

南开中学高一期末

一、选择题

(本大题共10小题，每小题4分，共40分)

1. 将 210° 化为弧度制的结果是 () .

A. $\frac{4\pi}{3}$

B. $\frac{7\pi}{6}$

C. $-\frac{5\pi}{6}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because 180^\circ$ 是 π ,

360° 是 2π ,

$\therefore 210^\circ$ 是 $\frac{7}{6}\pi$,

故B .

【标注】 【知识点】 弧度制与角度制的互化问题

2. 已知 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + A\right) = ()$.

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + A\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi + A\right) = \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选D .

【标注】 【知识点】 利用诱导公式直接求值

3. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$, 则 $\tan \alpha = ()$.

A. $-\frac{1}{3}$

B. 1

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】 C

【解析】 $\because \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$,

$$\therefore \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = 2 ,$$

$$\therefore \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2 ,$$

$$\therefore 1 + \tan \alpha = 2 - 2 \tan \alpha ,$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{3} .$$

故选C .

【标注】 【知识点】利用正切和差角公式凑角求值

4. 已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = (\quad)$.

A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $-\frac{5}{3}$

D. 0

【答案】 B

【解析】 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha}$
 $= \frac{\tan \alpha - 2}{2 \tan \alpha + 1}$
 $= \frac{3 - 2}{2 \times 3 + 1}$
 $= \frac{1}{7} .$

故选B .

【标注】 【知识点】同角三角函数的基本关系式的化简和求值

5. 函数 $y = \log_3 x$ 的图象与函数 $y = 3^x$ 的图象 () .

A. 关于 x 轴对称

B. 关于 y 轴对称

C. 关于原点对称

D. 关于直线 $y = x$ 对称

【答案】 D

【解析】 $y = 3^x$ 关于 x 轴对称为 $y = -3^x$,
 $y = 3^x$ 关于 y 轴对称为 $y = 3^{-x}$,
 $y = 3^x$ 关于原点对称为 $y = -3^{-x}$,
 $y = 3^x$ 关于直线 $y = x$ 对称为 $y = \log_3 x$,
 故选D .

【标注】 【知识点】两个函数的互对称问题

6. 已知 $a = \log_2 4.1$, $b = 2^{0.8}$, $c = 0.5^{-2.7}$, 则 a , b , c 的大小关系为 () .

A. $b < a < c$

B. $a < c < b$

C. $c < b < a$

D. $a < b < c$

【答案】 A

【解析】 $\because y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单增，

$$\therefore \log_2 8 > \log_2 4.1 > \log_2 4 = 2,$$

$$\therefore 3 > a > 2,$$

$\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$$\therefore 2^0 < 2^{0.8} < 2^1,$$

$$\therefore 1 < b < 2,$$

$$c = 0.5^{-2.7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2.7} = 2^{2.7} > 2^2 = 4,$$

$$\therefore c > a > b,$$

故选A.

【标注】 【知识点】 指对幂比较大小

7. 已知函数 $f(x) = 2^x + 2x - 5$ 的零点属于区间 $(m-1, m)$ ，其中 $m \in \mathbf{Z}$ ，则

$$4^{\frac{1}{m}} - \log_8 |m| = (\quad).$$

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{3}$

D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$y = 2x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$\therefore f(x) = 2^x + 2x - 5$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增，

$$f(1) = 2^1 + 2 - 5 = -1 < 0,$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 5 = 3 > 0,$$

$$\therefore f(1) \cdot f(2) < 0,$$

$$\therefore \text{零点 } x_0 \in (1, 2),$$

$$\therefore m = 2,$$

$$4^{\frac{1}{m}} - \log_8 |m|$$

$$= 4^{\frac{1}{2}} - \log_8 2$$

$$= 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{3}.$$

故选C.

【标注】 【知识点】 判定函数零点所在区间（存在性定理）；指对化简求值

8. 已知函数 $f(x) = \log_5(x^2 + ax + a + 7)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 () .

