

南开高二期末（一）

1. 若某直线的斜率 $k \in (-\infty, \sqrt{3}]$ ，则该直线的倾斜角 α 的取值范围是（ ）。

- A. $[0, \frac{\pi}{3}]$ B. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ C. $[0, \frac{\pi}{3}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ D. $[\frac{\pi}{3}, \pi)$

【答案】C

【解析】因为直线的斜率 $k \in (-\infty, \sqrt{3}]$ ，故当 $k \in [0, \sqrt{3}]$ 时，倾斜角 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ；

当 $k \in (-\infty, 0)$ 时，倾斜角 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 。

故选C。

【标注】【知识点】斜率随倾斜角的变化规律

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_2 + a_9 = a_6$ ，则 $S_9 =$ （ ）

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】B

【解析】解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，首项为 a_1 ，

因为 $a_2 + a_9 = a_6$ ，

所以 $a_1 + 5d = a_1 + 2d + a_1 + 7d$ ，

所以 $a_1 + 4d = 0$ ，

所以 $S_9 = 9a_1 + 36d = 9(a_1 + 4d) = 0$ ，

故选：B。

【标注】【知识点】等差数列的性质及应用

3. 若 $A(-1, 0, 1)$ ， $B(1, 4, 7)$ 在直线 l 上，则直线 l 的一个方向向量为（ ）。

- A. $(1, 2, 3)$ B. $(1, 3, 2)$ C. $(2, 1, 3)$ D. $(3, 2, 1)$

【答案】A

【解析】由题意可得：直线 l 的一个方向向量 $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 6)$ ，

又 $\because (1, 2, 3) = \frac{1}{2}(2, 4, 6)$ ，

$\therefore (1, 2, 3)$ 是直线 l 的一个方向向量。

故选A。

【标注】【知识点】直线的方向向量与平面的法向量；空间向量的线性运算（非坐标）

4. 已知直线 $(a+2)x+2ay-1=0$ 与直线 $3ax-y+2=0$ 垂直，则实数 a 的值是（ ）.

A. 0 B. $-\frac{4}{3}$ C. 0或 $-\frac{4}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】解：当 $a=0$ 时，两条直线分别为 $2x-1=0$ ， $-y+2=0$ ，此时两条直线显然垂直；

当 $a \neq 0$ 时，两条直线的斜率分别为 $-\frac{a+2}{2a}$ ， $3a$ ，

所以 $-\frac{a+2}{2a} \cdot 3a = -1$ ，解得 $a = -\frac{4}{3}$ 。

故选C。

【标注】【知识点】直线的垂直

5. 已知等边三角形的一个顶点坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ ，另外两个顶点在抛物线 $y^2 = \sqrt{3}x$ 上，则这个等边三角形的边长为（ ）.

A. 3 B. 6 C. $2\sqrt{3} \pm 3$ D. $2\sqrt{3} + 3$

【答案】C

【解析】由题意，依据抛物线的对称性，及正三角形的一个顶点位于 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$ ，

另外两个顶点在抛物线 $y^2 = \sqrt{3}x$ 上，可设另外两个顶点的坐标分别为 $\left(\frac{m^2}{\sqrt{3}}, m\right)$ ，
 $\left(\frac{m^2}{\sqrt{3}}, -m\right)$ ，

由抛物线的对称性可以得到方程 $\tan 30^\circ = \frac{m}{\frac{m^2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

解得 $m = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2}$ ，故这个正三角形的边长为 $2|m| = 2\sqrt{3} \pm 3$ ，

故选C。

【标注】【知识点】抛物线的标准方程；抛物线的对称性

6. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率为 $\sqrt{5}$ ， P 是 C 上一点，且 $F_1P \perp F_2P$ ，若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为4，则 $a =$ （ ）

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】A

【解析】解：由题意，设 $|PF_2|=m$ ， $|PF_1|=n$ ，可得 $|m-n|=2a$ ， $\frac{1}{2}mn=4$ ， $m^2+n^2=4c^2$ ，

