

② 直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 $A(x_1, f(x_1))$, 与曲线 $y = g(x)$ 相切于点 $B(x_2, f(x_2))$, 证明 :

$$x_1 + x_2 < \frac{1}{2} .$$