

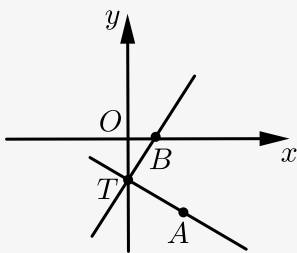
南开高二期末（三）

1. 已知点 $(1, -2)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 在直线 $l: ax - y - 1 = 0 (a \neq 0)$ 的两侧，则直线 l 的倾斜角的取值范围是（ ）。

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ D. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

【答案】 D

【解析】



$\because$ 直线 $l: ax - y - 1 = 0 (a \neq 0)$,

$\therefore$ 直线 l 过定点 $T(0, -1)$ 。

记 $A(1, -2)$ 、 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$,

则 $k_{AT} = \frac{1}{-1} = -1$, $k_{BT} = \frac{-1}{0 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 直线 AT 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$, 直线 BT 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,

$\because$ 点 A 、 B 在直线 l 的两侧,

$\therefore$ 直线 l 的斜倾角的取值范围为 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 。

故选D。

【标注】 【知识点】 求倾斜角的范围

2. 直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 的一个方向向量是（ ）。

A. $(2, -3)$ B. $(2, 3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(3, 2)$

【答案】 D

【解析】 直线的斜率为 $k = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 的一个方向向量,

$\vec{d} = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ 或 $(3, 2)$ 。

故选D。

【标注】 【知识点】直线的方向向量与平面的法向量

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, F_1 为其左焦点, 直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$, 若过 F_1 和 $(0, -b)$ 的直线与 l 平行, 则双曲线的离心率为().
- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 5

【答案】 B

【解析】 由双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 得其左焦点 $F_1(-c, 0)$,
直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ 的斜率为 $-\frac{4}{5}$,
过 F_1 和 $(0, -b)$ 的直线斜率为 $-\frac{b}{c}$,
又过 F_1 和 $(0, -b)$ 的直线与 l 平行,
 $\therefore -\frac{b}{c} = -\frac{4}{5}$, 可得 $\frac{c}{b} = \frac{5}{4}$,
在双曲线中, $b^2 = c^2 - a^2$,
可得 $\frac{c^2}{c^2 - a^2} = \frac{25}{16}$,
可得 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{25}{9}$,
 $\therefore$ 双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$,
故选B.

【标注】 【知识点】求双曲线的离心率

4. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_2, a_4 是方程 $2x^2 - 11x + 8 = 0$ 的两根, 则 a_3 的值为().
- A. 2 B. ± 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\pm\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 由题意 a_2, a_4 是方程 $2x^2 - 11x + 8 = 0$ 的两根, 故有 $a_2 a_4 = 4$.
又 $\{a_n\}$ 为等比数列,
 $\therefore a_2 a_4 = a_3^2$,
 $\therefore a_3 = \pm 2$.
故选B.

【标注】 【知识点】等比数列角标和性质的应用; 等比数列求通项问题; 韦达定理

5.

设椭圆的两个焦点分别是 F_1, F_2 ，过 F_2 作椭圆长轴的垂线，交椭圆于点 P ，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率为（ ）。

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}-1$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}-1$

【答案】 D

【解析】 由已知 $|PF_2| = 2c$ ，

$$\therefore |PF_1| = 2\sqrt{2}c.$$

由椭圆的定义知 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，

$$\text{即 } 2\sqrt{2}c + 2c = 2a,$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

【标注】 【知识点】 求椭圆的离心率

6. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交抛物线于 A, B 两点， $|AF| > |BF|$ ，过 A 作 $AA' \perp l$ 于 A' ，连接 $A'F$ 交 y 轴于 M ，若 $|AM| = 4\sqrt{3}$ ，则 $p =$ （ ）。