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{5},$$

$$\text{可得 } 4c^2 = 16 + 4a^2, \text{ 可得 } 5a^2 = 4 + a^2,$$

解得 $a=1$ （负值舍去）。

故选：A。

【标注】【知识点】双曲线的基本量求解

7. 已知向量 $\vec{a}=(3, -2, -3)$ ， $\vec{b}=(-2, x-1, 2)$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 x 的取值范围是()

A. $(-5, +\infty)$

B. $\left(-5, \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$

C. $(-\infty, -5)$

D. $\left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$

【答案】B

【解析】解：由题意知， $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，

$$\text{即 } \begin{cases} -6 - 2(x-1) - 6 < 0 \\ \frac{-2}{3} \neq \frac{x-1}{-2} \end{cases},$$

$$\text{解得 } x > -5 \text{ 且 } x \neq \frac{7}{3},$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } \left(-5, \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right).$$

故选：B。

【标注】【知识点】空间向量的模长与夹角

8. 若数列 $\{a_n\}$ 满足关系： $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ ， $a_8 = \frac{34}{21}$ ，则 $a_5 = ()$ 。

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{8}{5}$

D. $\frac{13}{8}$

【答案】C

$$\text{【解析】 } a_8 = 1 + \frac{1}{a_7} = \frac{34}{21},$$

$$\therefore a_7 = \frac{21}{13},$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{a_6} = \frac{21}{13}, a_6 = \frac{13}{8},$$

$$1 + \frac{1}{a_5} = \frac{13}{8}, a_5 = \frac{8}{5}.$$

故选C。

【标注】【知识点】根据递推关系求数列的某一项（非周期类）

【素养】数学运算

9. 设 P 为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{12} = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是该双曲线的两个焦点, 若 $|PF_1| : |PF_2| = 3 : 2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为().
- A. $6\sqrt{3}$ B. 12 C. $12\sqrt{3}$ D. 24

【答案】B

【解析】双曲线的实、虚半轴长和半焦距分别是： $a = 1, b = 2\sqrt{3}, c = \sqrt{13}$. 设 $|PF_1| = 3r$,

$$|PF_2| = 2r.$$

$$\therefore |PF_1| - |PF_2| = 2a = 2,$$

$$\therefore B.$$

$$\text{于是 } |PF_1| = 6, |PF_2| = 4.$$

$$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 52 = |F_1F_2|^2,$$

$$\text{故知 } \triangle PF_1F_2 \text{ 是直角三角形, } \angle F_1PF_2 = 90^\circ. \therefore S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12.$$

【标注】【知识点】双曲线的焦点三角形问题(小题)

【素养】数学运算

10. 直线 $y = kx + 3$ 被圆 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则直线的倾斜角为().
- A. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$ C. $-\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】A

【解析】解：由题意知，圆心为 $(2, 3)$ ，半径为2.

$$\text{因为直线 } y = kx + 3 \text{ 被圆 } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \text{ 截得的弦长为 } 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以圆心到直线的距离 } d = \sqrt{4 - 3} = 1 = \frac{|2k|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{由 } k = \tan \alpha,$$

$$\text{得 } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6}.$$

故选A.

【标注】【知识点】圆的弦长的相关问题

11. 已知直线 $ax + 4y - 2 = 0$ 和 $2x - 5y + b = 0$ 互相垂直，垂足是 $(1, c)$ ，则 $a + b + c = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -4

【解析】 把垂足(1,c)分别代入两直线的方程得 $a + 4c - 2 = 0$, $2 - 5c + b = 0$,

$\because$ 直线 $ax + 4y - 2 = 0$ 与 $2x - 5y + b = 0$ 互相垂直 ,

$$\therefore \frac{a}{-4} \cdot \frac{2}{5} = -1 ,$$

$$\therefore a = 10 ,$$

$$\therefore c = -2 , b = -12 ,$$

$$\therefore a + b + c = 10 - 12 - 2 = -4 .$$

故答案为-4 .

【标注】【知识点】两直线交点坐标；直线的垂直

12. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列 , 若 $a_1 + b_1 = 7$, $a_3 + b_3 = 21$, 则 $a_5 + b_5 =$ _____ .