A. $[-4, -2]$

B. $[-4, -2)$

C. $(-\infty, -2]$

D. $(-\infty, -2)$

【答案】 A

【解析】 $\because f(x) = \log_5(x^2 + ax + a + 7)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单减,

又 $\because y = \log_5 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单增,

$\therefore y = x^2 + ax + a + 7$ 单减,

$$1 \leq -\frac{a}{2},$$

$$a \leq -2,$$

又 $\because x^2 + ax + a + 7 > 0$ 对 $\forall x \in (-\infty, 1)$ 上恒成立,

又 $\because y = x^2 + ax + a + 7$ 单减,

$$\therefore 1^2 + a \times 1 + a + 7 \geq 0,$$

$$\therefore a \geq -4,$$

综上 $-4 \leq a \leq -2$,

故A.

【标注】 【知识点】利用函数单调性解不等式

9. 放射性物质的半衰期 T 定义为每经过时间 T , 该物质的质量会衰退原来的一半, 铅制容器中有两种放射性物质 A, B , 开始记录时容器中物质 A 的质量是物质 B 的质量的2倍, 而120小时后两种物质的质量相等, 已知物质 A 的半衰期为7.5小时, 则物质 B 的半衰期为 () .

A. 10小时

B. 8小时

C. 12小时

D. 15小时

【答案】 B

【解析】 由题意, 物质 A 经过32个半衰期, 没开始记录时容器中物质 A 的质量是 $2m$, 物质 B 的质量为 m , 则 $2m \times \left(\frac{1}{2}\right)^{16} = m \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$. 所以物质 B 经过了15个半衰期, 则物质 B 的半衰期为 $\frac{120}{15} = 8$.

故选B.

【标注】 【知识点】指数函数模型

10. 若关于 x 的方程 $(m+2)x - 2 = mx^2 - |x^2 - 1|$ 恰有三个不同的实数解, 则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(0, 1) \cup (1, 4)$

B. $(0, 4)$

C. $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$

D. $(-2, 1)$

【答案】A

【解析】(1)当 $-1 \leq x \leq 1$,

此时 $x^2 - 1 \leq 0$,

$$(m+2)x - 2 = mx^2 + x^2 - 1,$$

$$(m+1)x^2 - (m+2)x + 1 = 0,$$

$$[(m+1)x - 1](x - 1) = 0,$$

$x = 1$ 是方程的一个根,

(2)当 $x > 1$ 或 $x < -1$,

此时 $x^2 - 1 > 0$,

$$(m+2)x - 2 = mx^2 - x^2 + 1,$$

$$\therefore (m-1)x^2 - (m+2)x + 3 = 0,$$

$$[(m-1)x - 3](x - 1) = 0,$$

$$\therefore x \neq 1,$$

$$\therefore (m-1)x = 3,$$

若 $m+1=0$ 或 $m-1=0$,

原方程至多2个根, 与3个根矛盾,

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{m+1}, x_3 = \frac{3}{m-1},$$

$$\therefore \begin{cases} -1 \leq \frac{1}{m+1} < 1 \\ \frac{3}{m-1} > 1 \text{ 或 } \frac{3}{m-1} < -1 \end{cases},$$

①若 $m > 1$,

$$\begin{cases} -m-1 \leq 1 < m+1 \\ 3 > m-1 \text{ 或 } 3 < 1-m \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ m < 4 \text{ 或 } m < -2 \end{cases}$$

$$\therefore 1 < m < 4,$$

②若 $m < -1$,

$$\begin{cases} -m-1 \geq 1 > m+1 \\ 3 < m-1 \text{ 或 } 3 > 1-m \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m < -2 \\ m > 4 \text{ 或 } m > -2 \end{cases}$$

$\therefore m$ 无解,

③若 $-1 < m < 1$,

$$\begin{cases} -m-1 < 1 < m+1 \\ 3 < m-1 \text{ 或 } 3 > 1-m \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ m > 4 \text{ 或 } m > -2 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < m < 1,$$

综上 $m \in (0, 1) \cup (1, 4)$,

故选A.

【标注】 【知识点】 已知零点情况求参数的取值范围

二、 填空题

(本大题共6小题，每小题4分，共24分)

1. 已知角 α 的终边过点 $P(-5, 12)$ ，则 $\cos \alpha =$ _____ .