A. 2

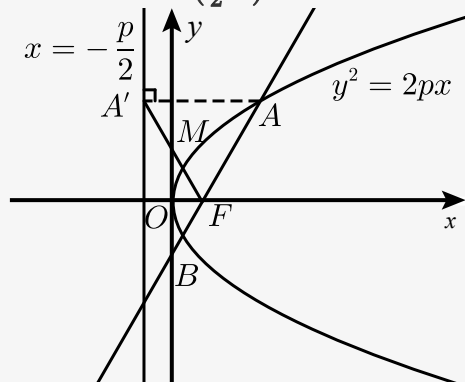
B. 3

C. 4

D. 8

【答案】 C

【解析】 已知 $F(\frac{p}{2}, 0)$ ，如图，



$$\text{设直线 } AB \text{ 的方程为: } y = \sqrt{3}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow 12x^2 - 20px + 3p^2 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3}{2}p, x_2 = \frac{1}{6}p,$$

$$\therefore A\left(\frac{3}{2}p, \sqrt{3}p\right), B\left(\frac{1}{6}p, -\frac{\sqrt{3}}{3}p\right),$$

$$A'\left(-\frac{p}{2}, \sqrt{3}p\right),$$

$$\therefore k_{A'F} = \frac{\sqrt{3}p}{-p} = -\sqrt{3},$$

$$\therefore l_{A'F}: y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

当 $x=0$ 时, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}p$, 则 $M\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{3}{2}p, -\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$,
 $\therefore |\overrightarrow{AM}|^2 = \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \frac{9}{4}p^2 + \frac{3}{4}p^2 = 48$,
 $\therefore p^2 = 16 \Rightarrow p = 4$.

故选C.

【标注】 【知识点】抛物线的基本量求解

7. 已知椭圆的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 且长轴长为12, 离心率为 $\frac{1}{3}$, 则椭圆的方程为 ().
- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ C. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

【答案】 D

【解析】 由题意知,

$$2a = 12, \frac{c}{a} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } a = 6, c = 2,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 32,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

故选D.

【标注】 【知识点】已知椭圆的离心率求其他参数; 椭圆的基本量求解

8. 若方程 $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{8-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 则 m 的取值范围是 ().
- A. (2, 8) B. (2, 5) C. (5, 8) D. (2, 5) $\cup$ (5, 8)

【答案】 B

【解析】 $\because \frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{8-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,

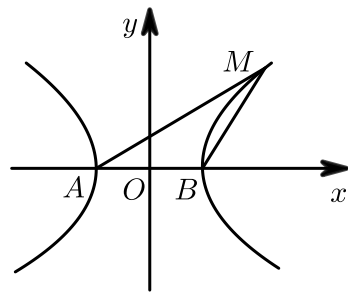
$$\therefore \begin{cases} 8-m > m-2 \\ 8-m > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases},$$

解得: $2 < m < 5$.

故选B.

【标注】 【知识点】椭圆的顶点与轴; 椭圆的标准方程

9. 如图, 已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ().



A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】 设 M 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左支上，

且 $MA = AB = 2a$ ， $\angle MAB = 120^\circ$ ，

则 M 的坐标为 $(-2a, \sqrt{3}a)$ ，

代入双曲线方程可得，

$$\frac{4a^2}{a^2} - \frac{3a^2}{b^2} = 1，$$

可得 $a = b$ ，

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}a，$$

$$\text{即有 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

故选 D.

【标注】 【知识点】求双曲线的离心率

10. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点，与圆 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 交于 C, D 两点，若有三条直线满足 $|AC| = |BD|$ ，则 r 的取值范围为 () .

A. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

B. $(2, +\infty)$

C. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

D. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

【答案】 B

【解析】 方法一：①当直线 $l \perp x$ 轴时，直线 $l: x = 1$ 与抛物线交于点 $(1, 2), (1, -2)$ ，

与圆 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 交于点 $(1, r), (1, -r)$ ，满足 $|AC| = |BD|$ ；

②当直线 l 不与 x 轴垂直时，设直线 $l: y = k(x-1)$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{化简得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0，$$