【答案】 35

【解析】 方法一：设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的公差分别为 d, b ,

则由 $a_3 + b_3 = 21$, 得 $a_1 + b_1 + 2(b + d) = 21$,

即 $2(b + d) = 21 - 7 = 14$, 所以 $b + d = 7$,

所以 $a_5 + b_5 = a_1 + b_1 + 4(b + d) = 7 + 4 \times 7 = 35$.

方法二：因为数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列 ,

所以数列 $\{a_n + b_n\}$ 是等差数列 , 设其公差为 d ,

则 $2d = (a_3 + b_3) - (a_1 + b_1) = 21 - 7 = 14$, $d = 7$,

所以 $a_5 + b_5 = (a_1 + b_1) + 4d = 7 + 28 = 35$.

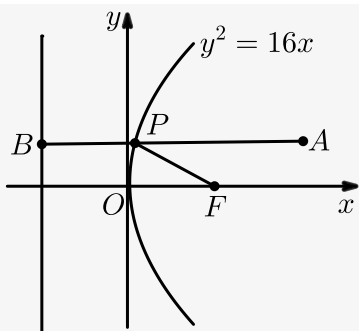
【标注】【知识点】求等差数列的基本量

13. 已知抛物线 $y^2 = 16x$, 焦点为 F , $A(8, 2)$ 为平面上的一定点 , P 为抛物线上的一动点 , 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 _____ .

【答案】 12

【解析】 抛物线的准线方程为： $x = -4$, 焦点为 $F(4, 0)$,

过 A 向准线作垂线 , 垂足为 B ,



$$\therefore |PA| + |PF| \geq |AB| = 12 .$$

故答案为：12 .

【标注】【知识点】抛物线的定义

14. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 1$ ， $a_5 = 8$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2^{n-1} - \frac{1}{2}$

【解析】 解： $\because a_2 = 1$ ， $a_5 = 8$ ，

$$\therefore a_5 = a_2 q^3 ,$$

$$\text{即 } q^3 = \frac{a_5}{a_2} = 8 , \text{ 即 } q = 2 ,$$

$$\text{首项 } a_1 = \frac{1}{2} ,$$

$$\text{则数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2} ,$$

$$\text{故答案为：} 2^{n-1} - \frac{1}{2} .$$

【标注】【知识点】等比数列求和问题

15. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A, B 两点，若 $|F_2A| + |F_2B| = 12$ ，则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8

【解析】 方法一：易得 $a = 5$ ，

$$\text{根据椭圆的性质可得 } |AB| = |F_1A| + |F_1B| = 2a - |F_2A| + 2a - |F_2B| = 8 .$$

$$\text{方法二：} |F_1A| + |F_1B| + |F_2A| + |F_2B| = 4a = 20 , \text{ 故 } |AB| = 20 - 12 = 8$$

.

故答案为：8 .

【标注】【知识点】椭圆的定义

16. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1 = 1$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 求数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】 (1) $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$

(2) $2^{n+1} - 2$.

【解析】 (1) 由题设知公差 $d \neq 0$,

由 $a_1 = 1, a_1, a_3, a_9$ 成等比数列得 $\frac{1+2d}{1} = \frac{1+8d}{1+2d}$,

解得 $d = 1, d = 0$ (舍去),

故 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$.

(2) 由(1)知 $2^{a_n} = 2^n$, 由等比数列前 n 项和公式得

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2.$$

【标注】【知识点】等比数列求和问题

17. 已知直线 l 过点 $P(2, 5)$, 圆 C 的方程是 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$.

- (1) 若直线 l 的斜率为1, 且直线 l 与圆 C 交于 M, N 两点, 弦 MN 得长.
(2) 若直线 l 与圆 C 相切, 求 l 得方程.
(3) 若直线 l 与圆 C 相交于点 E, F 两点, 问: 在圆 C 上, 是否存在点 D , 使四边形 $EDFC$ 是菱形? 若存在, 求直线 l 的方程. 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $|MN| = 8$.

$$(2) x=2 \text{ 或 } y=5.$$

$$(3) y-5 = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}(x-2).$$

【解析】(1) l 的斜率为 1, 故 l 的方程为 $x-y+3=0$,

$$\odot C \text{ 的标准方程为 } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16,$$

圆心为 $C(-2, 1)$,

恰好在 l 上,

$\therefore MN$ 为直径,

$$\therefore |MN| = 8.$$

(2) 若 l 斜率不存在, 则 $l: x=2$, 此时满足 l 与 C 相切,

若 l 斜率存在, 设为 k , 故 $l: kx-y+5-2k=0$,

$$\text{由点到直线距离公式, 有 } \frac{|k \cdot (-2) - 1 + 5 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4,$$

解得 $k=0$,

$\therefore l$ 的方程为 $x=2$ 或 $y=5$.