【答案】 $-\frac{5}{13}$

【解析】 角 α 的终边上的 $P(-5, 12)$ 到原点的距离为 $r = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ ，
故 $\cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{5}{13}$.

【标注】 【知识点】 计算任意角的三角函数值

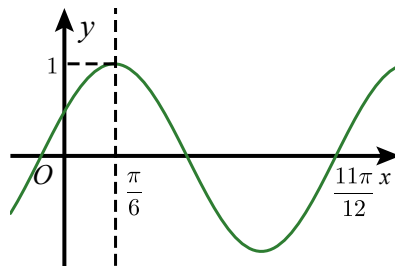
2. $\lg \frac{5}{8} + \log_{\frac{1}{4}} 2 + 4 \lg 2 + e^{2 \ln 2} =$ _____ .

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $\lg \frac{5}{8} + \log_{\frac{1}{4}} 2 + 4 \lg 2 + e^{2 \ln 2}$
 $= \lg \frac{5}{8} + \lg 2^4 + \lg 4^2 + (e^{\ln 2})^2$
 $= \lg 10 - \frac{1}{2} + 2^2$
 $= 1 - \frac{1}{2} + 4$
 $= \frac{9}{2}$.

【标注】 【知识点】 利用换底公式求值

3. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图所示，则 $\omega =$ _____， $\varphi =$ _____ .



【答案】 $2; \frac{\pi}{6}$

【解析】 $\frac{3}{4}T = \frac{11}{12}\pi - \frac{\pi}{6}$

$$\frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\pi$$

$$T = \pi$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = \pi$$

$$\therefore \omega = 2.$$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 时, 取得最高点,

$$\therefore 2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}).$$

$$\therefore 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

【标注】 【知识点】已知正弦型函数图象求参数值

4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

【答案】 $\frac{7}{25}$

【解析】 $\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{3}{5},$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{3}{5} \sqrt{2},$$

$$\therefore 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{18}{25},$$

$$\therefore 1 - \sin 2\alpha = \frac{18}{25},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

【标注】 【知识点】二倍角的正弦

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2$ 在区间 $[1, 3]$ 上有零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $\left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right]$

【解析】 $\therefore f(x) = x^2 - ax + 2$ 在 $[1, 3]$ 上有零点,

$$\therefore \exists x \in [1, 3],$$

$$\text{使得 } x^2 - ax + 2 = 0,$$

$$x^2 - ax + 2 = 0,$$

$$\therefore x \in [1, 3],$$

$$\therefore a = x + \frac{2}{x},$$

$$\because x \in [1, 3],$$

$$x + \frac{2}{x} \in \left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right],$$

$$\therefore a \in \left[2\sqrt{2}, \frac{11}{3}\right].$$

【标注】 【知识点】已知零点情况求参数的取值范围

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后对应的函数是奇函数, 函数 $g(x) = (1 + \sqrt{3})\cos 2x$. 若关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = -\frac{1}{2}$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的实数解 α, β , 则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】 $\because T = \pi,$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \varphi),$$

$$f(x) \text{ 向左平移 } \frac{\pi}{6}, \text{ 得 } y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right),$$

$$\because y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right) \text{ 为奇函数},$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又 } \because |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because f(x) + g(x) = -\frac{1}{2} \text{ 在 } [0, \pi) \text{ 内有 2 个不同实数解},$$

$$\therefore 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + (1 + \sqrt{3})\cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore 2\left(\sin 2x \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) + (1 + \sqrt{3})\cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \sin\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{设 } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$\therefore \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \theta, \quad \sin\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \theta,$$

$$\therefore 2\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi + \theta, \quad 2\beta + \frac{\pi}{4} = 2\pi - \theta,$$

$$\therefore 2\alpha - 2\beta = 2\theta - \pi,$$

$$\therefore \alpha - \beta = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

【标注】 【知识点】 倍角、和差角公式综合

三、解答题

(本大题共3小题，每小题12分，共36分)

1. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\cos\beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，且 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求 $\cos^2\beta - \sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta$ 的值 .

