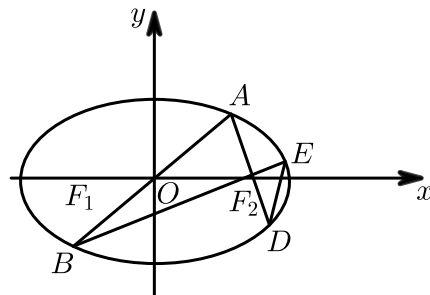


圆锥曲线大题

1. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , M 在椭圆上, $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$, 面积的最大值为 2.



- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 直线 $y = kx (k > 0)$ 与椭圆 C 交于 A, B , 连接 AF_2, BF_2 并延长交椭圆 C 于 D, E , 连接 DE . 探索 AB 与 DE 的斜率之比是否为定值并说明理由.

【答案】 (1) $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

(2) $k_{DE}: k = 9$, 证明见解析.

【解析】 (1) $|F_1F_2| + |MF_1| + |MF_2|$

$$= 2a + 2c = 2\sqrt{5} + 4,$$

$$S = \frac{1}{2} 2c \cdot b = bc = 2,$$

$$\text{得 } a = \sqrt{5}, c = 2, b = 1, \text{ 所以 } C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1.$$

(2) 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$.

$$\text{直线 } AD: x = \frac{x_0 - 2}{y_0} y + 2,$$

$$\text{代入 } C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1,$$

$$\text{得: } [(x_0 - 2)^2 + 5y_0^2]y^2 + 4(x_0 - 2)y_0y - y_0^2 = 0,$$

$$\text{因为 } \frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1,$$

$$\text{代入化简得 } (9 - 4x_0)y^2 + 4(x_0 - 2)y_0y - y_0^2 = 0,$$

$$\text{设 } D(x_1, y_1), E(x_2, y_2),$$

$$\begin{aligned}
&\text{则 } y_0 y_1 = \frac{-y_0^2}{9-4x_0}, \\
&\text{所以 } y_1 = \frac{-y_0}{9-4x_0}, \\
&x_1 = \frac{x_0-2}{y_0} y_1 + 2. \\
&\text{直线 } BE: x = \frac{x_0+2}{y_0} y + 2, \\
&\text{同理可得 } y_2 = \frac{y_0}{9+4x_0}, \\
&x_2 = \frac{x_0+2}{y_0} y_2 + 2. \\
&\text{所以 } k_{DE} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{x_0-2}{y_0} y_1 - \frac{x_0+2}{y_0} y_2} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{x_0}{y_0} (y_1 - y_2) - 2 \frac{y_1 + y_2}{y_0}} = \frac{1}{\frac{x_0}{y_0} - \frac{2}{y_0} \cdot \frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2}} \\
&= \frac{1}{\frac{x_0}{y_0} + \left(-\frac{2}{y_0}\right) \cdot \frac{4x_0}{9}} = 9 \frac{y_0}{x_0} = 9k, \\
&\text{所以 } k_{DE}: k = 9.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 定值问题（证明、探究）

2. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，直线 l 过点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 2)$ ，且与椭圆 C 相切于点 P 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 是否存在过点 $A(4, 0)$ 的直线 m 与椭圆 C 相交于不同的两点 M 、 N ，使得 $36|AP|^2 = 35|AM| \cdot |AN|$ ？
若存在，试求出直线 m 的方程；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 4)$ 。

【解析】 (1) 由题得过两点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 2)$ 直线 l 的方程为 $x + 2y - 4 = 0$ 。

因为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，所以 $a = 2c$ ， $b = \sqrt{3}c$ 。

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ ，

由 $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1, \end{cases}$ 消去 x 得， $4y^2 - 12y + 12 - 3c^2 = 0$ 。

又因为直线 l 与椭圆 C 相切，

所以 $\Delta = 12^2 - 4 \times 4(12 - 3c^2) = 0$ ，解得 $c^2 = 1$ 。

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 易知直线 m 的斜率存在, 设直线 m 的方程为 $y = k(x - 4)$,

由 $\begin{cases} y = k(x - 4), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y ,

整理得 $(3 + 4k^2)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$.

由题意知 $\Delta = (32k^2)^2 - 4(3 + 4k^2)(64k^2 - 12) > 0$,

解得 $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{3 + 4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2}$ 9分

又直线 $l: x + 2y - 4 = 0$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切 ,

由 $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 解得 $x = 1, y = \frac{3}{2}$, 所以 $P(1, \frac{3}{2})$.