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{k^2}，$$

$$|AB| = |AF| + |BF| = x_1 + x_2 + 2 = 4 + \frac{4}{k^2}，$$

$\therefore$ 当四点顺序为 A, C, D, B 时， $|AC| = |BD|$ ，

$\therefore AB$ 中点为 $F(1, 0)$ ，这样的直线不存在，

当四点顺序为 A, C, B, D 时,

$$\because |AC| = |BD|, \therefore |AB| = |CD|,$$

$$\text{又} \because |CD| = 2r,$$

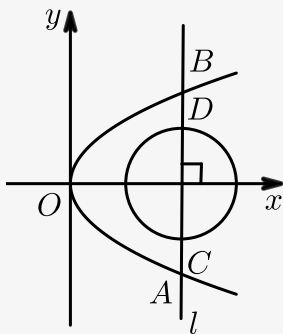
$$\therefore 4 + \frac{4}{k^2} = 2r, \text{ 即 } \frac{2}{k^2} = r - 2,$$

当 $r > 2$ 时存在互为相反数的两斜率 k , 即存在关于 $x = 1$ 对称的两条直线,

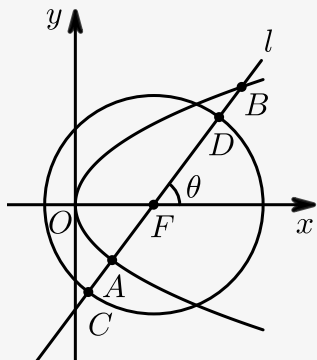
综上, 当 $r \in (2, +\infty)$ 时有 3 条满足条件的直线.

故选 B.

方法二:



对于任意 l , 均有一条斜率不存在的 l , 故而有两条斜率存在的 l .



$$|AC| = |BD|,$$

$$|AC| + |AD| = |BD| + |AD|,$$

$$2r = |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta},$$

$$r = \frac{2}{\sin^2 \theta} > 2.$$

故选 B.

【标注】 【知识点】定值问题 (证明、探究); 直线和抛物线的位置关系; 直线与圆的位置关系

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 点 $K(-1, 0)$, 过 K 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线交抛物线于 M, N 两点, 若 $3\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KN}$, 则 $p =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 由题意可知过点 $K(-1, 0)$ 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线为 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$,

$$\therefore \overrightarrow{3KM} = \overrightarrow{KN},$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\therefore y_2 = 3y_1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+1) \\ y^2 = 2px \end{cases},$$

$$\text{消去 } x \text{ 得 } y^2 - 4py + 2p = 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = 4p, y_1 y_2 = 2p,$$

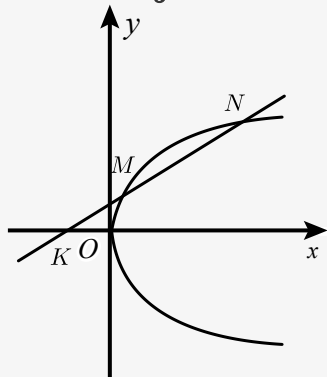
$$\text{故 } y_1 + y_2 = 4y_1 = 4p \Rightarrow y_1 = p,$$

$$\text{即 } y_2 = 3y_1 = 3p,$$

$$\text{故 } y_1 y_2 = 3p^2 = 2p(p > 0),$$

$$\text{解得 } p = \frac{2}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}.$$



【标注】 【知识点】直线和抛物线的位置关系；向量问题

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 左支上点 B 与右焦点 F 关于渐近线对称, O 为坐标原点, 则 $|OB| =$ _____ .

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{2}x$,

过右焦点 $F(c, 0)$ 且垂直于渐近线的直线方程为:

$$y - 0 = -\frac{2}{b}(x - c),$$

$$\text{联立渐近线方程 } y = \frac{b}{2}x \text{ 与 } y - 0 = -\frac{2}{b}(x - c),$$

$$\text{解得 } x = \frac{4}{c}, y = \frac{2b}{c},$$

$$\text{故对称中心的坐标为 } \left(\frac{4}{c}, \frac{2b}{c}\right),$$

由中点坐标公式可得对称点的坐标为

$$\left(\frac{8}{c} - c, \frac{4b}{c}\right),$$

将其代入双曲线的方程可得 $\frac{(8-c^2)^2}{4c^2} - \frac{16 \cdot b^2}{b^2 c^2} = 1$,

结合 $4 + b^2 = c^2$,

可得 $c^2 = 20$, $b^2 = 16$, $B\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$, $|OB| = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

【标注】 【知识点】双曲线的基本量求解

13. 抛物线 $y = 4x^2$ 的准线方程为 _____.