(3) 设 $l: kx-y+5-2k=0$, 令 C 到 l 的距离为 2,

$$\text{即 } \frac{|k \cdot (-2) - 1 + 5 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2, \text{ 解得 } k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3},$$

此时 D 是关于 C 的对称点, 必落在圆 C 上, 满足四边形 $EDFC$ 是菱形,

$$\text{因此, 直线 } l \text{ 的方程为 } y-5 = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}(x-2).$$

【标注】【知识点】圆的弦长的问题; 已知直线和圆的位置关系求直线的方程

18. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{9}{2}$, 其前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的各项均为正数, $b_1 = 1$, 比为 q , 且

$$S_2 + b_3 = 21, S_2 - b_3 = q.$$

(1) 求通项公式 a_n 与 b_n .

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n \cdot S_n = 1$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 3n + \frac{3}{2}, b_n = 3^{n-1}.$

(2) $\frac{n(3n+5)}{6(n+1)(n+2)}.$

【解析】(1) 设得的公差为 d ,

$$\text{则 } S_2 = 2a_1 + d = 9 + d, \quad b_3 = b_1 q^2 = q^2,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 9 + d + q^2 = 21 \\ 9 + d - q^2 = q \end{cases}, \text{ 解得 } q = 3 \text{ 或 } q = -\frac{7}{2} \text{ (舍去)}, \quad d = 3,$$

$$\text{则通项公式 } a_n = 3n + \frac{3}{2}, \quad b_n = 3^{n-1}.$$

$$(2) \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{3n(n+2)}{2}, \quad c_n \cdot S_n = 1,$$

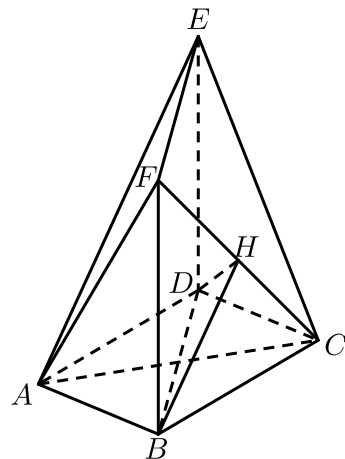
$$\therefore c_n = \frac{1}{S_n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right),$$

则 $\{c_n\}$ 的前 n 项和

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + 1 - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{6(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】利用方程组求等比数列；裂项相消法求和

19. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 四边形 $BDEF$ 是矩形, 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, $BF = 3$, H 是 CF 的中点.



- (1) 求证: $AC \perp$ 平面 $BDEF$.
(2) 求直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值.
(3) 求二面角 $H - BD - C$ 的大小.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$(3) 60^\circ.$$

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD.$$

又 $\because$ 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD$,

且 $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore AC \perp \text{平面 } BDEF.$$

(2) 设 $AC \cap BD = O$, 取 EF 的中点 N , 连接 ON ,

$\because$ 四边形 $BDEF$ 是矩形, O, N 分别为 BD, EF 的中点,

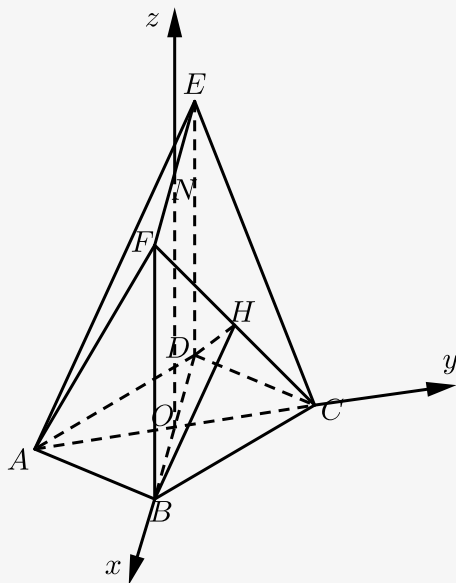
$$\therefore ON \parallel ED,$$

$\because ED \perp$ 平面 $ABCD$,

$$\therefore ON \perp \text{平面 } ABCD,$$

由 $AC \perp BD$, 得 OB, OC, ON 两两垂直.