则 $|AP|^2 = \frac{45}{4}$. 所以 $|AM| \cdot |AN| = \frac{36}{35} \times \frac{45}{4} = \frac{81}{7}$.

又 $|AM| \cdot |AN| = \sqrt{(4 - x_1)^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{(4 - x_2)^2 + y_2^2}$

$= \sqrt{(4 - x_1)^2 + k^2(4 - x_1)^2} \cdot \sqrt{(4 - x_2)^2 + k^2(4 - x_2)^2}$

$= (k^2 + 1)(4 - x_1)(4 - x_2)$

$= (k^2 + 1)(x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16)$

$= (k^2 + 1)(\frac{64k^2 - 12}{3 + 4k^2} - 4 \times \frac{32k^2}{3 + 4k^2} + 16)$

$= (k^2 + 1) \frac{36}{3 + 4k^2}$.

所以 $(k^2 + 1) \frac{36}{3 + 4k^2} = \frac{81}{7}$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$. 经检验成立 .

所以直线 m 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 4)$.

【标注】 【知识点】联立方程韦达定理; 定值问题 (证明、探究); 弦长求解问题

3. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$, 且经过点 $A(0, 1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 设 O 为原点, 直线 $l: y = kx + t (t \neq \pm 1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q , 直线 AP 与 x 轴交于点 M , 直线 AQ 与 x 轴交于点 N , 若 $|OM| \cdot |ON| = 2$, 求证: 直线 l 经过定点 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 由题意知, $a^2 - b^2 = 1$ ①, $\frac{1}{b^2} = 1$ ②,

由①②得 $b^2 = 1$, $a^2 = 2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 联立 $\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$, 得: $(2k^2 + 1)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$, $\Delta = (4kt)^2 - 4(2k^2 + 1)(2t^2 - 2) > 0$

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{2k^2 + 1}, \quad x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{2k^2 + 1},$$

$\therefore A(0, 1)$, $P(x_1, y_1)$,

$\therefore$ 直线 AP 的方程为: $y = \frac{y_1 - 1}{x_1}x + 1$,

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{x_1}{1 - y_1}$, $\therefore M\left(\frac{x_1}{1 - y_1}, 0\right)$,

同理 $N\left(\frac{x_2}{1 - y_2}, 0\right)$,

又 $\therefore |OM| \cdot |ON| = 2$,

$$\therefore \left| \frac{x_1}{1 - y_1} \right| \cdot \left| \frac{x_2}{1 - y_2} \right| = 2,$$

即 $|x_1 x_2| = 2|(1 - y_1)(1 - y_2)|$,

又 $\therefore y_1 = kx_1 + t$, $y_2 = kx_2 + t$,

$$\therefore |x_1 x_2| = 2(kx_1 + t - 1)(kx_2 + t - 1) = 2k^2 x_1 x_2 + 2k(t - 1)(x_1 + x_2) + 2(t - 1)^2,$$

若 $x_1 x_2 < 0$, 则有 $(2k^2 + 1)x_1 x_2 + 2k(t - 1)(x_1 + x_2) + 2(t - 1)^2 = 0$,

$$\therefore 2(t^2 - 1) + 2k(t - 1) \times \frac{-4kt}{2k^2 + 1} + 2(t - 1)^2 = 0,$$

$$\text{化简得: } t = \frac{2k^2 t}{2k^2 + 1}, \therefore t = 0.$$

此时, 直线 l 为 $y = kx$, 过定点 $(0, 0)$.

若 $x_1 x_2 > 0$, 则 $(2k^2 - 1)x_1 x_2 + 2k(t - 1)(x_1 + x_2) + 2(t - 1)^2 = 0$,

$$\therefore (2k^2 - 1) \times \frac{2(t^2 - 1)}{2k^2 + 1} + 2k(t - 1) \times \frac{-4kt}{2k^2 + 1} + 2(t - 1)^2 = 0,$$

$$\text{化简得: } \frac{(2k^2 - 1)(t + 1)}{2k^2 + 1} + \frac{-4k^2 t}{2k^2 + 1} + t - 1 = 0,$$

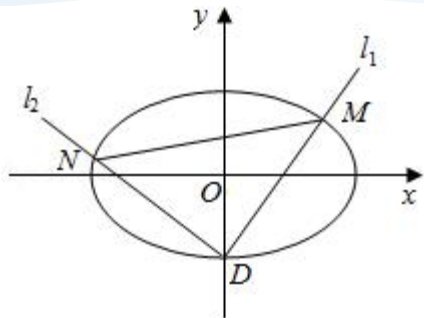
$$\therefore 4k^2 t - 2 - 4k^2 t = 0,$$

$\therefore -2 = 0$ 不成立.