(2) 求 $\sin(2\alpha + \beta)$ 的值 .

【答案】 (1) $\frac{11}{10}$.
(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 (1) $\because \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{又} \because \cos\beta = \frac{7\sqrt{2}}{10} ,$$

$$\therefore \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{10} ,$$

$$\therefore \cos^2\beta - \sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta$$

$$= \frac{98}{100} - \frac{2}{100} + \frac{14}{100}$$

$$= \frac{11}{10} .$$

$$(2) \because \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{10} , \cos\beta = \frac{7\sqrt{2}}{10} ,$$

$$\therefore \tan\beta = \frac{1}{7} ,$$

$$\text{又} \because \tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore 2\tan\alpha + \frac{2}{7} = 1 - \frac{1}{7}\tan\alpha$$

$$\frac{15}{7}\tan\alpha = \frac{5}{7}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{3} ,$$

$$\begin{aligned}
& \text{又} \because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\
& \therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \\
& \therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
& \quad = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \\
& \quad = \frac{3}{5}, \\
& \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
& \quad = \frac{90}{100} - \frac{10}{100} \\
& \quad = \frac{4}{5}, \\
& \sin(2\alpha + \beta) \\
& \quad = \sin 2\alpha \cos \beta + \sin \beta \cos 2\alpha \\
& \quad = \frac{3}{5} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{4}{5} \\
& \quad = \frac{25\sqrt{2}}{50} \\
& \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】和差角公式化简求值综合运用；已知正弦余弦正切或其关系求值

2. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.
 - (2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.
 - (3) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值及取得最值时 x 的值.

【答案】 (1) $T = \pi$.

(2) $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

(3) 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时取得最大值 0,
当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时取得最小值 $-\frac{3}{2}$.

【解析】 (1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - 1$

$$\begin{aligned}
&= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1, \\
T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi. \\
(2) & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \\
& \therefore -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z}), \\
& \therefore \text{递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}. \\
(3) & \because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\
& \therefore 0 \leq 2x \leq \pi, \\
& \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \\
& \therefore -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \\
& \therefore -\frac{3}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 0, \\
& \text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \\
& \text{即 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 时取得最大值 } 0, \\
& \text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时取得最小值 } -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

【标注】 【知识点】求固定区间正弦型函数值域；求正弦型函数的单调区间；二倍角的正弦；二倍角的余弦；辅助角公式

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ，区间 $D \subseteq I$ 。如果存在常数 $M > 0$ ，对任意 $x \in D$ ，都有 $|f(x)| \leq M$ 成立，则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，其中 M 称为 $f(x)$ 的边界。已知函数 $f(x) = 1 + a \cdot 2^x + 4^x$ ， $g(x) = \frac{1 - m \cdot 3^x}{1 + m \cdot 3^x}$ 。
- (1) 当 $a = -1$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域，并判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否为有界函数（写出结论即可）。
- (2) 若函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的以 3 为边界的有界函数，求实数 a 的取值范围。
- (3) 若 $m > 0$ ，求函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的边界 M 的取值范围。

【答案】 (1) $f(x) \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不是有界函数。

(2) $-5 \leq a \leq 1$ 。

(3) 当 $m \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 时， M 的取值范围是 $\left[\frac{1-m}{1+m}, +\infty\right)$ ，

当 $m \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$ 时, M 的取值范围是 $\left[\frac{2m-1}{2m+1}, +\infty \right)$.

【解析】(1) 当 $a = -1$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= 4^x - 2^x + 1 \\ &= (2^2)^x - 2^x + 1 \\ &= (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left(2^x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \\ \therefore f(x) &\in \left[\frac{3}{4}, +\infty \right), \end{aligned}$$

故不存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ 成立,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不是有界函数.