【答案】 $y = -\frac{1}{16}$

【解析】 整理抛物线方程得 $x^2 = \frac{1}{4}y$, $\therefore p = \frac{1}{8}$,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore$ 准线方程是 $y = -\frac{1}{16}$.

故答案为: $y = -\frac{1}{16}$.

【标注】 【知识点】抛物线的标准方程

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 P, F_1, F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 则点 P 到 x 轴的距离为 _____.

【答案】 $\frac{16}{5}$

【解析】 设椭圆短轴的一个端点为 M .

由于 $a = 5$, $b = 4$,

$\therefore c = 3 < b$;

$\therefore \angle F_1 M F_2 < 90^\circ$,

$\therefore$ 只能 $\angle P F_1 F_2 = 90^\circ$ 或 $\angle P F_2 F_1 = 90^\circ$.

令 $x = \pm 3$, 得

$y = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}$.

【标注】 【知识点】椭圆的顶点与轴; 椭圆的标准方程

15. 已知抛物线方程为 $y^2 = 2px$, 其中 $p > 0$, 焦点为 F , 准线为 l , 过抛物线上一点 M 作 l 的垂线, 垂足为 E , 若 $|EF| = |MF|$, 点 M 的横坐标是 3, 则 $p =$ _____.

【答案】 2 或 18

【解析】由抛物线的定义知 $|MF| = |ME|$ ，

$$\therefore |EF| = |MF|,$$

$\therefore \triangle MEF$ 是等边三角形，

$\therefore M$ 的横坐标为3，

$\therefore \triangle MEF$ 的边长为 $3 + \frac{p}{2}$ ，

$\therefore \triangle MEF$ 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \left(3 + \frac{p}{2}\right)$ ，

$\therefore$ 点 M 的纵坐标为 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left(3 + \frac{p}{2}\right)$ ，

$$\therefore \frac{3}{4} \left(3 + \frac{p}{2}\right)^2 = 6p,$$

$$\therefore p = 2 \text{ 或 } p = 18.$$

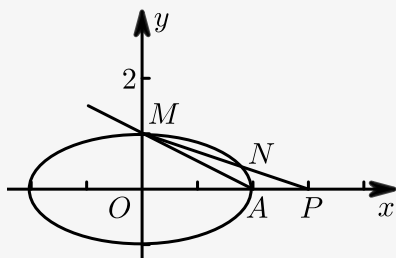
综上所述，答案为2或18.

【标注】 【知识点】 抛物线的定义

16. 过点 $P(3,0)$ 的直线 l 与椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点，椭圆 E 与 x 轴正半轴交于点 A ，则三角形 AMN 的面积的最大值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】 设直线 l 的方程为 $x = ky + 3$ ，



代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，

$$\text{整理得：} (4 + k^2)y^2 + 6ky + 5 = 0,$$

$$\Delta = 36k^2 - 20(4 + k^2) > 0, \text{ 即 } k > \sqrt{5} \text{ 或 } k < -\sqrt{5},$$

$$y_M + y_N = -\frac{6k}{4 + k^2}, \quad y_M y_N = \frac{5}{4 + k^2} \quad (M \text{ 在 } N \text{ 的左边}),$$

$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle APM} - S_{\triangle APN}$$

$$= \frac{1}{2} |PA| \cdot |y_M - y_N|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\frac{6k}{4 + k^2}\right)^2 - \frac{20}{4 + k^2}}$$

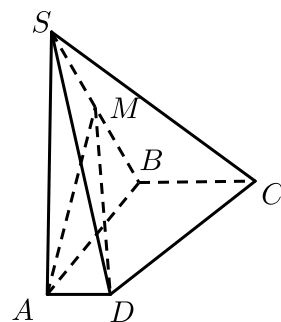
$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16(k^2 - 5)}{(k^2 + 4)^2}},$$

$$\text{由 } 4 + k^2 = t (t > 4), \text{ 可得 } k^2 = t - 4,$$

即有 $S_{\triangle AMN} = 2\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{9}{t^2}} = 2\sqrt{-\left(\frac{3}{t} - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{36}}$,
 当且仅当 $\frac{3}{t} = \frac{1}{6}$, 即 $t = 18$, $k = \pm\sqrt{14}$ 时 ,
 三角形 AMN 面积取得最大值 , 且是 $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
 故答案为 : $\frac{1}{3}$.