综上, 直线 l 过定点 $(0, 0)$.

【标注】 【知识点】 直线和椭圆的位置关系; 定点问题

4. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 短轴长是 2.



- (1) 求椭圆 C 的方程；
- (2) 设椭圆 C 的下顶点为 D ，过点 D 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，这两条直线与椭圆 C 的另一个交点分别为 M, N 。设 l_1 的斜率为 $k (k \neq 0)$ ， $\triangle DMN$ 的面积为 S ，当 $\frac{S}{|k|} > \frac{16}{9}$ 时，求 k 的取值范围。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，

(2) $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$ 。

【解析】(1) 设椭圆 C 的半焦距为 c ，则由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = 1 \end{cases}$ ，

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{联立解得 } a = 2, b = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

(2) 由(I)知，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，所以椭圆 C 与 y 轴负半轴交点为 $D(0, -1)$ 。

因为 l_1 的斜率存在，所以设 l_1 的方程为 $y = kx - 1$ ，

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ 得 } M\left(\frac{8k}{1+4k^2}, \frac{4k^2-1}{1+4k^2}\right),$$

$$\text{从而 } DM = \sqrt{\left(\frac{8k}{1+4k^2}\right)^2 + \left(\frac{4k^2-1}{1+4k^2} + 1\right)^2} = \frac{8|k| \cdot \sqrt{k^2+1}}{1+4k^2}.$$

$$\text{用 } -\frac{1}{k} \text{ 代 } k \text{ 得 } DN = \frac{8\sqrt{k^2+1}}{4+k^2},$$

$$\text{所以 } \triangle DMN \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{8|k| \cdot \sqrt{1+k^2}}{1+4k^2} \times \frac{8\sqrt{k^2+1}}{4+k^2} = \frac{32(k^2+1) \cdot |k|}{(1+4k^2)(4+k^2)}.$$

$$\text{则 } \frac{S}{|k|} = \frac{32(k^2+1)}{(1+4k^2)(4+k^2)},$$

$$\text{因为 } \frac{S}{|k|} > \frac{16}{9}, \text{ 即 } \frac{32(k^2+1)}{(1+4k^2)(4+k^2)} > \frac{16}{9},$$

$$\text{整理得 } 4k^4 - k^2 - 14 < 0, \text{ 解得 } -\frac{7}{4} < k^2 < 2$$

所以 $0 < k^2 < 2$, 即 $-\sqrt{2} < k < 0$ 或 $0 < k < \sqrt{2}$.

从而 k 的取值范围为 $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.

【标注】 【知识点】椭圆的离心率；直线和椭圆的位置关系；面积问题

5. 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点 .
- (1) 求 E 的方程 .
- (2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程 .

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$.

【解析】 (1) 设 $F(c, 0)$, 由条件知, $\frac{2}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $c = \sqrt{3}$,

又 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $a = 2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 1$,

故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 依题意设直线 $l: y = kx - 2$ 将 $y = kx - 2$ 代入 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 得 $(1 + 4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0$,

当 $\Delta = 16(4k^2 - 3) > 0$, 即 $k^2 > \frac{3}{4}$ 时, $x_{1,2} = \frac{8k \pm 2\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}$,

从而 $PQ = \sqrt{k^2 + 1}|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}$,

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}$, 所以 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2}d \cdot |PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{4k^2 + 1}$,

设 $\sqrt{4k^2 - 3} = t$, 则 $t > 0$, $S_{\triangle OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}}$,

因为 $t + \frac{4}{t} \geq 4$, 当且仅当 $t = 2$, 即 $k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ 时等号成立, 且满足 $\Delta > 0$,

所以当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, l 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x - 2$.

【标注】 【知识点】直线和椭圆的位置关系；面积问题；最值问题

6. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F , 右顶点为 A , 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率 .

