

分奇偶

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, $b_1 = -1$, $b_n > 0 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, $b_2 S_n + a_n = 2$ 且

$$3a_2 = 2a_3 + a_1.$$

(1) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{1}{a_n}$, $T_n = \frac{b_1}{c_1 + 1} + \frac{b_2}{c_2 + 1} + \cdots + \frac{b_n}{c_n + 1}$, 证明: $T_n < \frac{5}{2}$.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n \text{ 为奇数} \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 且 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $b_n = a_n a_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n} .

(3) 设 $c_n = a_{2n-1} a_{2n} + (-1)^n$, 证明: $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n} < \frac{5}{4}$.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(S_n + n + 1) (n \in \mathbf{N}^*)$, 令 $b_n = a_n + 1$.

(1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 记数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 求证 : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}$.

5. $\{a_n\}$ 是等比数列 , 公比大于0 , 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$) , $\{b_n\}$ 是等差数列 . 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1) \cdot (a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的值 .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, & n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

通过解本题体会数列求和方法 , 列求和方法的本质是什么 ? (也就是说怎样转化成数列通项的模型求和)

(4) 是否存在数列 $\{c_n\}$, 满足等式 $\sum_{i=1}^n b_i c_{n+1-i} = 2^{n+1} - n - 2$ 成立 , 若存在 , 求出数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 ; 若不存在 , 请说明理由 .

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2 的值 .

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(3) 证明 : 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为正整数的等比数列, 若 $a_2 = 2$ 且 $a_1, a_3 + \frac{1}{2}, a_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

(2) 定义: $\frac{n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}$ 为 n 个正数 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 的“均倒数”.

① 若数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的“均倒数”为 $\frac{1}{2a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项 b_n .

② 试比较 $\frac{1}{b_1} + \frac{2}{b_2} + \cdots + \frac{n}{b_n}$ 与2的大小, 并说明理由.

8. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于0, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = 1, a_3 = a_2 + 2$,

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$, 求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$.

9. 已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 且满足 $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{9}, a_1 a_2 a_3 = \frac{1}{27}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{(2n-1) \cdot a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

(3) 若 $b_n = \frac{n}{3^{n-1} \cdot a_n} + \frac{3}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 证明: $\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}} \geq \frac{4}{35}$.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 (n \text{ 为正整数})$.

- (1) 令 $b_n = 2^n a_n$, 求证 : 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;
- (2) 令 $c_n = \frac{n+1}{n} a_n$, $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$, 求 T_n .

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 中 , $a_1 = 1$, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = \frac{n+1}{2} a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .
- (2) 求数列 $\{n^2 a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (3) 若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_n \leq (n+1)\lambda$ 成立 , 求实数 λ 的取值范围 .

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且点 $(n, S_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在函数 $y = 2^{x+1} - 2$ 的图象上 .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 : $b_1 = 0$, $b_{n+1} + b_n = a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (3) 在第 (2) 问的条件下 , 若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立 , 求实数 λ 的取值范围 .

13. 已知单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2 , a_4 的等差中项 .

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n} = \frac{b_1}{2+1} - \frac{b_2}{2^2+1} + \frac{b_3}{2^3+1} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2^n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 .
- (3) 在 (2) 条件下 . 设 $c_n = 2^n + \lambda b_n$. 问是否存在实数 λ 使得数列 $\{c_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是单调递增数列 ? 若存在 , 求出 λ 的取值范围 ; 若不存在 , 请说明理由 .

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} + 2a_{n-1} = 3a_n (n \geq 2)$.
- (1) 求证: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列.
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.
 - (3) 设 $b_n = a_n - 1$, $S_n = \frac{a_1}{b_1 b_2} + \frac{a_2}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n b_{n+1}}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使 $S_n \geq 4m^2 - 3m$ 成立, 求实数 m 的取值范围.
15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = \lambda$, 并满足: $a_{2k-1}, a_{2k-1+1}, a_{2k-1+2}, \cdots, a_{2k}$ 是等差数列 (其中 $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$), 且当 k 为奇数时, 公差为 d ; 当 k 为偶数时, 公差为 $-d$.
- (1) 当 $\lambda = 1$, $d = 1$ 时, 求 a_8 的值.
 - (2) 当 $d \neq 0$ 时, 求证: 数列 $\{[a_{2^{n+2}} - a_{2^n}]\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是等比数列.
 - (3) 当 $\lambda \neq 1$ 时, 记满足 $a_m = a_2$ 的所有 m 构成的一个单调递增数列为 $\{b_n\}$, 试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.
16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 并且 $a_2 = 2$, $S_5 = 15$, 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = \frac{n+1}{2n} b_n (n \in \mathbf{N}^+)$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项和公式 S_n .
 - (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 b_n 及前 n 项和公式 T_n .
 - (3) 记集合 $M = \left\{ n \mid \frac{2S_n(2-T_n)}{n+2} \geq \lambda, n \in \mathbf{N}^+ \right\}$, 若 M 的子集个数为16, 求实数 λ 的取值范围.