【标注】 【知识点】 面积问题；最值问题；直线和椭圆的位置关系

17. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，侧棱 $SA \perp$ 底面 $ABCD$ ， AB 垂直于 AD 和 BC ， $SA = AB = BC = 2$ ， $AD = 1$ ， M 是棱 SB 的中点。



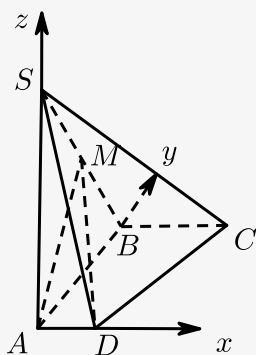
- (1) 求证： $AM \parallel$ 平面 SCD .
 (2) 求二面角 $S-CD-M$ 的正弦值 .
 (3) 在线段 DC 上是否存在一点 N ，使得 MN 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{7}$ ，若存在，请求出 $\frac{DN}{DC}$ 的值，若不存在，请说明理由 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{\sqrt{105}}{21}$.

(3) 存在； $\frac{DN}{DC} = \frac{2}{3}$.

【解析】 (1) 以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $D(1,0,0)$,

$S(0,0,2)$, $M(0,1,1)$, $C(2,2,0)$,

则 $\overrightarrow{AM} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{SD} = (1,0,-2)$, $\overrightarrow{CD} = (-1,-2,0)$,

设平面 SCD 的法向量是 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{SD} \cdot \vec{n} = x - 2z = 0 \\ \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = -x - 2y = 0 \end{cases} ,$$

令 $z = 1$, 则 $x = 2$, $y = -1$,

于是 $\vec{n} = (2, -1, 1)$,

$$\because \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0 ,$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} ,$$

又 $\because AM \not\subset \text{平面} SCD$,

$\therefore AM // \text{平面} SCD$.

(2) 设平面 MCD 的法向量 $\vec{m} = (x,y,z)$,

$$\text{则} \overrightarrow{MD} = (1, -1, -1) ,$$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \vec{m} = -x - 2y = 0 \\ \overrightarrow{MD} \cdot \vec{m} = x - y - z = 0 \end{cases} ,$$

令 $y = -1$, 则 $x = 2$, $z = 3$,

于是 $\vec{m} = (2, -1, 3)$,

由 (1) 知平面 SCD 的法向量 $\vec{n} = (2, -1, 1)$,

$$\therefore \cos \langle S - CD - M \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{21}}{21} ,$$

$$\therefore \sin \langle S - CD - M \rangle = \frac{\sqrt{105}}{21} .$$

(3) 设存在一点 N 满足 ,

$$\text{且有} \overrightarrow{DN} = \lambda \overrightarrow{DC} ,$$

$$\therefore \text{得} N \text{ 坐标为 } (\lambda + 1, 2\lambda, 0) ,$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = (\lambda + 1, 2\lambda - 1, -1) ,$$

由题知平面 SAB 的法向量为 $\vec{P} = (1, 0, 0)$,

$$\therefore \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{P}}{|\overrightarrow{MN}| |\overrightarrow{P}|} = \frac{\lambda + 1}{\sqrt{(\lambda + 1)^2 + (2\lambda - 1)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{35}}{7},$$

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 存在点 N 满足,

且 $\frac{DN}{DC} = \lambda = \frac{2}{3}$.