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点A的直线l与椭圆交于点B (B不在x轴上), 垂直于l的直线与l交于点M, 与y轴交于点H, 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA = \angle MAO$, 求直线的斜率.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $\pm \frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】(1) 设 $F(c, 0)$, 由 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$,

得 $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{3c}{a(a-c)}$, 即 $a^2 - c^2 = 3c^2$,

又 $a^2 - c^2 = b^2 = 3$, 解得 $c^2 = 1$,

因此 $a^2 = 4$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设直线的斜率为 $k(k \neq 0)$, 则直线l的方程为 $y = k(x - 2)$,

设 $B(x_B, y_B)$, 由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x - 2), \end{cases}$ 消去 y ,

整理得 $(4k^2 + 3)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$,

解得 $x = 2$ 或 $x = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}$,

由题意得 $x_B = \frac{8k^2 - 6}{4k^2 + 3}$, 从而 $y_B = \frac{-12k}{4k^2 + 3}$,

由(1)知 $F(1, 0)$, 设 $H(0, y_H)$, 有 $\overrightarrow{FH} = (-1, y_H)$, $\overrightarrow{BF} = (\frac{9 - 4k^2}{4k^2 + 3}, \frac{12k}{4k^2 + 3})$,

由 $BF \perp HF$ 得, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$,

所以 $\frac{4k^2 - 9}{4k^2 + 3} + \frac{12ky_H}{4k^2 + 3} = 0$, 解得 $y_H = \frac{9 - 4k^2}{12k}$,

因此直线MH的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + \frac{9 - 4k^2}{12k}$,

设 $M(x_M, y_M)$, 由方程组 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x + \frac{9 - 4k^2}{12k} \\ y = k(x - 2) \end{cases}$,

消去 y , 得 $x_M = \frac{20k^2 + 9}{12(k^2 + 1)}$,

在 $\triangle MAO$ 中, $\angle MAO = \angle MOA \Rightarrow |MA| = |MO|$,

即 $(x_M - 2)^2 + y_M^2 = x_M^2 + y_M^2$,

化简得 $x_M = 1$, 即 $\frac{20k^2 + 9}{12(k^2 + 1)} = 1$,

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以直线的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{6}}{4}$.

【标注】 【知识点】 向量问题；直线和椭圆的位置关系

7. 已知点 $A(1, \sqrt{2})$ 是离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的一点. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 BD 交椭圆 C 于 B 、 D 两点, 且 A 、 B 、 D 三点不重合.

- (1) 求椭圆 C 的方程.
 (2) 求证: 直线 AB 、 AD 的斜率之和为定值.
 (3) $\triangle ABD$ 的面积是否存在最大值? 若存在, 求出这个最大值; 若不存在, 说明理由?

【答案】 (1) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 证明见解析.

(3) 存在, $\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $\because e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}, \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} = 1, a^2 = b^2 + c^2,$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2) 设 $D(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 、 AD 的斜率分别为: k_{AB} 、 k_{AD} ,

$$\therefore k_{AD} + k_{AB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 1}$$

$$= 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2} \right] (*) ,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2}x + b \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{2}bx + b^2 - 4 = 0 ,$$

$$\Delta = -8b^2 + 64 > 0 ,$$

$$\therefore -2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}b \text{ ①}, x_1 x_2 = \frac{b^2 - 4}{4} \text{ ②},$$

$$\text{将①、②式代入} (*) \text{式整理得 } 2\sqrt{2} + b \left[\frac{x_1 + x_2 - 2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 1} \right] = 0 ,$$

$$\text{即 } k_{AD} + k_{AB} = 0 .$$

(3) $\because |BD| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{\Delta}}{4}$

$$= \sqrt{3} \frac{\sqrt{64-8b^2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{8-b^2},$$

设 d 为点 A 到直线 BD 的距离, $\therefore d = \frac{|b|}{\sqrt{3}},$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |BD| d = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{(8-b^2)b^2} \leq \sqrt{2},$$

当且仅当 $b = \pm 2$ 时取等号,

$$\text{又} \because \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

$$\therefore \text{当 } b = \pm 2 \text{ 时, } S_{\triangle ABD_{\max}} = \sqrt{2}.$$

【标注】 【知识点】定值问题（证明、探究）；面积问题；最值问题

8. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(1, \frac{3}{2})$, 且离心率 $e = \frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 设椭圆 E 的右顶点为 A , 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 E 相交于 M, N 两点 (异于 A 点), 且满足 $MA \perp NA$, 试证明直线 l 经过定点, 并求出该定点的坐标.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 证明见解析, 定点坐标为 $(\frac{2}{7}, 0)$.