$\therefore$ 以 O 为原点, OB, OC, ON 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 如图建立空间直角坐标系.



$\because$ 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $BF = 3$,

$$\therefore A(0, -\sqrt{3}, 0), B(1, 0, 0), D(-1, 0, 0), E(-1, 0, 3),$$

$$F(1, 0, 3), C(0, \sqrt{3}, 0), H\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$\because AC \perp$ 平面 $BDEF$,

$$\therefore \text{平面 } BDEF \text{ 的法向量 } \overrightarrow{AC} = (0, 2\sqrt{3}, 0).$$

设直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角为 α ,

$$\because \overrightarrow{DH} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore \sin \alpha = \left| \cos \langle \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AC} \rangle \right| = \frac{\left| \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} \right|}{\left| \overrightarrow{DH} \right| \left| \overrightarrow{AC} \right|} = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

$\therefore$ 直线 DH 与平面 $BDEF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

$$(3) \text{ 由 (2), 得 } \overrightarrow{BH} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right), \overrightarrow{DB} = (2, 0, 0).$$

设平面 BDH 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -x + \sqrt{3}y + 3z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$

令 $z = 1$, 得 $\vec{n} = (0, -\sqrt{3}, 1)$

由 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, 得平面 BCD 的法向量为 $\overrightarrow{ED} = (0, 0, -3)$,

$$\text{则 } \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{ED} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{ED}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{ED}|} = -\frac{1}{2},$$

由图可知二面角 $H - BD - C$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $H - BD - C$ 的大小为 60° .

【标注】【知识点】向量法解决二面角问题

20. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 过椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴端点, P, Q 分别是圆 O 与椭圆 C 上任意两点, 且线段 PQ 长度的最大值为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $(0, t)$ 作圆 O 的一条切线交椭圆 C 于 M, N 两点, 求 $\triangle OMN$ 的面积的最大值.

【答案】 (1) $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$.

(2) 1.

【解析】 (1) $\because$ 圆 O 过椭圆 C 的短轴端点, $\therefore b = 1$,

又 $\because$ 线段 PQ 长度的最大值为 3,

$\therefore a + 1 = 3$, 即 $a = 2$,

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{4} + x^2 = 1$.

(2)

由题意可设切线 MN 的方程为 $y = kx + t$ ，即 $kx - y + t = 0$ ，则 $\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$ ，得

$$k^2 = t^2 - 1. \quad ①$$

联立得方程组 $\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y 整理得 $(k^2 + 4)x^2 + 2ktx + t^2 - 4 = 0$ 。

其中 $\Delta = (2kt)^2 - 4(k^2 + 4)(t^2 - 4) = -16t^2 + 16k^2 + 64 = 48 > 0$ ，

设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{-2kt}{k^2 + 4}$ ， $x_1 x_2 = \frac{t^2 - 4}{k^2 + 4}$ ，

$$\text{则 } |MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{-16t^2 + 16k^2 + 64}}{k^2 + 4}. \quad ②$$

将①代入②得 $|MN| = \frac{4\sqrt{3}|t|}{t^2 + 3}$ ， $\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 1 \times |MN| = \frac{2\sqrt{3}|t|}{t^2 + 3}$ ，

而 $\frac{2\sqrt{3}|t|}{t^2 + 3} = \frac{2\sqrt{3}}{|t| + \frac{3}{|t|}} \leq 1$ ，等号成立当且仅当 $|t| = \frac{3}{|t|}$ ，即 $t = \pm\sqrt{3}$ 。

综上所述： $(S_{\triangle OMN})_{\max} = 1$ 。

【标注】【知识点】最值问题；面积问题