【标注】 【知识点】向量法解决线面角问题

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 上顶点为 B , 右焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\triangle ABF$ 的面积为 $\sqrt{2} + 1$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若 M, N 为 y 轴上的两个动点, 且 $MF \perp NF$, 直线 AM 和 AN 分别与椭圆 C 交于 D, E 两点.

① 求 $\triangle MFN$ 的面积的最小值.

② 证明: E, O, D 三点共线.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) ① 2.

② 证明见解析.

【解析】 (1) 由题意椭圆离心率 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ①,

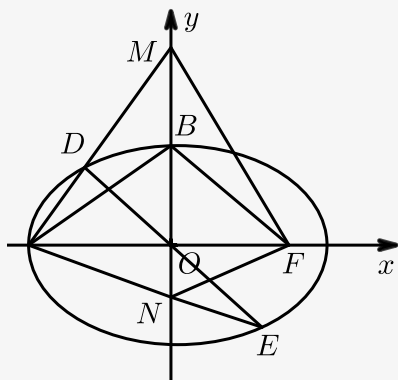
又 $\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{1}{2} |AF| \cdot |OB| = \frac{1}{2} (a + c) \cdot b = \sqrt{2} + 1$ ②,

在椭圆中, 有 $a^2 = b^2 + c^2$ ③,

联立①②③得 $a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$,

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) ① M, N 为 y 轴上两个动点, 设 $M(0, m), N(0, n)$,



又 $F(\sqrt{2}, 0)$,

$$\therefore \overrightarrow{MF} = (\sqrt{2}, -m), \quad \overrightarrow{NF} = (\sqrt{2}, -n),$$

$$\therefore MF \perp NF,$$

$$\therefore \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{NF} = 2 + mn = 0,$$

$$\therefore mn = -2.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } S_{\triangle MFN} &= \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |OF| = \frac{1}{2} |m - n| \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} |m - n|, \end{aligned}$$

$$\therefore mn < 0,$$

$$\therefore |m - n| = |m| + |n| \geq 2\sqrt{|m| \cdot |n|} = 2\sqrt{|mn|} = 2\sqrt{2},$$

当 $|m| = |n|$ 时, 取等号,

$$\therefore S_{\triangle MFN} = \frac{\sqrt{2}}{2} |m - n| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2,$$

即 $\triangle MFN$ 面积最小值为 2.

② 直线 AM 方程为: $y = \frac{m}{2}(x + 2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{m}{2}(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2 + m^2)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 8 = 0,$$

$$\Delta = 16m^4 - 4(2 + m^2)(4m^2 - 8) = 64 > 0,$$

因为直线 AM 与椭圆相交于 A, D ,

$$\text{所以 } x_A + x_D = -\frac{4m^2}{2 + m^2},$$

$$\text{又 } x_A = -2,$$

$$\therefore x_D = \frac{4 - 2m^2}{2 + m^2},$$

$$y_D = \frac{m}{2}(x_D + 2) = \frac{m}{2} \left(\frac{4 - 2m^2}{2 + m^2} + 2 \right) = \frac{4m}{2 + m^2},$$

$$\therefore D \text{ 点坐标 } \left(\frac{4 - 2m^2}{2 + m^2}, \frac{4m}{2 + m^2} \right),$$

同理直线 AN 与椭圆相交于 AE ,

$$\therefore E \text{ 点坐标 } \left(\frac{4 - 2n^2}{2 + n^2}, \frac{4n}{2 + n^2} \right),$$

若 M, N 刚好位于椭圆的上下顶点,

$$\text{则 } m^2 = n^2 = 2$$

$\therefore x_D = x_E = 0$ ，故有 D, O, E 三点共线，

若 M, N 不在椭圆的上下顶点，

$$k_{OD} - k_{OE} = \frac{4m}{4-2m^2} - \frac{4n}{4-2n^2} = \frac{16m - 8mn^2 - 16n + 8m^2n}{(4-2m^2)(4-2n^2)}$$