【解析】 (1) 由椭圆离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2c$, $b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$,

将 $(1, \frac{3}{2})$ 代入椭圆方程: $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 解得: $c = 1$, 则 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$,

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 整理得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2 - 3) = 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{3 + 4k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2},$$

$$\text{且 } \Delta = 64m^2k^2 - 16(3 + 4k^2)(m^2 - 3) > 0, \text{ 即 } 3 + 4k^2 - m^2 > 0,$$

$\therefore$ 以 MN 为直径的圆过椭圆的右顶点 A ,

$$\therefore AM \perp AN, \text{ 即 } AM \cdot AN = 0, \text{ 则 } (x_1 - 2, y_1)(x_2 - 2, y_2) = 0, \text{ 即 } y_1y_2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

,

$$\begin{aligned} \text{又 } y_1 y_2 &= (kx_1 + m) \cdot (kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{3(m^2 - 4k^2)}{3 + 4k^2}, \\ \therefore \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2} + \frac{3(m^2 - 4k^2)}{3 + 4k^2} + 2 \times \frac{8mk}{3 + 4k^2} + 4 &= 0, \\ \text{化简得, } 7m^2 + 4k^2 + 16mk &= 0, \\ \text{解得 } m &= -2k \text{ 或 } m = -\frac{2k}{7} \text{ 且均满足 } 3 + 4k^2 - m^2 > 0, \\ \text{当 } m &= -2k \text{ 时, } L: y = k(x - 2), \text{ 直线过定点 } (2, 0) \text{ 与已知矛盾;} \\ \text{当 } m &= -\frac{2k}{7} \text{ 时, } L: y = k(x - \frac{2}{7}), \text{ 直线过定点 } (\frac{2}{7}, 0), \\ \text{综上, 直线 } l &\text{ 过定点, 定点坐标为 } (\frac{2}{7}, 0). \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】 定点问题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2, 1)$ 在椭圆 C 上.
- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 设直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 相切, 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点.
- ① 若直线 l 过椭圆 C 的右焦点 F , 求 $\triangle OPQ$ 的面积.
 - ② 求证: $OP \perp OQ$.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① $\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

② 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意, 得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 6$, $b^2 = 3$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 椭圆 C 的右焦点 $F(\sqrt{3}, 0)$.

设切线方程为 $y = k(x - \sqrt{3})$, 即 $kx - y - \sqrt{3}k = 0$,

所以 $\frac{|-\sqrt{3}k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2}$, 解得 $k = \pm\sqrt{2}$, 所以切线方程为 $y = \pm\sqrt{2}(x - \sqrt{3})$.

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \sqrt{2}(x - \sqrt{3}) \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5} \\ y = \frac{-\sqrt{6}+6}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{5} \\ y = \frac{-\sqrt{6}-6}{5} \end{cases}$,

所以 $PQ = \frac{6\sqrt{6}}{5}$.

因为 O 到直线 PQ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，所以 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ 。

综上所述， $\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ 。

② (i) 若直线 PQ 的斜率不存在，则直线 PQ 的方程为 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = -\sqrt{2}$ 。

当 $x = \sqrt{2}$ 时， $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ， $Q(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 。

因为 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ ，所以 $OP \perp OQ$ 。

当 $x = -\sqrt{2}$ 时，同理可得 $OP \perp OQ$ 。

(ii) 若直线 PQ 的斜率存在，设直线 PQ 的方程为 $y = kx + m$ ，即 $kx - y + m = 0$ 。

因为直线与圆相切，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2}$ ，即 $m^2 = 2k^2 + 2$ 。

将直线 PQ 方程代入椭圆方程，得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$ 。

设 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，则有 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}$ ， $x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{1 + 2k^2}$ ，

因为 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2$

$$= (1 + k^2) \times \frac{2m^2 - 6}{1 + k^2} + km \times \left(-\frac{4km}{1 + k^2}\right) + m^2。$$

将 $m^2 = 2k^2 + 2$ 代入上式可得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ ，所以 $OP \perp OQ$ 。