(2) $\because f(x)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的以 3 为边界的有界函数,

$\therefore |f(x)| \leq 3$ 在 $(-\infty, 0]$ 上恒成立,

$$\therefore -3 \leq 1 + a \cdot 2^x + 4^x \leq 3,$$

令 $t = 2^x (t \in (0, 1])$,

$-3 \leq 1 + at + t^2 \leq 3$ 对 $\forall t \in (0, 1]$ 上恒成立,

$$\therefore \left(-t - \frac{4}{t} \right)_{\max} \leq a \leq \left(-t + \frac{2}{t} \right)_{\min},$$

$\because y = -t$ 在 $(0, 1]$ 上单减,

$y = \frac{2}{t}$ 在 $(0, 1]$ 上单减,

$\therefore y = -t + \frac{2}{t}$ 在 $(0, 1]$ 上单减,

$$\therefore \left(-t + \frac{2}{t} \right)_{\min} = -1 + 2 = 1,$$

由对勾函数知 $y = t + \frac{4}{t}$ 在 $(0, 1]$ 上递减,

$$\therefore \left(t + \frac{4}{t} \right)_{\min} = 1 + \frac{4}{1} = 5,$$

$$\therefore \left(-t - \frac{4}{t} \right)_{\max} = -5,$$

$$\therefore -5 \leq a \leq 1.$$

(3) 方法一: $y = \frac{1-m \cdot 2^x}{1+m \cdot 2^x}$, $\therefore m \cdot 2^x = \frac{1-y}{1+y}$,

$\because m > 0, x \in [0, 1], \therefore 2^x \in [1, 2],$

$$\therefore m \leq \frac{1-y}{1+y} \leq 2m \Leftrightarrow \left(\frac{1-y}{1+y} - m \right) \left(\frac{1-y}{1+y} - 2m \right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1-2m}{1+2m} \right) \left(y - \frac{1-m}{1+m} \right) \leq 0,$$

$$\therefore \frac{1-2m}{1+2m} = -1 + \frac{2}{1+2m} < -1 + \frac{2}{1+m} = \frac{1-m}{1+m},$$

$$\therefore \frac{1-2m}{1+2m} \leq g(x) \leq \frac{1-m}{1+m},$$

① 当 $\left| \frac{1-m}{1+m} \right| \geq \left| \frac{1-2m}{1+2m} \right|$ 即 $m \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ 时,

$$|g(x)| \leq \left| \frac{1-2m}{1+2m} \right|, \text{ 此时 } M \geq \left| \frac{1-m}{1+m} \right|,$$

② 当 $\left| \frac{1-m}{1+m} \right| < \left| \frac{1-2m}{1+2m} \right|$ 即 $m \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$ 时,

$$|g(x)| \leq \left| \frac{1-2m}{1+2m} \right|, \text{ 此时 } M \geq \left| \frac{1-2m}{1+2m} \right|,$$

综上所述, 当 $m \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 时, M 的取值范围是 $\left[\frac{1-m}{1+m}, +\infty\right)$,

当 $m \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 时, M 的取值范围是 $\left[\frac{2m-1}{2m+1}, +\infty\right)$.

方法二: $g(x) = -1 + \frac{2}{m \cdot 2^x + 1}$, 令 $2^x = t$, 因为 $x \in [0, 1]$, 所以 $t \in [1, 2]$,

$$g(x) = G(t) = \frac{1-mt}{1+mt} (m > 0, 1 \leq t \leq 2),$$

因为 $G(t)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 所以 $\frac{1-2m}{1+2m} \leq G(t) \leq \frac{1-m}{1+m}$.

又因为函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的上界是 M , 所以 $M \geq \max\left\{\left|\frac{1-2m}{1+2m}\right|, \left|\frac{1-m}{1+m}\right|\right\}$.

① 当 $\left|\frac{1-m}{1+m}\right| \geq \left|\frac{1-2m}{1+2m}\right|$ 即 $0 < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $M \geq \left|\frac{1-m}{1+m}\right| = \frac{1-m}{1+m}$;

② 当 $\left|\frac{1-m}{1+m}\right| < \left|\frac{1-2m}{1+2m}\right|$ 即 $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $M \geq \left|\frac{1-2m}{1+2m}\right| = \frac{2m-1}{2m+1}$.

【标注】 【知识点】不等式中的恒成立与能成立问题；用配方法求值域；函数的新定义问题；利用单调性求函数最值