$$\text{又 } mn = -2$$

$$\therefore 16m - 8mn^2 - 16n + 8m^2n$$

$$= 16m + 16n - 16n - 16m = 0,$$

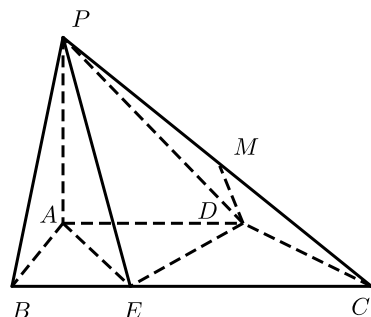
$$\therefore k_{OD} = k_{OE},$$

$\therefore D, O, E$ 三点共线。

综上所述， E, O, D 三点共线。

【标注】 【知识点】面积问题；最值问题；共线比例问题；直线和椭圆的位置关系；椭圆的标准方程

19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PA = 2$ ，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，且 $AB \perp AD$ ， $BC \parallel AD$ ， $AD = AB = 2$ ， $BC = 4$ ， M 为 PC 中点， E 在线段 BC 上，且 $BE = 1$ 。



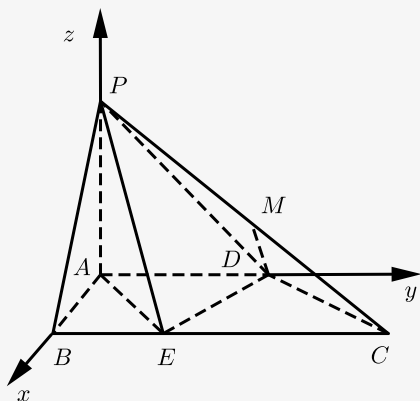
- (1) 求证： $DM \parallel$ 平面 PAB 。
- (2) 求平面 PDE 与平面 BDE 夹角的余弦值。
- (3) 求点 E 到平面 PDC 的距离。

【答案】 (1) 证明见解析。

$$(2) \frac{2}{3}.$$

(3) $\sqrt{3}$.

【解析】(1) 以 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, AD 为 y 轴, AP 为 z 轴建立空间直角坐标系,



$$\therefore A(0,0,0), B(2,0,0), D(0,2,0), P(0,0,2),$$

$$C(2,4,0), M(1,2,1), E(2,1,0),$$

$$\therefore \overrightarrow{DM} = (1,0,1).$$

易知平面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD} = (0,2,0)$,

$$\text{故 } \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

则 $\overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{AD}$.

又 $\because DM \not\subset \text{平面} PAB$,

故 $DM \parallel \text{平面} PAB$.

(2) 易知平面 BDE 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP} = (0,0,2)$,

设平面 PDE 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$,

$$\text{且 } \overrightarrow{PD} = (0,2,-2), \overrightarrow{DE} = (2,-1,0),$$

$$\therefore \text{有 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PD} = 2y - 2z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{DE} = 2x - y = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } y = 2, \text{ 则 } x = 1, z = 2,$$

$$\therefore \vec{m} = (1,2,2).$$

设平面 PDE 与平面 BDE 夹角为 θ , 易知 θ 为锐角,

$$\therefore \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{AP} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{AP}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{AP}|} = \frac{4}{3 \times 2} = \frac{2}{3}.$$

(3) 设平面 PDC 的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$,

$$\text{且 } \overrightarrow{DC} = (2,2,0),$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2b - 2c = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a + 2b = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } b = 1, \text{ 则 } a = -1, c = 1, \text{ 故 } \vec{n} = (-1,1,1),$$

设点 E 到平面 PDC 距离为 h ,

$$\therefore h = \left| \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

【标注】 【知识点】向量法求空间距离；向量法解决二面角问题；向量法解决空间中的平行问题

20. 已知数列 $\{a_n\}$, S_n 为其前 n 项和, 且满足 $2S_n = a_{n+1} - 1$, $n \in \mathbf{N}_+$, $a_1 = 1$, $\{b_n\}$ 为等差数列, 满足

$$b_1 = a_2 + 12, a_3 = b_4.$$

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, H_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求 H_n .

(3) 若数列 $\{d_n\}$ 满足 $d_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ |b_n|, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求 $\{d_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 T_{2n} .

【答案】 (1) $a_n = 3^{n-1}$, $b_n = 17 - 2n$.

