

南开中学高一期末

一、选择题

(本大题共10小题，每小题4分，共40分)

1. 将 210° 化为弧度制的结果是 () .
A. $\frac{4\pi}{3}$ B. $\frac{7\pi}{6}$ C. $-\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
2. 已知 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + A\right) = ()$.
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2$ ，则 $\tan \alpha = ()$.
A. $-\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
4. 已知 $\tan \alpha = 3$ ，则 $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \cos \alpha} = ()$.
A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $-\frac{5}{3}$ D. 0
5. 函数 $y = \log_3 x$ 的图象与函数 $y = 3^x$ 的图象 () .
A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称
6. 已知 $a = \log_2 4.1$ ， $b = 2^{0.8}$ ， $c = 0.5^{-2.7}$ ，则 a, b, c 的大小关系为 () .
A. $b < a < c$ B. $a < c < b$ C. $c < b < a$ D. $a < b < c$
7. 已知函数 $f(x) = 2^x + 2x - 5$ 的零点属于区间 $(m-1, m)$ ，其中 $m \in \mathbb{Z}$ ，则 $4^{\frac{1}{m}} - \log_8 |m| = ()$.
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 4
8. 已知函数 $f(x) = \log_5(x^2 + ax + a + 7)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是 () .
A. $[-4, -2]$ B. $[-4, -2)$ C. $(-\infty, -2]$ D. $(-\infty, -2)$
9. 放射性物质的半衰期 T 定义为每经过时间 T ，该物质的质量会衰退原来的一半，铅制容器中有两种放射性物质 A, B ，开始记录时容器中物质 A 的质量是物质 B 的的质量的2倍，而120小时后两种物质的质量相等，已知物质 A 的半衰期为7.5小时，则物质 B 的半衰期为 () .
A. 10小时 B. 8小时 C. 12小时 D. 15小时
10. 若关于 x 的方程 $(m+2)x - 2 = mx^2 - |x^2 - 1|$ 恰有三个不同的实数解，则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(0, 1) \cup (1, 4)$

B. $(0, 4)$

C. $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$

D. $(-2, 1)$

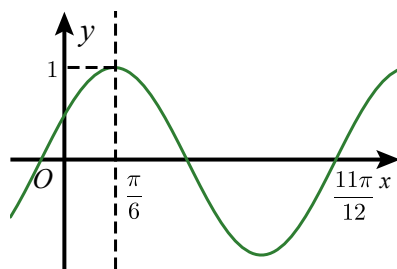
二、 填空题

(本大题共6小题，每小题4分，共24分)

1. 已知角 α 的终边过点 $P(-5, 12)$ ，则 $\cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lg \frac{5}{8} + \log_{\frac{1}{4}} 2 + 4 \lg 2 + e^{2 \ln 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图所示，则 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$.



4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 2$ 在区间 $[1, 3]$ 上有零点，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后对应的函数是奇函数，函数 $g(x) = (1 + \sqrt{3}) \cos 2x$. 若关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = -\frac{1}{2}$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的实数解 α ， β ，则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、 解答题

(本大题共3小题，每小题12分，共36分)

1. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ， $\cos \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，且 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求 $\cos^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin \beta \cos \beta$ 的值 .

(2) 求 $\sin(2\alpha + \beta)$ 的值 .

2. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(3) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最值及取得最值时 x 的值.

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 区间 $D \subseteq I$. 如果存在常数 $M > 0$, 对任意 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为 $f(x)$ 的边界. 已知函数 $f(x) = 1 + a \cdot 2^x + 4^x$, $g(x) = \frac{1 - m \cdot 3^x}{1 + m \cdot 3^x}$.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域, 并判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否为有界函数 (写出结论即可).

(2) 若函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的以 3 为边界的有界函数, 求实数 a 的取值范围.

(3) 若 $m > 0$, 求函数 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的边界 M 的取值范围.