综上所述， $OP \perp OQ$ 。

【标注】 【知识点】 向量问题；直线和椭圆的位置关系

10. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点与抛物线 $x^2 = 4\sqrt{2}y$ 的焦点重合， F_1 ， F_2 分别是椭圆的左、右焦点，离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，过椭圆右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆交于 M 、 N 两点。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 是否存在直线 l ，使得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -1$ ，若存在求出直线方程；若不存在请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 。

(2) 存在， $y = \sqrt{2}(x - 1)$ 或 $y = -\sqrt{2}(x - 1)$ 。

【解析】 (1) $\because x^2 = 4\sqrt{2}y$ 焦点为 $(0, \sqrt{2})$ 且与椭圆的一个顶点重合，

$$\therefore b = \sqrt{2}，$$

$$\text{又} \because e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore a = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{椭圆} C \text{ 方程为: } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 设存在直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = k(x-1) \end{cases}$$

$$\therefore (2+3k^2)x^2 - 6k^2x + 4k^2 - 6 = 0,$$

$$\therefore \Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{6k^2}{2+3k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2-6}{2+3k^2},$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$= x_1x_2 + k^2[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]$$

$$= \frac{3k^2-6}{2+3k^2} + k^2\left(\frac{3k^2-6}{2+3k^2} - \frac{6k^2}{2+3k^2} + 1\right)$$

$$= \frac{-k^2-6}{2+3k^2}$$

$$= -1,$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{直线} l \text{ 方程为: } y = \sqrt{2}(x-1) \text{ 或 } y = -\sqrt{2}(x-1).$$

【标注】 【知识点】 向量问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 右焦点为 $F(c, 0)$, 直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 与 x 轴相交于点 T , 且 F 是 AT 的中点.

(1) 求椭圆的离心率.

(2) 过点 T 的直线与椭圆相交于 M, N 两点, M, N 都在 x 轴上方, 并且 M 在 N, T 之间, 且 N 到直线 l 的距离是 M 到直线 l 距离的 2 倍.

① 记 $\triangle NFM$, $\triangle NFA$ 的面积分别是 S_1, S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$.

② 若原点 O 到直线 TN 的距离为 $\frac{20\sqrt{41}}{41}$, 求椭圆方程.

【答案】 (1) $\frac{1}{2}$.

(2) ① $\frac{1}{2}$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1 .$$

【解析】(1) $\because F$ 是 AT 的中点 ,

$$\therefore -a + \frac{a^2}{c} = 2c , \text{ 即 } (a-2c)(a+c) = 0 ,$$

$$\text{又 } a, c > 0 ,$$

$$\therefore a = 2c ,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} .$$

(2) ① 过 M, N 作直线 l 的垂线 , 垂足分别为 M_1, N_1 ,

$\because N$ 到直线 l 的距离是 M 到直线 l 距离的 2 倍 ,

$$\therefore \frac{MM_1}{NN_1} = \frac{TM}{TN} = 2 ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle FMN}}{S_{\triangle TNF}} = \frac{MN}{TN} = \frac{1}{2} ,$$

$$\text{又 } S_{\triangle ANF} = S_{\triangle TNF} ,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} .$$

② 由 (1) 知椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, $T(4c, 0)$.

设直线 TN 的方程为 $x = ty + 4c$,

与椭圆方程联立 , 并消去 x 整理得 : $(3t^2 + 4)y^2 + 24cty + 36c^2 = 0$,

依题意由 $\Delta = (24ct)^2 - 4 \cdot 36c^2(3t^2 + 4) > 0$, 即 $t^2 > 4$.

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) , \text{ 则有 } \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-24ct}{3t^2 + 4} \quad (*) \\ y_1 y_2 = \frac{36c^2}{3t^2 + 4} \end{cases}$$

由 ① 知 M 是 N, T 的中点 , 故 $y_2 = 2y_1$,

$$\therefore \text{代入 } (*) \text{ 得 } \begin{cases} 3y_1 = \frac{-24ct}{3t^2 + 4} \\ 2y_1^2 = \frac{36c^2}{3t^2 + 4} \end{cases} , \text{ 解得 } t^2 = \frac{36}{5} .$$

$$\therefore \text{原点 } O \text{ 到直线 } TN \text{ 的距离 } d = \frac{4c}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{4\sqrt{5}c}{\sqrt{41}} = \frac{20\sqrt{41}}{41} ,$$

解得 $c = \sqrt{5}$,

故椭圆方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$.

【标注】 【知识点】 面积问题 ; 椭圆的基本量求解