(2) $H_n = -9 - (n-9) \cdot 3^n$.

$$(3) T_{2n} = \begin{cases} \frac{1}{8}(9^n - 1) + 15n - 2n^2, n \leq 4 \\ \frac{1}{8}(9^n - 1) + 2n^2 - 15n + 56, n \geq 5 \end{cases}.$$

【解析】 (1) 由 $2S_n = a_{n+1} - 1$ ①可知,

当 $n = 1$ 时, $2a_1 = a_2 - 1$,

解得 $a_2 = 3$,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_n - 1$, ②

$\therefore$ ①-②得, $2a_n = (a_{n+1} - 1) - (a_n - 1)$,

即 $a_{n+1} = 3a_n$,

又 $a_2 = 3a_1$,

则当 $n = 1$ 时也符合上式,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项, 3为公比的等比数列,

$$\therefore a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}.$$

$$\therefore b_1 = a_2 + 12 = 3 + 12 = 15, b_4 = a_3 = 9,$$

又 $\because \{b_n\}$ 是等差数列, 设公差为 d ,

$$\text{则 } 3d = b_4 - b_1 = -6 ,$$

$$\text{即 } d = -2 ,$$

$$\therefore b_n = b_1 + (n-1)d = 17 - 2n .$$

$$(2) \text{ 由(1)可知, } c_n = a_n \cdot b_n = (17 - 2n) \cdot 3^{n-1} ,$$

$$\therefore H_n = 15 \times 3^0 + 13 \times 3^1 + 11 \times 3^2 + \cdots + (17 - 2n) \cdot 3^{n-1} \text{ ③} ,$$

$$3H_n = 15 \times 3^1 + 13 \times 3^2 + 11 \times 3^3 + \cdots + (17 - 2n) \cdot 3^n \text{ ④} ,$$

③-④得：

$$-2H_n = 15 - (2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^{n-1}) - (17 - 2n) \cdot 3^n$$

$$= 15 - \frac{6 \cdot (1 - 3^{n-1})}{1 - 3} - (17 - 2n) \cdot 3^n$$

$$= 18 - (18 - 2n) \cdot 3^n ,$$

$$\therefore H_n = -9 - (n - 9) \cdot 3^n .$$

$$(3) \text{ 由(1)可知 } b_n = 17 - 2n ,$$

$$\text{则当 } n \leq 8 \text{ 时, } b_n > 0 ,$$

$$\text{当 } n \geq 9 \text{ 时, } b_n < 0 ,$$

$$\therefore \text{当 } n \leq 8 \text{ 时, } d_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases} ,$$

$$\text{当 } n \geq 9 \text{ 时, } d_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ -b_n, n \text{ 为偶数} \end{cases} .$$

$$\therefore \text{当 } n \leq 4 \text{ 时,}$$

$$T_{2n} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$$

$$= (3^0 + 3^2 + \cdots + 3^{2n-2}) + (13 + 9 + \cdots + 17 - 4n)$$

$$= \frac{1 \cdot (1 - 3^{2n})}{1 - 3^2} + \frac{(13 + 17 - 4n) \cdot n}{2}$$

$$= \frac{1}{8}(9^n - 1) + 15n - 2n^2 ,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 5 \text{ 时,}$$

$$T_{2n} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + [-(b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n}) + 2(b_2 + b_4 + b_6 + b_8)]$$

$$= \frac{1}{8}(9^n - 1) + \left[-\frac{(13 + 17 - 4n)}{2} \cdot n + 2(13 + 9 + 5 + 1) \right]$$

$$= \frac{1}{8}(9^n - 1) + 2n^2 - 15n + 56 .$$

$$\text{综上, } T_{2n} = \begin{cases} \frac{1}{8}(9^n - 1) + 15n - 2n^2, n \leq 4 \\ \frac{1}{8}(9^n - 1) + 2n^2 - 15n + 56, n \geq 5 \end{cases} .$$

【标注】 【知识点】 等比数列求通项问题；等差数列求通项问题；错位相减法求和；分组法求和；分段数列问题